الرياضة I

تفاضل - حساب مثلثات - جبــر



الرياضة I

تفاضل - حساب مثلثات - جبـــر

أحمـــد السيد عامر

دار الفجــر للنشــر والتوزيع
2007

الرياضياتI

تفاضل - حساب مثلثات - جبر

أ. أحمد السيد عامــر

حقوق النشر

الطبعة الأولي 2007

رقم الإيداع

١٦٠٠٨

الترقيم الدولي I.S.B.N.

977-358-126-8

دار الفجــر للنشــر و التــوزيــع

4 شارع هاشم الأشــقــر - النزهة الجديدة

القاهرة - مصــر

ت : 6246252 (00202) ف : 6246265 (00202)

المقدمة

(الرياضيات مادة إيقاظ الفكر وشحذ المواهب وبناء العقول الى جانب كونها الاساس والقاعدة والدعامة والركيزة للعديد من العلوم الهامة التي بنيت عليها الحضارات وشيدت الصناعات واقامت دولا ورفعت اقواما) .

وهذا الكتاب مدخل لعلم حساب التفاضل اقدمه الى الطلاب وكل طالب علم يهتم بدراسة الرياضيات ، وقد راعيت عند عرض المادة العلمية لهذا الكتاب ان تكون دقيقة وسهلة في الاسلوب ومترابطة في الفكر وواضحة في الرموز .

وانني إذ اقدم لابنائي الطلاب هذا المنهج معالجا في هذا الكتاب ليحدوني امل كبير ان يفيد منه ابناء الامة العربية وان يسهموا في رفع مستوى الدراسة بالمدرسة العربية ، وصولا الى الامل الذي يتخطى حدود الرؤيا لكي ندركه : وهو ان تتبوأ المدرسة العربية مكانتها الجديرة ، ونعيد الى ذهن العالم سيرة اجدادنا الذين قادو الحضارة العلمية بما حملوه من مشاعل النور والعلم والمعرفة وليست سيرة جابر بن حيان ، والخوارزمي ، والفارابي ، وابن الهيثم وغيرهم وغيرهم بخافية على احد .

وهذا الكتاب يعالج منهجا يتميز في جملته بمعالم واضحة اهمها :
البعد عن المناهج التقليدية في الهندسات ، يعكس هذا المنهج اتجاهات جديدة في تناول موضوع الهندسة ، ويثري هذا المنهج بافكار ومبادئ ومفاهيم تلقي بظلالها على فروع العلم والمعرفة ، لم تعد دراسة الهندسة اليوم قاصرة على لغة القياس او المساحات او الاشكال ، ولكن مفهومها اتسع فاحتضنت كل ما يتعلق بالفراغ سواء كانت معالجة الفراغ من وجهة نظر العدد (الجبر) او تجمع من النقط ، المستقيمات ، المستويات ــ وهكذا .

والله ولي التوفيق،،،

المؤلف

اولا التفاضل وحساب المثلثات

(١) التفاضل

النهايات

- نهاية دالة عند نقطة
- نهاية الدالة عند اللانهاية
- نهاية الدوال المثلثية

الاشتقاق

- دالة التغير
- المشتقة الاولى للدالة
- المعنى الهندسي للمشتقة الاولى(ميل المماس للمنحنى)
- مشتقة حاصل ضرب دالتين
- مشتقة خارج قسمة دالتين
- مشتقة دالة الدالة
- مشتقة الدوال المثلثية

الـنـهـايــات

مقدمة:

لمفهوم النهايات أهمية أساسية للرياضيات حيث تعتبر متطلبا رئيسيا لعدة موضوعات فيه ،من ذلك موضوعي التفاضل والتكامل حيث أن النهايات تشكل البداية والوسيلة في دراسة هذين الفرعين. وقبل ان نبدأ في معنى النهايات وطرق حسابها لابد أن نتعرف على بعض الأساسيات المختصة بهذا الموضوع:

إذا كان أ عددا حقيقيا موجبا فان قسمة هذا العدد على الصفر تعطي كمية كبيرة جدا لا حد لها هي ($+\infty$) أي ان:

$$\frac{\text{أ}}{\text{صفر}} = +\infty \qquad \frac{-\text{أ}}{\text{صفر}} = -\infty$$

$$\frac{\text{أ}}{\infty} = \text{صفر} \qquad \frac{\text{صفر}}{\text{أ}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\pm\infty}{\text{أ}} = \infty \qquad (\text{أ})^{\text{صفر}} = ١$$

$$(١)^{\infty} = \infty$$

$\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} = \infty$ اذا كانت أ > ب ، $\left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} =$ صفر اذا كانت ب > أ

هناك قيم أخرى غير معينة وهي $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$.

فالكسر $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢}$ يكون غير معرف (غير معين) اذا كانت س=٢ أي انه لا يمكن اختصاره اذا كانت س=٢ فنقول ان $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٢} = ١$ بشرط ان س $\neq$ ٢

معنى النهاية

لفهم النهاية سوف ندرس المثال التالي:

مثال (١):

{ارسم الشكل البياني للدالة} د= (س ، ص) : ص= $\frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ ؟

<u>الحل</u>

<u>نلاحظ ان</u> نطاق الدالة هو فئة الاعداد الحقيقية ما عدا س=٣ ، وقد سبق رسم الشكل البياني لهذه الدالة وهو عبارة عن خط مستقيم محذوفا منه نقطة واحدة عندما س=٣.

عندما س=٣ فإن $\frac{٣^{٢}-٩}{٣-٣} = \frac{٩-٩}{٣-٣}$

ص= $\frac{صفر}{صفر}$ وهذا كسر غير معروف.

∴ المشكلة التي نبحثها هنا اذا كان من المستحيل ايجاد قيمة ص عندما س=٣ فما هي أقرب قيمة تاخذها ص عندما تكون س قريبة جدا من العدد ٣ ؟

- نكون جدولين : نحسب قيمة ص لبعض قيم س التي تقترب من العدد ٣ سواء من يمين او من يسار العدد.

س تقترب من ٣ من اليمين

س	ص
٣,٥	٦,٥
٣,١	٦,١
٣,٠١	٦,٠١
٣,٠٠١	٦,٠٠١
٣,٠٠٠١	٦,٠٠٠١
↓	↓
٣	٦

س تقترب من ٣ من اليسار

س	ص
٢,٥	٥,٥
٢,٩	٥,٩
٢,٩٩	٥,٩٩
٢,٩٩٩	٥,٩٩٩
٢,٩٩٩٩	٥,٩٩٩٩
↓	↓
٣	٦

من الجدولين نرى ان ص تقترب من العدد ٦ كلما اقتربت س من العدد ٣ ، وهذا يتضح من الشكل البياني للدالة إذ نرى انه كلما اقترب الاحداثي السيني من القيمة ٣ اقترب الاحداثي الصادي من القيمة ٦ سواء كان الاقتراب من اليمين او من اليسار .

∴ العدد ٦ هو اقرب قيمة تاخذها الدالة ص عندما تكون س اقرب ما يمكن للعدد ٣ أي ان العدد ٦ يسمى نهاية الدالة ص= د(س) عندما س تقترب من العدد ٣ ويعبر عنه رمزيا :

$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ٣}$ ص = ٦ وتقرا نهاية الدالة ص عندما س تقترب من ٣ = ٦ .

او $\text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = ٦$

النظريات والقواعد الاساسيه في النهايات

(١) $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ [د(س) + ر(س)] = $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ د(س) + $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ ر(س) .

(٢) $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ ك د(س) = ك $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ د(س) حيث ك ثابت . .

(٣) $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ [د(س) × ر(س)] = $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ د(س) × $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ ر(س) .

(٤) $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ [د(س) ÷ ر(س)] = $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ د(س) ÷ $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ ر(س) .

وهذه الخواص صحيحة ايضا عندما س ← ∞ .

قد تكون د(أ) معرفة ، $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ د(س) معرفة ولكن د(أ) ≠ $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow \text{أ}}$ د(س)

∴ تكون الدالة غير متصلة عند س= أ ولكنها معرفة عند س= أ.

طرق حساب النهايات:

اولا: اذا كانت س تقترب من عدد حقيقي محدود (س ← أ) .

١- اذا كانت الدالة المراد ايجاد نهايتها دالة حدودية وكان أ عدد حقيقي فان

$$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = د(أ) .$$

امثلة :

(١) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ س^{٢} + ٢س + ٣ = (١)^{٢} + ٢(١) + ٣ = ١ + ٢ + ٣ = ٦$

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ س^{٣} - ١ = (٠)^{٣} - ١ = -١$

(٣) $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ ٢س + ٧ = ٢\frac{١}{٢} + ٧ = ١ + ٧ = ٨$

(٤) $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}}\ (س) = -٢$

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}\ (٣) = ٣$

(٦) $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}\ (س^{٧} + س^{٣} + ١) = (١)^{٧} + (١)^{٣} + ١ = ٣$

٢- اذا كانت الدالة المراد ايجاد نهايتها مكونة من بسط ومقام وكانت س ← أ فاننا نعوض تعويضا مباشرا في الدالة د(أ) فاذا كانت :

أ- د(أ)= كمية حقيقية فان $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}\ د(س) = د(أ)$

ب- د(أ) = $\frac{\text{عدد حقيقي}}{٠} = \infty$ **(النهاية ليس لها وجود).**

ج - د(ا) = $\frac{٠}{٠}$ **(فإننا نلجأ إلى عدة طرق للتخلص من القيمة المسببة للصفر وهي) :**

١- تحليل البسط والمقام إن أمكن ثم الاختصار .

٢- بالضرب في مرافق المقام أو البسط إذا كانت الدالة تحتوي على جذور للمتغير .

٣- استخدام طريقة القسمة المطولة إذا صعب التحليل .

٤- استخدام قاعدة معينة في النهايات إذا لم نتمكن من الحل بالطرق السابقة .

وسوف نتناول كل الملاحظات السابقة بالتفصيل من خلال الأمثلة الآتية:

أمثلة:

اوجد النهايات الآتية إن أمكن:

١) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$

بالتعويض المباشر $د(س) = \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$

$د(١) = \frac{١^{٢}+١}{١-٣} = \frac{٢}{-٢} = -١$ (عدد حقيقي) .

$\therefore \underset{س \to ١}{نها} \frac{س^{٢}+١}{س-٣} = -١$

٢) $\underset{س \to ٣}{نها} \frac{س^{٢}+١}{س-٣}$

بالتعويض المباشر $د(٣) = \frac{٣^{٢}+١}{٣-٣} = \frac{١٠}{٠} = \infty$

$\therefore$ النهاية ليس لها وجود [غير معرفة] .

أمثلة على التحليل:

٣) $\underset{س \to ٣}{نها} \frac{س^{٢}-٩}{س-٣}$ بالتعويض المباشر $د(٣) = \frac{٣^{٢}+١}{٣-٣} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ ان البسط هو فرق مربعين $\therefore$ يمكن تحليله .

$\text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-٩}{س-٣} = \text{نها}_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+٣)}{س-٣}$ نختصر ثم نعوض

$= \text{نها}_{س \to ٣} س+٣ = ٣+٣ =$

$\therefore \text{نها}_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-٩}{س-٣} = ٦$.

٤) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^{٢}-٣س}{س}$ بالتعويض المباشر $د(٠) = \frac{٠-٠}{٠} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ انه يمكن اخراج عامل مشترك من البسط وهو س .

$\therefore \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^{٢}-٣س}{س} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س(س-٣)}{س} = ٠-٣ = -٣$

$\therefore \text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^{٢}-٣س}{س} = -٣$

٥) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢س^{٣}-س^{٢}}{س}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر $د(٠) = \frac{٠}{٠}$

بأخذ عامل مختصر من البسط وهو $س^{٢}$.

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س^{٢}(٢س-١)}{س} = \text{نها}_{س \to ٠} س(٢س-١) = ٠(٢(٠)-١) =$ صفر.

$\therefore \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٢س^{٣}-س^{٢}}{س} =$ صفر

٦) $\text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣س^{٢}-س}{س^{٣}-٢س^{٢}}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر $د(٠) = \frac{٠}{٠}$

يمكن إخراج عامل مشترك من البسط والمقام .

$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{س(٣س-١)}{س^{٢}(س-٢)} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٣س-١}{س(س-٢)} = \frac{٣(٠)-١}{٠(٠-٢)} = \frac{٢}{٠} = \infty$

النهاية ليس لها وجود .

٧) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣}$. بالتعويض المباشر :

$\text{د}(-١) = \dfrac{-١^{٢}-(-١)-٢}{-١^{٢}+٤(-١)+٣} = \dfrac{١+١-٢}{١-٤+٣} = \dfrac{٠}{٠}$ (نلجأ للتحليل) .

نلاحظ أن البسط والمقام مقادير ثلاثية يمكن تحليلها حيث :

$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢ = (\text{س}-٢)(\text{س}+١)$.

$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣ = (\text{س}+٣)(\text{س}+١)$.

$\therefore \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}+١)}{(\text{س}+٣)(\text{س}+١)} = \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}-٢}{\text{س}+٣} = \dfrac{-١-٢}{-١+٣} = \dfrac{-٣}{٢}$

$\therefore \underset{\text{س}\to -١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٣} = \dfrac{-٣}{٢}$

٨) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}-٨}{\text{س}^{٢}-٤}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر : $\text{د}(٢) = \dfrac{٢^{٣}-٨}{٢^{٢}-٤} = \dfrac{٠}{٠}$

نلاحظ أن البسط عبارة عن فرق بين مكعبين أي يمكن تحليله :

$\text{س}^{٣}-٨ = (\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)$

والمقام هو فرق بين مربعين $\text{س}^{٢}-٤ = (\text{س}-٢)(\text{س}+٢)$

$\therefore \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}-٨}{\text{س}^{٢}-٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}{\text{س}+٢}$

$= \dfrac{٢^{٢}+٢\times٢+٤}{٢+٢} = \dfrac{٤+٤+٤}{٤} = ٣$

٩) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}+٨}{\text{س}+٢}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر : $\text{د}(-٢) = \dfrac{-٢^{٣}+٨}{-٢+٢} = \dfrac{٠}{٠}$

نلجأ إلى تحليل البسط

$\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}+٢)(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+٤)}{(\text{س}+٢)}$ ثم الاختصار

$= \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نها}} \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤ = (-٢)^{٢} - ٢(-٢) + ٤ = ٤+٤+٤ = ١٢$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{\text{س}^{٣}+٨}{\text{س}+٢} = ١٢$

١٠) $\lim_{\text{س}\to ٢\text{ك}} \dfrac{\text{س}^{٢}+\text{ك س} -٦\text{ك}^{٢}}{٢\text{س} - ٤\text{ك}}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر : د(٢ك)=

$\dfrac{٤\text{ك}^{٢}+\text{ك}(٢\text{ك})-٦\text{ك}^{٢}}{٢\,٢\text{ك} - ٤\text{ك}} = \dfrac{٠}{٠}$

نلجأ إلى تحليل البسط حيث هو عبارة عن مقدار ثلاثي:

$\text{س}^{٢} + \text{ك س} - ٦\text{ك}^{٢} = (\text{س}-٢\text{ك})\ (\text{س}+٣\text{ك})$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٢\text{ك}} \dfrac{\text{س}^{٢}+\text{ك س} -٦\text{ك}^{٢}}{٢\text{س} - ٤\text{ك}} = \lim_{\text{س}\to ٢\text{ك}} \dfrac{(\text{س}-٢\text{ك})(\text{س}+٣\text{ك})}{٢(\text{س}-٢\text{ك})} = \lim_{\text{س}\to ٢\text{ك}} \dfrac{\text{س}+٣\text{ك}}{٢} = \dfrac{٥\text{ك}}{٢}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to ٢\text{ك}} \dfrac{\text{س}^{٢}+\text{ك س} -٦\text{ك}^{٢}}{٢\text{س} - ٤\text{ك}} = \dfrac{٥\text{ك}}{٢}$

أمثلة على القسمة المطولة :

نستخدم هذه الطريقة عندما يصعب التحليل في البسط او المقام .

مثال : اوجد $\lim_{\text{س}\to ٢} \dfrac{٢\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}-٤}{\text{س}^{٣}-٢\text{س}-٤}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر

$= \dfrac{١٦-١٢-٤}{٨-٤-٤} = \dfrac{٠}{٠}$

بالقسمة على (س−٢) بسطا ومقاما

البســط	المقــام
$٢س^٢+س+٢$	$س^٢+٢س+٢$
$(س-٢)\overline{\big)\, ٢س^٣-٣س^٢ \;-٤}$	$(س-٢)\overline{\big)\, س^٣ \;-٢س-٤}$
$س^٣-٤س^٢$ بالطرح	$س^٣-٢س^٢$ بالطرح
$س^٢ \quad -٤$	$٢س^٢-٢س-٤$
$س^٢-٢س$ بالطرح	$٢س^٢-٤س$ بالطرح
$٢س-٤$	$٢س-٤$
$٢س-٤$ بالطرح	$٢س-٤$ بالطرح
...	...

$$\therefore \lim_{س\to٢} \frac{٢س^٣-٣س^٢-٤}{س^٣-٢س-٤} = \lim_{س\to٢} \frac{٢س^٢+س+٢}{س^٢+٢س+٢} = \frac{٨+٢+٢}{٤+٤+٢} = \frac{١٢}{١٠} = \frac{٦}{٥}$$

مثال :

اوجد $\lim_{س\to٢} \frac{٣س^٣-٢س^٢-٧س-٢}{س^٢-٤}$ $\Leftarrow$ بالتعويض المباشر

$$= \frac{٢٤-٨-١٤-٢}{٤-٤} = \frac{٠}{٠}$$

بالقسمة على العامل الصفري(س-٢) وتحليل المقام

$$\text{٣س}^{٢}+\text{٤س}+١$$

$$(\text{س}-٢)\ \Big)\ \text{٣س}^{٣}-\text{٢س}^{٢}-\text{٧س}-٢$$

$\text{٣س}^{٣}-\text{٦س}^{٢}$ بالطرح

$\text{٤س}^{٢}-\text{٧س}-٢$

$\text{٤س}^{٢}-٨\,\text{س}$ بالطرح

$\text{س}-٢$

$\text{س}-٢$ بالطرح

...

$$= \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{(\text{س}-٢)\,(\text{٣س}^{٢}+\text{٤س}+١)}{(\text{س}-٢)\,(\text{س}+٢)} = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{٣س}^{٢}+\text{٤س}+١}{\text{س}+٢} = \frac{١٢+٨+١}{٢+٢} = \frac{٢١}{٤}$$

امثلة على الضرب في المرافق للجذر

١١) $\lim_{\text{س}\to ٩} \frac{\sqrt{\text{س}}-٣}{\text{س}-٩}$ ⇐ بالتعويض المباشر د(٩) $= \frac{\sqrt{٩}-٣}{٩-٩} = \frac{٠}{٠}$

نلاحظ أن هناك جذر للمتغير س ∴ بالضرب في مرافق البسط وهو $\sqrt{\text{س}}+٣$.

$$\frac{\sqrt{\text{س}}-٣}{(\text{س}-٩)} \times \frac{\sqrt{\text{س}}+٣}{\sqrt{\text{س}}+٣} = \frac{(\text{س}-٩)}{(\text{س}-٩)(\sqrt{\text{س}}+٣)}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to ٩} \frac{\sqrt{\text{س}}-٣}{\text{س}-٩} = \lim_{\text{س}\to ٩} \frac{(\text{س}-٩)}{(\text{س}-٩)(\sqrt{\text{س}}+٣)} =$$

$$\lim_{\text{س}\to ٩} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}+٣} = \frac{١}{\sqrt{٩}+٣} = \frac{١}{٦} \qquad \therefore \lim_{\text{س}\to ٩} \frac{\sqrt{\text{س}}-٣}{\text{س}-٩} = \frac{١}{٦}$$

١٢) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\sqrt{س+أ} - \sqrt{أ}}$ ⟸ بالتعويض المباشر د(٠) = $\frac{0}{0}$ بضرب كلا من البسط والمقام في مرافق

المقام وهو $\sqrt{س+أ} + \sqrt{أ}$ حاصل ضرب المقام في مرافقه يساوي (مربع الأول – مربع الثاني) .

$$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{س}{\sqrt{س+أ} - \sqrt{أ}} \times \frac{(\sqrt{س+أ} + \sqrt{أ})}{(\sqrt{س+أ} + \sqrt{أ})}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س(\sqrt{س+أ} + \sqrt{أ})}{(س+أ) - (أ)}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{س(\sqrt{س+أ} + \sqrt{أ})}{س} = \sqrt{0+أ} + \sqrt{أ} = 2\sqrt{أ}$$

$$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{س}{\sqrt{س+أ} - \sqrt{أ}} = 2\sqrt{أ}$$

١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{2+3س} - \sqrt{2}}{س}$ ⟸ بالتعويض المباشر د(٠) =

$$\frac{\sqrt{2+0} - \sqrt{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

بالضرب في مرافق البسط وهو $\sqrt{2+3س} + \sqrt{2}$.

$$\therefore \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{2+3س} - \sqrt{2}}{س} \times \frac{\sqrt{2+3س} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+3س} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{(2+3س) - (2)}{س(\sqrt{2+3س} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{3س}{س(\sqrt{2+3س} + \sqrt{2})} = \frac{3}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٢+٣س} - \sqrt{٢}}{س} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}} .$$

١٤) $\lim_{س \to ١} \sqrt[٣]{س^٢+٢س+٥}$ ⟸ بالتعويض المباشر د(١) =

$$\sqrt[٣]{(١)^٢+٢(١)+٥} = \sqrt[٣]{٨} = ٢$$

$$\therefore \lim_{س \to ١} \sqrt[٣]{س^٢+٢س+٥} = ٢ .$$

١٥) $\lim_{س \to ١} \frac{١ - س}{\sqrt{١ - س^٢}}$ ⟸ بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{٠}{٠}$

بضرب البسط والمقام في $\sqrt{١ - س^٢}$ للتخلص من الجذر في المقام .

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{١ - س}{\sqrt{١ - س^٢}} \times \frac{\sqrt{١ - س^٢}}{\sqrt{١ - س^٢}} = \lim_{س \to ١} \frac{(١ - س)(\sqrt{١ - س^٢})}{١ - س^٢}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{(١ - س)(\sqrt{١ - س^٢})}{(١ - س)(١ + س)} = \frac{\sqrt{٠}}{٢} = صفر .$$

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{١ - س}{\sqrt{١ - س^٢}} = صفر .$$

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣ - س} - \sqrt{س+١}}{\sqrt{٢س - ١} - \sqrt{٣س - ٢}}$ ⟸ بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{٠}{٠}$

بالضرب في مرافق البسط وفي مرافق المقام .

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣ - س} - \sqrt{س+١}}{\sqrt{٢س - ١} - \sqrt{٣س - ٢}} \times \frac{\sqrt{٣ - س} + \sqrt{س+١}}{\sqrt{٣ - س} + \sqrt{س+١}} \times \frac{\sqrt{٢س - ١} + \sqrt{٣س - ٢}}{\sqrt{٢س - ١} + \sqrt{٣س - ٢}}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{[(٣-س) - (س+١)]\,[\sqrt{٢س-١} + \sqrt{٣س-٢}]}{[(٢س-١) - (٣س-٢)]\,[\sqrt{٣-س} + \sqrt{س+١}]}$$

$$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{٢(١-س)}{(١-س)} \times \frac{\sqrt{٢س-١} + \sqrt{٣س-٢}}{\sqrt{٣-س} + \sqrt{س+١}} = \frac{٤}{٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}$$

نظرية

إذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فان :

$$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن-١} \quad ،\ س \neq أ$$

نتائج

١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} (أ)^{ن-م}$

٢) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{(أ+هـ)^{ن} - أ^{ن}}{هـ} = ن\, أ^{ن-١}$

ملاحظات:

أ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١} = ن$

ب) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - ١}{س^{م} - ١} = \frac{ن}{م}$

أمثلة على النظرية ونتائجها

١) أوجد $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

الحـــــل

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - (٣)^{٤}}{س - ٣} = ٤(٣)^{٣} = ١٠٨$$

٢) اوجد $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{ب})^{3}-\text{ب}^{3}}{\text{س}}$

الحـــــل

$$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{ب})^{3}-\text{ب}^{3}}{\text{س}} = \underset{\text{س}+\text{ب}\to \text{ب}}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{ب})^{3}-\text{ب}^{3}}{(\text{س}+\text{ب})-\text{ب}} = 3\,\text{ب}^{2}$$

ملاحظة : عندما $\text{س} \to 0$ فان $\text{س}+\text{ب} \to \text{ب}$

٣) اوجد $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}-27}{\text{س}^{4}-81}$

الحـــــل

نجد انه يمكن كتابة $27 = (3)^{3}$ ، $81 = (3)^{4}$

$\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}-27}{\text{س}^{4}-81}$ على صورة النتيجة .

$$= \frac{3}{4}(3)^{3-4} = \frac{3}{4}(3)^{-1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

٤) اوجد $\underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}+1}{\text{س}^{5}+1}$

الحـــــل

نلاحظ انه من التعويض المباشر أن د(−١) = $\frac{0}{0}$ نلجأ إلى استخدام النتيجةمع ملاحظة أن

$$(-1)^{3} = (-1)^{5} = -1$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}-(-1)}{\text{س}^{5}-(-1)} = \underset{\text{س}\to -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}-(-1)^{3}}{\text{س}^{5}-(-1)^{5}} = \frac{3}{5}(-1)^{3-5}$$

$$= \frac{3}{5}(-1)^{-2} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{(-1)^{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \lim_{س \to -١} \frac{س^{٣} + ١}{س^{٥} + ١} = \frac{٣}{٥}$$

٥) اوجد $\lim_{س \to ١} \frac{٧س^{٣} - ٧}{س^{٧} - ١}$

الحـــــــــل

بالتعويض المباشر د(١) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النتيجة حيث تصعب كل الطرق الأخرى مع ملاحظة إخراج العامل المشترك من البسط وهو (٧) وان $(١)^{٧} = (١)^{٣} = ١$

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{٧(س^{٣} - ١)}{س^{٧} - ١} = ٧ \lim_{س \to ١} \frac{(س^{٣} - ١)}{س^{٧} - ١} = ٧ \times \frac{٣}{٧} (١)^{٣-٧} = ٧$$

$$\times \frac{٣}{٧} (١)^{-٤} = ٣ \times ١$$

$$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{٧س^{٣} - ٧}{س^{٧} - ١} = ٣$$

٦) اوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\frac{١}{س^{٤}} - \frac{١}{١٦}}{س - ٢}$

الحـــــــــل

نلاحظ أن د(٢) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النظرية بعد تغيير صورة النهاية .

$$\frac{١}{س^{٤}} = (س)^{-٤} \quad ، \quad \frac{١}{١٦} = \frac{١}{(٢)^{٤}} = (٢)^{-٤}$$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{(س)^{-٤} - (٢)^{-٤}}{س - ٢} = \frac{-٤}{١} (٢)^{-٤-١} = -٤(٢)^{-٥} = \frac{-٤}{(٢)^{٥}} = \frac{-٤}{٣٢}$$

$$\therefore \quad \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}^{٤}} - \frac{١}{١٦}}{\text{س} - ٢} = \frac{-٤}{٣٢} = \frac{-١}{٨}$$

٧) اوجد $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{٤}{\sqrt{\text{س}}} - ٤}{\text{س}^{٢} - ١}$

الحـــــل

د(١) = $\frac{٠}{٠}$ نلجأ إلى استخدام النتيجة مع مراعاة انه يجب اخراج العامل المشترك ٤ من البسط لأنه ثابت .

$$٤ \ \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١} = ٤ \ \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س})^{-\frac{١}{٢}} - ١}{\text{س}^{٢} - ١} =$$

$$٤ \ \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س})^{-\frac{١}{٢}} - (١)^{-\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{٢} - (١)^{٢}} = ٤ \times \frac{-\frac{١}{٢}}{٢} \times (١)^{-\frac{١}{٢} - ٢} = ٤ \times \frac{-١}{٢} \times ١ = -٢$$

٨) إذا كانت $\text{د(س)} = \dfrac{٣\text{أ}\sqrt[٣]{\text{س}} + ٣\text{أ}}{\text{س} + ١}$ فاثبت أن :-

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{أ}$

ب) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{د(١)}$

ج) $\dfrac{\text{د}(٠)}{٣} \ \underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \text{صفر}$

الحـــــل

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \text{د(س)} = \underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{أ}\sqrt[٣]{\text{س}} + ٣\text{أ}}{\text{س} + ١}$ بالتعويض المباشر .

$$\text{د}(-١) = \frac{٣\text{أ}\sqrt[٣]{-١} + ٣\text{أ}}{-١+١} = \frac{-٣\text{أ}+٣\text{أ}}{-١+١} = \frac{٠}{٠}$$

نستخدم القاعدة لإيجاد النهاية = ٣أ $\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}}{\text{س}+١} = ٣\text{أ}$

$$\underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \frac{(\text{س})^{\frac{١}{٣}} - (-١)^{\frac{١}{٣}}}{\text{س}^{١} - (-١)^{١}} = ٣\text{أ} \times \frac{\frac{١}{٣}}{١} (-١)^{\frac{١}{٣}-١} = \text{أ} \times \frac{١}{(-١)^{\frac{٢}{٣}}} = \text{أ} \times ١$$

$$\therefore \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = \text{أ}$$

ب) $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \text{د}(\text{س})$ بالتعويض المباشر $\text{د}(١) = \frac{٣\text{أ}\sqrt[٣]{١} + ٣\text{أ}}{١+١} = \frac{٦\text{أ}}{٢} = ٣\text{أ}$

$$\therefore \underset{\text{س} \to ١}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = ٣\text{أ} = \text{د}(١)$$

ج) $\text{د}(٠) = \frac{٣\text{أ} \times ٠ + ٣\text{أ}}{٠+١} = ٣\text{أ} \Leftarrow \frac{\text{د}(٠)}{٣} = \frac{٣\text{أ}}{٣} = \text{أ}$

$$\therefore \frac{\text{د}(٠)}{٣} - \underset{\text{س} \to -١}{\text{نها}} \text{د}(\text{س}) = \text{أ} - \text{أ} = \text{صفر}$$

٩) اوجد $\underset{\text{س} \to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{٣٢\text{س}^{٥} - ١}{٢\text{س} - ١}$

الحل

$\text{د}\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{٠}{٠}$ ، $\therefore \text{س} \to \frac{١}{٢}$ $\therefore ٢\text{س} \to ١$

$$\lim_{س \to 1^-} \frac{(2)^5 س^{5} - 1}{2س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{(2س)^5 - (1)^5}{2س - 1}$$ على صورة النظرية

$$= \frac{5}{1} (1)^{5-1} = 5 \times 1 = 5$$

$$\therefore \lim_{س \to \frac{1}{2}} \frac{32س^{5} - 1}{2س - 1} = 5$$

10) اوجد $\lim_{و \to 0} \frac{\sqrt{و+4} - 2}{و}$ ؟

الحل

بالتعويض المباشر : د(٠) = $\frac{0}{0}$ نجعل المعادلة على صورة النظرية $\Leftarrow$ $2 = (4)^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{و \to 0} \frac{\sqrt{و+4} - 2}{و} = \lim_{و+4 \to 4} \frac{(و+4)^{\frac{1}{2}} - (4)^{\frac{1}{2}}}{(و+4) - (4)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} (4)^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} (4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \lim_{و \to 0} \frac{\sqrt{و+4} - 2}{و} = \frac{1}{4}$$

11) اوجد $\lim_{و \to 0} \frac{\frac{1}{(س+و)^4} - \frac{1}{س^4}}{و}$

الحل

$د(٠) = \frac{٠}{٠}$ ، نجعل المعادلة على صورة النظرية :

$\therefore \frac{١}{(س+و)^{٤}} = (س+و)^{-٤}$ ، $\frac{١}{س^{٤}} = (س)^{-٤}$

$\therefore \lim_{و \leftarrow ٠} \frac{(س+و)^{-٤} - س^{-٤}}{و} = \lim_{س+و \leftarrow س}$

$\frac{(س+و)^{-٤} - س^{-٤}}{(س+و) - (س)}$

$= \frac{-٤}{١} (س)^{-٤-١} = -٤س^{-٥} = \frac{-٤}{س^{٥}}$

$\therefore \lim_{و \leftarrow ٠} \frac{\frac{١}{(س+و)^{٤}} - \frac{١}{س^{٤}}}{و} = \frac{-٤}{س^{٥}}$

١٢) اوجد $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{(أ + ب س)^{٣} - أ^{٣}}{س}$ ؟

الحل

$د(٠) = \frac{٠}{٠}$ ، بضرب البسط والمقام في ب .

$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{ب}{ب} \left(\frac{(أ + ب س)^{٣} - أ^{٣}}{س} \right) = ب$

$\lim_{(ب) س \leftarrow ٠} \frac{(أ + ب س)^{٣} - أ^{٣}}{(أ + ب س) - أ}$

$$= ب \quad \lim_{أ+(ب)س \to أ} \frac{(أ+ب س)^{٣} - أ^{٣}}{(أ+ب س) - أ} = ب \times \frac{٣}{١} (أ)^{٣-١} = ٣ ب (أ)^{٢}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{(أ+ب س)^{٣} - أ^{٣}}{س} = ٣ ب (أ)^{٢}$$

١٣) اوجد $\lim_{س \to ٠} \frac{٣\sqrt[٣]{أ+ب س} - ٣\sqrt[٣]{أ}}{س}$

الحل

د(٠) = $\frac{٠}{٠}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط اولا وهو (٣)

$$= ٣ \lim_{س \to ٠} \frac{(أ+ب س)^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}}}{س}$$ بضرب البسط والمقام في (ب)

$$= ٣ب \lim_{س \to ٠} \frac{(أ+ب س)^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}}}{ب(س)}$$ بإضافة (أ) وطرح (أ) من المقام .

$$= ٣ب \lim_{أ+ب(س) \to أ} \frac{(أ+ب س)^{\frac{١}{٣}} - أ^{\frac{١}{٣}}}{(أ+ب س) - أ} = ٣ ب \times \frac{١}{٣} (أ)^{\frac{١}{٣}-١}$$

$$= ب (أ)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{ب}{\sqrt[٣]{أ^{٢}}}$$

$$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{٣\sqrt[٣]{أ+ب س} - ٣\sqrt[٣]{أ}}{س} = \frac{ب}{\sqrt[٣]{أ^{٢}}}$$

١٤) اوجد $\underset{س \leftarrow \frac{8}{5}}{\text{نهـا}} \frac{4\sqrt[3]{5س} - 8}{5س - 8}$

الحل

$د\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{0}{0}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط وهو (٤) .

$$4 \underset{س \leftarrow \frac{8}{5}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{5س} - 8}{5س - 2} = 4 \underset{5س \leftarrow 8}{\text{نهـا}} \frac{(5س)^{\frac{1}{3}} - (8)^{\frac{1}{3}}}{(5س) - (8)} = 4 \times \frac{1}{3} (8)^{\frac{1}{3} - 1}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right) \times (8)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right) \times \frac{1}{(8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \underset{س \leftarrow \frac{8}{5}}{\text{نهـا}} \frac{4\sqrt[3]{5س} - 8}{5س - 8} = \frac{1}{3}$$

١٥) اوجد $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{16}{\sqrt{س+4}} - 8}{س}$

الحل

$د(0) = \frac{0}{0}$ ، بأخذ العامل المشترك من البسط وهو (١٦).

$$16 \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{\frac{61}{\sqrt{س+4}} - \frac{1}{2}}{س} = 16 \underset{س \leftarrow 0}{\text{نهـا}} \frac{(س+4)^{-\frac{1}{2}} - (4)^{-\frac{1}{2}}}{س}$$

$$= ١٦ \lim_{\text{س}+٤ \to ٤} \frac{(\text{س}+٤)^{-\frac{١}{٢}} - (٤)^{-\frac{١}{٢}}}{(\text{س}+٤) - (٤)} = ١٦ \times \frac{-\frac{١}{٢}}{١} (٤)^{-\frac{١}{٢} - ١}$$

$$= -٨ (٤)^{-\frac{٣}{٢}} = -٨ \times \frac{١}{٨} = -١$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{١٦}{\sqrt{\text{س}+٤}} - ٨}{\text{س}} = -١$$

ثانيا : إذا كان المتغير س يقترب من المالانهاية أي أن $\text{س} \to \infty$.

١- إذا كانت الدالة المراد إيجاد نهايتها دالة جبرية حدودية فان $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{د(س)} = \infty$

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} ٢\text{س}+١ = \infty$ ، $\lim_{\text{س} \to \infty} ٣\text{س}^{٢}+\text{س}^{٣} = \infty$ وبصفة عامة فان :

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\text{ن}} = \infty$$ **حيث ن عدد حقيقي موجب :**

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \sqrt{\text{س}} = \infty \quad ، \quad \lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^{\frac{٤}{٣}} + ١ = \infty \quad .$$

و هكذا ....

٢- إذا كان الدالة المراد إيجاد نهايتها دالة جبرية مكونة من بسط ومقام فإننا نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أس للمتغير س .

مع ملاحظة أن $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$ حيث ن عدد حقيقي موجب .

فمثلا : $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{\infty} = \text{صفر}$ ، $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}^{٢}} = \frac{١}{\infty} = \text{صفر}$

$$، \quad \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} = \text{صفر} \quad .$$

أمثلة

١) اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٤\text{س} + ٣}{٢\text{س} + ٥}$

الحل

نلاحظ أن الدالة مكونة من بسط ومقام $\therefore$ نقسم البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر اس وهو س . ثم الاختصار .

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\frac{٤\text{س}}{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}}}{\frac{٢\text{س}}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٤ + \frac{٣}{\text{س}}}{٢ + \frac{٥}{\text{س}}} = \dfrac{٤ + \frac{٣}{\infty}}{٢ + \frac{٥}{\infty}} = \dfrac{٤ + ٠}{٢ + ٠} = ٢$$

٢) أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^٣ + ٢\text{س} - ١}{٩ - ٢\text{س} - ٣\text{س}^٣}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على $\text{س}^٣$.

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٣} + \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٣}}{\frac{٩}{\text{س}^٣} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٣} - \frac{٣\text{س}^٣}{\text{س}^٣}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{١ + \frac{٢}{\text{س}^٢} - \frac{١}{\text{س}^٣}}{\frac{٩}{\text{س}^٣} - \frac{٢}{\text{س}^٢} - ٣}$$

$$= \dfrac{١ + \frac{٢}{\infty} - \frac{١}{\infty}}{\frac{٩}{\infty} - \frac{٢}{\infty} - ٣} = \dfrac{١ + ٠ - ٠}{٠ - ٠ - ٣} = \dfrac{١}{-٣} = \dfrac{-١}{٣}$$

٣) اوجد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س}^٣ + ١}{٢\text{س}^٢ + ١}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على اكبر أس وهو $\text{س}^٣$ ، والاختصار .

$$\therefore \ \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}^{2}}{\text{س}^{3}} - \frac{3\text{س}^{3}}{\text{س}^{3}} + \frac{1}{\text{س}^{3}}}{\frac{2\text{س}^{2}}{\text{س}^{3}} + \frac{1}{\text{س}^{3}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{1}{\text{س}} - 3 + \frac{1}{\text{س}^{3}}}{\frac{2}{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}^{3}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\infty} - 3 + \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{0 - 3 + 0}{0 + 0} = \frac{-3}{0} = -\infty \quad \text{(النهاية ليس لها وجود)}$$

∴ النهاية ليس لها وجود . (لاحظ ان درجة البسط اعلى من درجة المقام) .

٤) اوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{2}+4}{2\text{س}^{4}+2\text{س}}$ ؟

الحل

بقسمة البسط والمقام على اكبر اس وهو س^{4}

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س}^{2}}{\text{س}^{4}} + \frac{4}{\text{س}^{4}}}{\frac{2\text{س}^{4}}{\text{س}^{4}} + \frac{2\text{س}}{\text{س}^{4}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{1}{\text{س}^{2}} + \frac{4}{\text{س}^{4}}}{2 + \frac{2}{\text{س}^{3}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{2 + \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1}$$

$$\therefore \ \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{2}+4}{2\text{س}^{4}+2\text{س}} = \text{صفر} .$$

ملاحظات :

أ) إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقلم فان $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}$ د(س) = عدد حقيقي ≠ صفر .

ب) إذا كانت درجة البسط $<$ درجة المقلم فان $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}$ د(س) = صفر .

جـ) إذا كانت درجة البسط $>$ درجة المقلم فان $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}$ د(س) غير معرفة (ليس لها وجود) .

٥) اوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{2\text{س} + \sqrt{\text{س}} + 1}{1 - \text{س}}$

الحل

بقسمة البسط والمقام على س $\therefore$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{2س}{س} + \frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{1}{س}}{\frac{1}{س} - \frac{س}{س}}$$

$$= \frac{\frac{2}{1} + \frac{1}{\sqrt{س}} + \frac{1}{س}}{\frac{1}{س} - \frac{1}{1}} = \frac{2 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{2 + 0 + 0}{0 - 1} = \frac{2}{-1}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{2س + \sqrt{س} + 1}{1 - س} = -2$$

٦) اوجد $\lim_{س \to \infty} \dfrac{3س + 2س\sqrt{س} + 3}{5س + 3س\sqrt{س} - 1}$

الحل

لاحظ أن اكبر أس للمتغير س هو س $\sqrt{س}$ أي $(س)^{\frac{3}{2}}$

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{3س}{س\sqrt{س}} + \frac{2س\sqrt{س}}{س\sqrt{س}} + \frac{3}{س\sqrt{س}}}{\frac{5س}{س\sqrt{س}} + \frac{3س\sqrt{س}}{س\sqrt{س}} - \frac{1}{س\sqrt{س}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{\infty} + 2 + \frac{3}{\infty}}{\frac{5}{\infty} + 3 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0 + 2 + 0}{0 + 3 - 0} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{3س + 2س\sqrt{س} + 3}{5س + 3س\sqrt{س} - 1} = \frac{2}{3}$$

٧) اوجد $\lim_{س \to \infty} \dfrac{\sqrt{1 + س^3}}{2س + 3}$

الحل

لاحظ أن اكبر أس للمتغير هو (س) حيث أن $\sqrt{\text{س}^{2}} = \text{س}$.

بقسمة البسط و المقام على

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{\sqrt{\text{١} + \text{س}^{2}}}{\text{س}}}{\frac{\text{٢س}}{\text{س}} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{\sqrt{\text{١} + \text{س}^{2}}}{\sqrt{\text{س}^{2}}}}{\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\frac{\text{١}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{\text{س}^{2}}}}{\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}}$$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\frac{\text{١}}{\text{س}^{2}} + \text{١}}}{\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{س}}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{١}}{\infty} + \text{١}}}{\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\infty}} = \frac{\sqrt{\text{١}}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{١} + \text{س}^{2}}}{\text{٢س} + \text{٣}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

٨) اوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{٥} - \text{٣س}}{\sqrt{\text{٤س}^{2} + \text{٢س} - \text{١}}}$ ؟

الحل

اكبر أس للمتغير س ه[$\text{س} = \sqrt{\text{س}^{2}}$] بقسمة البسط على س والمقلم على $\sqrt{\text{س}^{2}}$

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{٥}}{\text{س}} - \frac{\text{٣س}}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{\text{٤س}^{2}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{٢س}}{\text{س}^{2}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{2}}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{٥}}{\text{س}} - \text{٣}}{\sqrt{\text{٤} + \frac{\text{٢}}{\text{س}} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{2}}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{٥}}{\infty} - \text{٣}}{\sqrt{\text{٤} + \frac{\text{٢}}{\infty} - \frac{\text{١}}{\infty}}} = \frac{\text{٠} - \text{٣}}{\sqrt{\text{٤} + \text{٠}}} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{٥} - \text{٣س}}{\sqrt{\text{٤س}^{2} + \text{٢س} - \text{١}}} = \frac{-\text{٣}}{\text{٢}}$$

٩) اوجد $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س - ١}}{\frac{١}{س} + ١} \times \dfrac{\sqrt{س + ١}}{(س + ١)}$ ؟

الحل

بضرب المقادير الجبرية التي في البسط والمقام :

$\sqrt{س - ١} \times \sqrt{س + ١} = \sqrt{(س - ١)(س + ١)}$ البسـط $= \sqrt{س^٢ - ١}$

المقام $= \left(\frac{١}{س} + ١\right)(س - ١) = ١ - \frac{١}{س} + س - ١ = س - \frac{١}{س}$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ١}}{س - \frac{١}{س}}$ بقسمة البسط والمقام على اكبر اس للمتغير وهو س

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\frac{س^٢}{س^٢} - \frac{١}{س^٢}}}{\frac{س}{س} - \frac{\frac{١}{س}}{س}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{١ - \frac{١}{س^٢}}}{١ - \frac{١}{س^٢}}$

$= \dfrac{\sqrt{١ - \infty}}{١ - \infty} = \dfrac{\sqrt{١}}{١} = ١$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س - ١}}{\frac{١}{س} + ١} \times \dfrac{\sqrt{س + ١}}{(س + ١)} = ١$

١٠) اوجد $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{س^٢ + ٣س} - س$

الحل

عند التعويض المباشر نجد أن د $(\infty) = \infty - \infty$ وهي كمية غير معرفة .

نلاحظ أن هذه الدالة تحتوي على كسور و هي مكونة من بسط فقط .

∴ بضرب المقدار في مرافقه حتى يتكون بسط ومقام للدالة .

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} - \text{س}\right) \times \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} + \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) - (\text{س}^{٢})}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} + \text{س}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} + \text{س}}$$

بقسمة كلا من البسط والمقام على س . $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٣\text{س}}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} + \frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢}}} + \frac{\text{س}}{\text{س}}}$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{\sqrt{١ + \frac{٣}{\text{س}}} + ١} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{\sqrt{١ + ٠} + ١} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} - \text{س} = \frac{٣}{٢}$$

١١) اوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س}}$ ؟

الحل

نحول الدالة إلى بسط و مقام بضربها في المرافق .

$$\therefore \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س}}\right) \times \frac{\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}}$$

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + \sqrt{\text{س}}) - (\text{س})}{\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} + \sqrt{\text{س}}}$$

بقسمة البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر آس وهو $\sqrt{\text{س}}$.

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}} + \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}} = \lim_{\text{س} \to \infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}} - \sqrt{\text{س}} = \frac{1}{2}$$

ثالثا : إذا كانت الدالة المراد إيجاد نهايتها هي دالة اسية (غير جبرية) والتي يكون فيها الأساس ثابت والأس متغير فإننا نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس للمتغير س مع ملاحظة أن :

* $\lim_{\text{س} \to \infty} (1)^{\text{س}} = (1)^{\infty} = 1$

* $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} =$ صفر، إذا كان أ < ب (أي إذا كان الكسر اقل من الواحد)

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{\text{س}} =$ صفر .

* $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\infty} = \infty$ ، إذا كان أ > ب (أي إذا كان الكسر اكبر من الواحد)

فمثلا $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{\text{س}} = \infty$.

لاحظ ان $\frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{ب}^{\text{س}}} = \left(\frac{\text{أ}}{\text{ب}}\right)^{\text{س}}$.

مثال

اوجد $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢ \times ٥^{س} + ٤ \times ٣^{س}}{٥^{س} + ٧ \times ٣^{س}}$ ؟

الحل :

نلاحظ ان هذه الدالة اسية حيث أن الأس متغير .

∴ نقسم كلا من البسط والمقام على الحد المشتمل على اكبر أساس وهو ($٥^{س}$) .

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times \left(\frac{٥^{س}}{٥^{س}}\right) + ٤ \times \frac{٣^{س}}{٥^{س}}}{\left(\frac{٥^{س}}{٥^{س}}\right) + ٧ \times \frac{٣^{س}}{٥^{س}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times ١ + ٤ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س}}{١ + ٧ \times \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س}}$$

نلاحظ ان $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} =$ صفر . $\dfrac{٢ \times ١ + ٤ \times ٠}{١ + ٧ \times ٠} = \dfrac{٢}{١} = ٢$.

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times ٥^{س} + ٤ \times ٣^{س}}{٥^{س} + ٧ \times ٣^{س}} = ٢$$

مثال :

اوجد $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢^{س} + ٥ \times ٣^{س} + ٧^{٣}}{٦ \times ٢^{س} + ١٠ \times ٣^{س}}$

الحل :

نجد ان الحد المشتمل على اكبر اساس هو $(٣)^{س}$ حيث ان $(٧)^{٣}$ يعتبر ثابتا .

$$\therefore \lim_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\frac{٢^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} + ٥\times\frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} + \frac{٧^٣}{٣^{\text{س}}}}{٦\times\frac{٢^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}} + ١٠\times\frac{٣^{\text{س}}}{٣^{\text{س}}}} = \lim_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} + ٥ + \frac{٧^٣}{٣^{\text{س}}}}{٦\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}} + ١٠}$$

لاحظ ان $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}$ = صفر

$$= \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} + ٥ + \frac{٧^٣}{\infty}}{٦\times\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} + ١٠} = \frac{٠+٥+٠}{٦\times٠+١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{٢^{\text{س}} + ٥\times٣^{\text{س}} + ٧^٣}{٦\times٢^{\text{س}} + ١٠\times٣^{\text{س}}} = \frac{١}{٢}$$

مثال :

اوجد $\lim_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{٦\times٢^{\text{س}+١} + ٥\times٣^{\text{س}+٢}}{٢^{\text{س}+٢} + ١٠\times٣^{\text{س}+١}}$

الحل :

قبل البدء في حل المثال تذكر ان :

$٢^{ن+١} = ٢^{ن} \times (٢)^١ = ٢\times٢^{ن}$

$٢^{ن+٢} = ٢^{ن}\times(٢)^٢ = ٤\times٢^{ن}$

$٣^{ن+٢} = (٣)^٢ \times ٣^{ن} = ٩\times٣^{ن}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{٦\times٢^{\text{س}}\times٢ + ٥\times٩\times٣^{\text{س}}}{٤\times٢^{\text{س}} + ١٠\times٣\times٣^{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \leftarrow \infty} \frac{١٢\times٢^{\text{س}} + ٤٥\times٣^{\text{س}}}{٤\times٢^{\text{س}} + ٣٠\times٣^{\text{س}}}$$

بقسمة البسط والمقام على اكبر أس وهو $(٣^{ن})$.

$$\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{١٢ \times \frac{٢^{س}}{٣^{س}} + ٤٥ \times \frac{٣^{س}}{٣^{س}}}{٤ \times \frac{٢^{س}}{٣^{س}} + ٣٠ \times \frac{٣^{س}}{٣^{س}}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} \times ١٢ + ٤٥ \times ١}{٤ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} + ٣٠ \times ١}$$

$$\frac{١٢ \times ٠ + ٤٥}{٤ \times ٠ + ٣٠} = \frac{٤٥}{٣٠} = \frac{٣}{٢}$$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٦ \times ٢^{س+١} + ٥ \times ٣^{س+٢}}{٢^{س+٢} + ١٠ \times ٣^{س+١}} = \frac{٣}{٢}$$

مثال :

اوجد $\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٢ \times (٩)^{س+١} + ٣ \times (٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١} + ٥ \times (٤)^{س}}$

الحل :

لاحظ أن $(٩)^{س+١} = (٣^{٢})^{س+١} = (٣)^{٢س+٢}$

$(٤)^{س} = (٢^{٢})^{س} = (٢)^{٢س}$

$$\therefore \underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٢ \times (٣)^{٢س+٢} + ٣ \times (٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١} + ٥ \times (٢)^{٢س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{٢ \times (٣)^{٢} \times (٣)^{٢س} + ٣ \times (٢)^{٢س}}{(٣)\,(٣)^{٢س} + ٥ \times (٢)^{٢س}}$$

بالقسمة على الحد المشتمل على اكبر أساس وهو $(٣)^{٢س}$.

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{١٨ \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}} + ٣ \times \frac{٢^{٢س}}{٣^{٢س}}}{٣ \times \frac{٣^{٢س}}{٣^{٢س}} + ٥ \times \frac{٢^{٢س}}{٣^{٢س}}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{١٨ \times ١ + ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢س}}{٣ \times ١ + ٥ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢س}} = \frac{١٨ + ٣ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}}{٣ + ٥ \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty}}$$

، لاحظ ان

$$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\infty} = \text{صفر}$$

$$= \frac{١٨ + ٠}{٣ + ٠} = \frac{١٨}{٣} = ٦$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٢ \times (٩)^{س+١} + ٣ \times (٢)^{٢س}}{(٣)^{٢س+١} + ٥ \times (٤)^{س}} = ٦$$

مثال :

اوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{(٥)^{س+٣}}{(٢٥)^{س+١}}$ ؟

الحل :

لاحظ ان : $(٢٥)^{س+١} = (٥^{٢})^{س+١} = (٥)^{٢س+٢}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٥)^{\text{س}} \times (٥)^{٣}}{(٥)^{٢\text{س}} \times (٥)^{٢}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٥)^{-\text{س}} \times ١٢٥}{٢٥}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} ٥ \times (٥)^{-\text{س}} = ٥ \times (٥)^{-\infty} = \text{صفر}$$ ، لاحظ أن $(٥)^{-\infty} = \text{صفر}$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٥)^{\text{س}+٣}}{(٢٥)^{\text{س}+١}} = \text{صفر}$$

مثال :

اوجد $\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{(٧)^{\text{س}+٢}}}{(٧)^{\text{س}-١}}$

الحل :

بتبسيط البسط وذلك بتحويل الجذر الى اس :

$$\sqrt{(٧)^{\text{س}+٢}} = (٧)^{\frac{\text{س}+٢}{٢}} = (٧)^{\frac{\text{س}}{٢}+١}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٧)^{\frac{\text{س}}{٢}+١}}{(٧)^{\text{س}-١}} = \lim_{\text{س} \to \infty} (٧)^{\frac{\text{س}}{٢}+١-\text{س}+١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} (٧)^{\frac{-\text{س}}{٢}+٢} = \lim_{\text{س} \to \infty} (٧)^{-\frac{\text{س}}{٢}+٢} \times (٧)^{٢}$$

$$= (٧)^{-\infty} \times ٤٩ = \text{صفر}$$

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{(7)^{س+1}}}{(7)^{س-1}} = \text{صفر}$$

مثال :

اذا كانت $د(س) = \frac{أ \times 3^{س} + ب \times 3^{2س}}{جـ \times 3^{س} + د \times 3^{2س}}$ فاوجد :

(١) $\lim_{س \to 0} د(س)$ ، (٢) $\lim_{س \to \infty} د(س)$

الحل :

(١) $\lim_{س \to 0} د(س) = \lim_{س \to 0} \frac{أ \times 3^{س} + ب \times 3^{2س}}{جـ \times 3^{س} + د \times 3^{2س}}$

$$= \frac{أ \times (3)^{0} + ب \times (3)^{0}}{جـ \times (3)^{0} + د \times (3)^{0}}$$

$$\therefore \lim_{س \to 0} د(س) = \frac{أ + ب}{جـ + د}$$

(٢) $\lim_{س \to \infty} د(س) = \lim_{س \to \infty} \frac{أ \times 3^{س} + ب \times 3^{2س}}{جـ \times 3^{س} + د \times 3^{2س}}$

بقسمة البسط والمقلم على الحد المشتمل على اكبر أساس واس وهو $(3)^{2س}$.

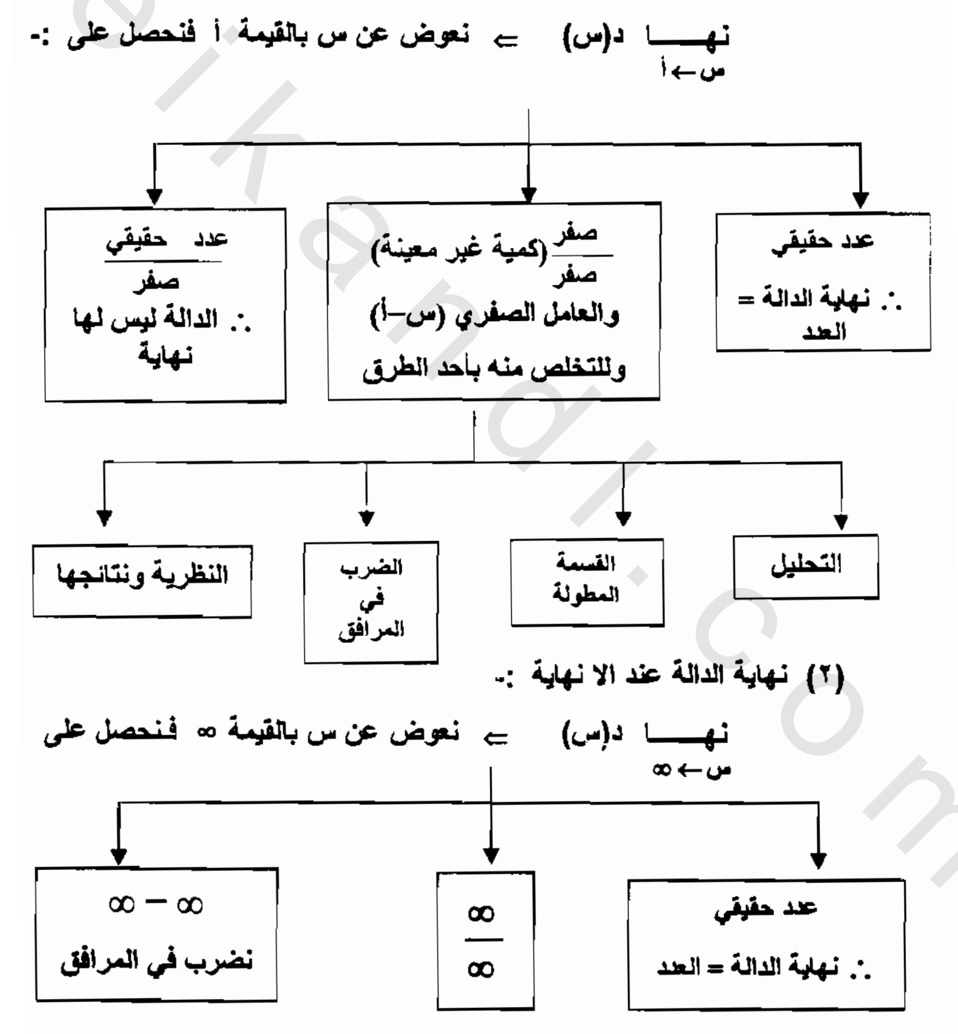
$$\lim_{س \to \infty} \frac{أ \times \frac{3^{س}}{3^{2س}} + ب \times \frac{3^{2س}}{3^{2س}}}{جـ \times \frac{3^{س}}{3^{2س}} + د \times \frac{3^{2س}}{3^{2س}}} = \lim_{س \to \infty} \frac{أ \times \left(\frac{1}{3}\right)^{س} + ب}{جـ \times \left(\frac{1}{3}\right)^{س} + د}$$

$$= \frac{\text{أ}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}+\text{ب}}{\text{جـ}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty}+\text{د}} = \frac{\text{أ}\times(0)+\text{ب}}{\text{جـ}\times(0)+\text{د}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \text{د(س)} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$$

الخلاصة

(١) نهاية الدالة الكسرية :-



القسمة على اكبر اساس مرفوع لأس (س) في المقام	القسمة على (س) مرفوعة لأكبر أس في المقام

تمرين (١)

<u>المجموعة الأولى :</u>

اوجد:

(١) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \left(\text{س}^{2} - 4\text{س} + 3\right)$

(٢) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{2\text{س}}{\text{س}^{2}+4}$

(٣) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{2}-9}{\text{س}-3}$

(٤) $\underset{\text{س}\to 4}{\text{نها}} \frac{\text{س}-4}{\text{س}^{2}-\text{س}-12}$

(٥) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}-27}{\text{س}^{2}-9}$

(٦) $\underset{\text{س}\to 7}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{2}-49}{\text{س}^{2}-9\text{س}+14}$

(٧) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{2}-9}{\text{س}^{2}-7\text{س}+12}$

(٨) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}-1}{\text{س}^{2}+2-3}$

(٩) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}-1}{\text{س}-1}$

(١٠) $\underset{\text{س}\to 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}+27}{\text{س}+3}$

(١١) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}+7\text{س}}{\text{س}}$

(١٢) $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نها}} \frac{2\text{س}^{2}-\text{س}}{2\text{س}^{2}+\text{س}}$

(١٣) $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{2}+\text{س}+10^{9}}{\text{س}^{3}+9}$

(١٤) $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}+8}{12\text{س}^{2}+9}$

(١٥) $\underset{\text{ن}\to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{ن}^{2}+3\text{ن}+1000}{2\text{ن}^{2}+\text{ن}+7}$

(١٦) $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{3}+9\text{س}}{3\text{س}^{3}-7\text{س}+4}$

(١٧) $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نها}} \frac{3\text{س}-2}{9\text{س}+7}$

(١٨) $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نها}} \frac{6\text{س}^{2}+2\text{س}+1}{6\text{س}^{2}-3\text{س}+7}$

(١٩) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢+س-٢}{٤س^٣-١}$ (٢٠) $\lim_{س \to \infty} \frac{٢س^٢}{س^٢+١}$

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٤+س^٣-س^٢-٥س+٤}{س^٣-س^٢-س+١}$ (٢٢) $\lim_{ن \to \infty} (\frac{٣}{٥})^ن$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{أ س^٤ + ب س^٢ + جـ}{ءس^٥ + هـ س^٣ + و س}$

(٢٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(٢ - ٣س)^٢ - ٤}{٣ س}$ (٢٦) $\lim_{ن \to \infty} \frac{٣^ن - ٢\times٥^ن + ٢\times٧^ن}{٢^ن + ٨ \times ٣^ن + ٥\times٧^ن}$

(٢٧)اوجد $ح_ن$ في المتسلسلة: $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٥} + \frac{٥}{٨} + \dots\dots$

ثم اثبت أن $\lim_{ن \to \infty} ح_ن = \frac{٢}{٣}$

(٢٨)اثبت أن مجموع المتسلسلة اللانهائية الآتية هو الواحد الصحيح :

$$د(س) = \frac{س^٢}{س^٢+١} + \frac{س^٢}{[س^٢+١]^٢} + \frac{س^٢}{[س^٢+١]^٣} + \dots\dots\dots$$

اوجد د(٠) ، $\lim_{س \to ٠}$ د(س) لترى أن د(٠) $\neq$ $\lim_{س \to ٠}$ د(س)

<u>المجموعة الثانية :</u>

اوجد:

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٦-٦٤}{س-٢}$ (٢) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢-١}{س-١}$

(٣) $\lim_{س \to \frac{١}{٣}} \frac{٢٧س^٣-١}{٣س-١}$ (٤) $\lim_{س \to \frac{١}{٥}} \frac{٦٢٥س^٤-١}{٥س-١}$

(٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{(١+س)^٢-١}{س}$ (٦) $\lim_{ص \to ٠} \frac{(ص+٨)^{\frac{١}{٣}}-٢}{ص}$

(٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{س^{م} - ب^{م}}{س^{ن} - ب^{ن}}$ (٨) $\lim\limits_{و \to ٠} \dfrac{(س + و)^{٤} - س^{٤}}{(س + و) - س}$

(٩) من تعريف النهاية اثبت ان :

$\lim\limits_{س \to ١} (٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٢٤س + ٢٢) = ٤$

<u>اوجد</u> <u>$\lim\limits_{و \to ٠}$ د(و) في كل من الحالات الآتية</u> :

(١٠) $د(و) = \dfrac{\sqrt{٣ + و} - \sqrt{و}}{و}$ (١١) $د(و) = \dfrac{(٢+و)^{٣} - ٨}{و}$

(١٢) $د(و) = \dfrac{(٢+و)^{٣} - ٤}{و}$ (١٣) $د(و) = \dfrac{(س+و)^{٢} - س^{٢}}{و}$

(١٤) $د(و) = \dfrac{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{س+و}}{و}$

اوجد $\lim\limits_{و \to ٠} \dfrac{د(س+و) - د(س)}{و}$ في كل من الحالات الآتية :

(١٥) $د(س) = ٢س^{٢}$ (١٦) $د(س) = \dfrac{١}{٤} س^{٣}$

(١٧) $د(س) = \dfrac{١}{س}$ (١٨) $د(س) = س^{٤}$

(١٩) $د(س) = \sqrt{س}$ (٢٠) $د(س) = س^{٢} - ٣س$

اوجد كلا من النهايات الآتية :

(٢١) $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{١}{(س - ٢)^{٣}}$

(٢٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س}{س + ١}$

(٢٣) $$\text{نها}_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{١}}$$

(٢٤) $$\text{نها}_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}}{(\text{س} - \text{٢})^{\text{٢}}}$$

(٢٥) $$\text{نها}_{\text{و}\to\text{٠}} \frac{\sqrt{\text{٥س} + \text{٣و}} - \sqrt{\text{٥س}}}{\text{٢و}}$$

(٢٦) $$\text{نها}_{\text{س}\to\text{٢}} \frac{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}{\text{٣} - \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٥}}}$$

(٢٧) $$\text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ن} + \text{١}}{\text{ن}}$$

(٢٨) $$\text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \frac{(\text{ن} + \text{١})(\text{٢ن} + \text{١})}{\text{ن}^{\text{٢}}}$$

(٢٩) $$\text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \frac{(\text{ن} + \text{١})(\text{٢ن} + \text{١})(\text{٣ن} + \text{١})}{\text{ن}^{\text{٣}}}$$

(٣٠) $$\text{نها}_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} - \text{٣٢}}{\text{س} - \text{٨}}$$

(٣١) $$\text{نها}_{\text{س}\to\text{١}} \frac{\sqrt[\text{م}]{\text{س}} - \text{١}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} - \text{١}}$$

(٣٢) $$\text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{١} + \text{٢} + \text{٣} + \cdots + \text{ن}}{\text{ن}^{\text{٢}}}$$

(٣٣) $$\text{نها}_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{١} + \text{٢} + \text{٥} + \cdots + (\text{٢ن} - \text{١})}{\text{ن}^{\text{٢}} + \text{٤}}$$

(٣٤) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ن}}{١ + ٥ + ٩ + \cdots + (٤\text{ن} - ٣)}$$

(٣٥) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + \text{ن}^٢}{١ + ٢ + ٣ + \cdots + \text{ن}}$$

(٣٦) $$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \cdots + \text{ن}^٢}{١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \cdots + \text{ن}^٣}$$

(٣٧) $$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\overset{\infty}{\underset{١}{\text{مجـ}}} \text{س}^٢}{(٢\text{س} + ٣) \overset{\infty}{\underset{١}{\text{مجـ}}} \text{س}}$$

نهاية الدوال المثلثية

مفاهيم أساسية

١- $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حاس}{س} = ١$

٢- $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طاس}{س} = ١$

٣- $\lim\limits_{س \to ٠} جتاس \neq ١$

٤- $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا^{ن}(م\,س)}{(م\,س)^{ن}} = ١$

٥- $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طا^{ن}(م\,س)}{(م\,س)^{ن}} = ١$

٦- $١ - جتا\,س = ٢\,جا^{٢}\frac{س}{٢}$

٧- $١ - جتا\,٢\,س = ٢\,جا^{٢}\,س$

٨- $١ - جتا٤س = ٢\,جا^{٢}\,٢\,س$

أمثلة

١) $\lim\limits_{س \to ط} \frac{حاس}{س} =$ ٢٠٠ (١ ، ١- ، ٥)

$\lim\limits_{س \to ط} \frac{حاط}{ط}$ ٥ $\Leftarrow \lim\limits_{س \to ط} \frac{حاس}{س} = ٠$

٢) <u>أوجد</u> $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{س\,قتا\,س}$ ؟!

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{1}{\text{س قتا س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = 1$$

٣) **أوجد** $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س} + \text{طا س}}{\text{س}}$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س} + \text{طا س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{س}} + \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س} + \text{طا س}}{\text{س}} = 2$$

٤) **أوجد** $\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2\, 3\text{س}}{\text{س}^2}$ ؟!

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2 (3\text{س})}{\text{س}^2} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2\, 3\text{س}}{\left(\frac{\text{س}}{3}\right)^2}$$

$$= 9 \times 1 \Leftarrow \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}^2 (3\text{س})}{\text{س}^2} = 9$$

٥) $\lim_{\text{س}\to 0} 5\,\text{و قتا و} = 5 \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{و}}{\text{حا و}} = 5 \times 1$

$$\lim_{\text{س}\to 0} 5\,\text{و قتا و} = 5$$

٦) **أوجد** $\lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{جا}(\text{س}-2)}{7\text{س} - 14} = \frac{1}{7} \lim_{\text{س}\to 2} \frac{\text{جا}(\text{س}-2)}{\text{س} - 2}$

$$\frac{١}{٧}\ \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا(س-٢)}}{\text{٧س - ١٤}} = \frac{١}{٧}$$

٧) **أوجد** $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^{٢}\text{ - ٦س + ٩}}{\text{طا}^{٢}\text{(س - ٣)}}$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{المقدار = نها}\ \frac{\text{(س − ٣)}^{٢}}{\text{طا}^{٢}\text{(س - ٣)}} = ١$$

٨) $\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{طا (س − ٣)}}{\text{س}^{٣}\text{ - ٢٧}}$ ؟!

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{المقدار} = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{طا (س − ٣)}}{\text{(س -٣) (س}^{٢}\text{ + ٣ س + ٩}}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{المقدار} = \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{\text{طا (س − ٣)}}{\text{(س -٣)}} \times \underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \frac{١}{\text{(س}^{٢}\text{ + ٣ س + ٩)}}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٣}{\text{نها}}\ \text{المقدار} = \frac{١}{٢٧}$$

٩) **أوجد** $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{١ − حتا س}}{\text{س}^{٢}}$

$$\text{١ − حتا = ٢ جا}^{٢}\ \frac{\text{س}}{٢}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \text{المقدار} = \frac{\text{٢جا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)}{\left(٢\times\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}}$$

$$٢\times\frac{١}{٤}\ \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{٢حا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)}{\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢}} = ٢ \times\frac{١}{٤} \times ١ = \frac{١}{٢}$$

١٠) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{حتا ٢ س}}{٣\text{س}^{٢}} = \frac{١}{٣} \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \text{طا}^{٢}\text{س} - \text{حتا٢س}}{\text{س}^{٢}}$

$\frac{١}{٣} \left[\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; ١ - \text{حتا٢س} + \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} \right] = \frac{١}{٣} \left[\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; ٢ \frac{\text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} + ١ \right]$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; \text{المقدار} = \frac{١}{٣} \left(٢ + ١ \right) = ١$

١١) <u>أوجد</u> $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{قتا هـ} - \text{ظتا هـ}}{\text{هـ}}$ ؟!

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; \text{المقدار} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{\text{جا هـ}} - \frac{\text{جتا هـ}}{\text{حا هـ}}}{\text{هـ}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{حتا هـ}}{\text{هـ جا هـ}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{حا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢}}{\text{هـ} \times \text{حا} \frac{\text{هـ}}{٢} \; \text{حتا} \frac{\text{هـ}}{٢}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا} \frac{\text{هـ}}{٢}}{٢ \times \frac{\text{هـ}}{٢}} = \frac{١}{٢}$ $\quad$ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{طا} \frac{\text{هـ}}{٢}}{\frac{\text{هـ}}{٢}} = \frac{١}{٢}$

١٢) <u>أوجد</u> $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{حتا ٢ س} - ٢\text{حتا س} + ١}{\text{س}^{٢}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; \text{المقدار} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\text{حتا}^{٢}\text{س} - ١ - ٢\text{حتاس} + ١}{\text{س}^{٢}}$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; \text{المقدار} = -٢ \left[\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} \; \text{حتاس} \times \text{نها} \; \frac{١ - \text{حتا س}}{\text{س}^{٢}} \right]$

نها المقدار = -٢ $[\,١ \times \frac{١}{٢}\,]$ ⇐ نها المقدار = - ١

(س ← ٠)

١٣) **أوجد** نها (س ← $\frac{ط}{٦}$) $\dfrac{\sqrt{٣}\ \text{جا س} - \text{حتا س}}{\text{س} - \frac{ط}{٦}}$

جا (س - $\frac{ط}{٦}$) = جا س حتا $\frac{ط}{٦}$ - حتا س حا $\frac{ط}{٦}$

حا (س - $\frac{ط}{٦}$) = حا س × $\sqrt{\frac{٣}{٢}}$ - حتا س × $\frac{١}{٢}$

حا (س - $\frac{ط}{٦}$) = $\sqrt{٣}$ حا س -- حتا س (البسط)

نها (س ← $\frac{ط}{٦}$) المقدار = نها (س - $\frac{ط}{٦}$ ← ٠) $\dfrac{\text{حا (س - } \frac{ط}{٦} \text{)}}{\text{س} - \frac{ط}{٦}}$ × ٢

نها (س - $\frac{ط}{٦}$ ← ٠) المقدار = ٢

١٤) **أوجد** نها (س ← ٠) $\dfrac{١ - \text{حتاس}}{\text{س}}$!؟

نها (س ← ٠) المقدار = نها (س ← ٠) $\dfrac{٢\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}$ ⇐ ٢ نها (س ← ٠) ٢٠٠٦/٠٧/٢٩ $\dfrac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}}$ × جا $\frac{\text{س}}{٢}$

نها (س ← ٠) المقدار = ٢ نها (س ← ٠) $\dfrac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{٢ \times \frac{\text{س}}{٢}}$ × حا ٠

$\lim_{س \to ٠}$ المقدار = ١ × ٠ = ٠

١٥) **أوجد** $\lim_{ص \to ٠} \frac{طا^{٢} ص}{ص\ حا\ ص}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على $ص^{٢}$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{طا^{٢} ص}{ص\ حا\ ص} = \lim_{ص \to ٠} \frac{طا^{٢} ص}{ص^{٢}} + \lim_{ص \to ٠} \frac{ص\ حا\ ص}{ص^{٢}}$$

$$\lim_{ص \to ٠} \frac{طا^{٢} ص}{ص\ حا\ ص} = ١$$

١٦) **أوجد** $\lim_{س \to ٠} \frac{٣\ س - حا\ س}{طا\ س + س}$ ؟!

بقسمة حدود الكسر على س :

$$\lim_{س \to ٠} \text{المقدار} = \frac{\lim_{س \to ٠} \frac{٣ س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{حا . س}{س}}{\lim_{س \to ٠} \frac{طا . س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س}} = \frac{٣ - ١}{١ + ١} \Leftarrow \lim_{س \to ٠} \text{المقدار} = ١$$

١٧) **أوجد** $\lim_{س \to ٠} \frac{طا(حاس)}{س}$ ؟!

$$\lim_{س \to ٠} \text{المقدار} = \lim_{س \to ٠} \frac{طا(حاس)}{س} \times \frac{حا\ س}{حا\ س}$$

$$\lim_{س \to ٠} \text{المقدار} = \lim_{س \to ٠} \frac{طا\ حا\ س}{حا\ س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{حا\ س}{س} = ١$$

١٨) **أوجد** $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{\text{حا س}}{\sqrt[3]{\text{س}}}$ ؟

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا س}}{\sqrt[3]{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا.س}}{\text{س}^{\frac{1}{3}}} \times \frac{\text{س}^{\frac{2}{3}}}{\text{س}^{\frac{2}{3}}}$$

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا.س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ س}^{2/3}$$

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = 1 \times 0 = 0$$

١٩) **أوجد** $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \dfrac{-4\text{طا}^2\text{س}}{2\text{حتاس} - \sqrt{4\text{سحاس} + 4}}$

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{-4\text{طا}^2\text{س}}{2\text{حتاس} - \sqrt{4\text{سحاس} + 4}} \times \frac{2\text{حتاس} + \sqrt{4\text{س حاس} + 4}}{2\text{حتاس} + \sqrt{4\text{س حاس+س}}}$$

(المرافق)

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} = -4 \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{طا}^2\text{س} \left(2\text{حتا س} + \sqrt{4\text{س حا س} + 4}\right)}{4\text{حتا}^2 - 4\text{س حاس} - 4}$$

(بأخذ ٤ عامل مشترك) ، $(\text{حتا}^2\text{س} - 1) = -\text{حا}^2\text{س}$

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = -\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{طا}^2\text{س} \left(2\text{حتا س} + \sqrt{4\text{س حا س} + 4}\right)}{-(\text{حا}^2\text{س} + \text{س حا س})}$$

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = 1 \times \frac{2\text{حتا}0 + \sqrt{4 \times 0 + 4}}{1 + 1}$$

$$\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = 2$$

٢١) **أوجد** $\underset{س \to \frac{ط}{٣}}{نها} \dfrac{\text{حا س طا س} - \sqrt{٣}\,\text{طا س حتا س} - \sqrt{٣}\,\text{حا س} + ٣\,\text{حتا س}}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{طا س})(س - \frac{ط}{٣})^{٢}}$

$\underset{س \to \frac{ط}{٣}}{نها} \text{ المقدار } \dfrac{\text{حا س}(\text{طا س} - \sqrt{٣}) - \sqrt{٣}\,\text{حتا س}(\text{طا س} - \sqrt{٣})}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{طا س})(س - \frac{ط}{٣})^{٢}}$

$= \underset{س \to \frac{ط}{٣}}{نها} \dfrac{\text{طاس} - \sqrt{٣}}{(١ + \sqrt{٣}\,\text{طا س})(س - \frac{ط}{٣})} \times \underset{س \to \frac{ط}{٣} ، ٠}{نها} \dfrac{\sqrt{٣}\,\text{حتا س} - \text{حا س}}{\frac{ط}{٣} - س}$

$\text{طا}(س - \frac{ط}{٣}) = \dfrac{\text{طا س} - \text{طا}\frac{ط}{٣}}{١ + \text{طا س طا}\frac{ط}{٣}}$ ، $\text{جا}(س - \frac{ط}{٣}) = \text{حا س حتا}\frac{ط}{٣} - \text{حتاس حا}\frac{ط}{٣}$

$\text{حا}(س - \frac{ط}{٣}) = \frac{١}{٢}\,\text{حا س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,\text{حتا س}$

$٢\,\text{حا}(س - \frac{ط}{٣}) = \text{حا س} - \sqrt{٣}\,\text{حتا س}$

$\underset{س \to \frac{ط}{٣}}{نها} \text{ المقدار } = \underset{س \to \frac{ط}{٣} ، ٠}{نها} \dfrac{\text{طا}(س - \frac{ط}{٣})}{س - \frac{ط}{٣}} \times ٢ \underset{س \to \frac{ط}{٣} ، ٠}{نها} \dfrac{\text{حا}(س - \frac{ط}{٣})}{س - \frac{ط}{٣}}$

$\underset{س \to \frac{ط}{٣} ، ٠}{نها} \text{ المقدار } = ٢$

٢٢)**أوجد** $\underset{س \to \infty}{نها} \text{ س حا } \frac{١}{س}$ ؟!

بوضع $\frac{١}{س} = ص$ عندما $س \to \infty$

$ص = \frac{١}{\infty} \leftarrow ٠$

$\underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا ص}{ص} = ١$

٢٣) **أوجد** $\underset{س\leftarrow ص}{نها} \frac{حا س}{س - ص}$ ؟!

بوضع س ـ ص = ص عندما س ← ط

س = ص + ط ص ← ط

$\underset{س\leftarrow ط}{نها} \frac{حا س}{س - ص} = \underset{ص\leftarrow ٠}{نها} حا \frac{ص + ط}{ص}$

$\underset{س\leftarrow ط}{نها}$ المقدار $= \underset{ص\leftarrow ٠}{نها} \frac{حاص حتا ص + حتاص حا ط}{ص}$

$\underset{س\leftarrow ط}{نها}$ المقدار $= \underset{ص\leftarrow ٠}{نها} - \frac{حا ص}{ص} = -١$

٢٤) **أوجد** $\underset{س\leftarrow \frac{ط}{٢}}{نها} \frac{طتاس}{\frac{ط}{٢} - س}$ ؟!

بوضع $\frac{ط}{٢}$ - س = ص ، عندما س ← $\frac{ط}{٢}$

$\underset{س\leftarrow \frac{ط}{٢}}{نها}$ المقدار $= \underset{ص\leftarrow ٠}{نها} طتا \frac{\frac{ط}{٢} - ص}{ص}$

$\underset{س\leftarrow \frac{ط}{٢}}{نها}$ المقدار $= \underset{ص\leftarrow ٠}{نها} \frac{طا ص}{ص} = ١$

٢٥) **أوجد** $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}$ ؟!

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{-\text{س}}{\text{س}} = -1$$

ليس لها وجود

٢٦) **أوجد** $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{حا}\,\text{س}}{|\text{س}|}$ ؟!

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا}\,\text{س}}{|\text{س}|} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا}\,\text{س}}{\text{س}} = 1$$

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا}\,\text{س}}{-\text{س}} = -1$$

ليس لها وجود

٢٧) **أوجد** $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\text{هـ}^{\text{لو حا}^{2}\text{س}}}{\text{س}^{2}}$ ؟!

$\text{هـ}^{\text{لو د(س)}} = \text{د(س)} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س}\to 0}$ المقدار

$$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{حا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}} = 1$$

تذكر أن

١) $\text{حا أ} - \text{حا ب} = 2\,\text{حتا}\left(\dfrac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)\text{حا}\left(\dfrac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$

٢) $\text{حتا أ} - \text{حتاب} = -2\,\text{حا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$

٢٨) <u>أوجد</u> $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{4}+\text{هـ}\right)-\text{حا}\frac{\text{ط}}{4}}{\text{هـ}}$

$$\text{حا أ} - \text{حا ب} = 2\,\text{حتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\text{المقدار} = 2\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{4}+\frac{\text{هـ}}{2}+\frac{\text{ط}}{4}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{ط}}{4}+\frac{\text{هـ}}{2}-\frac{\text{ط}}{4}\right)}{\text{هـ}}$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\text{المقدار} = 2\left[\lim_{\text{هـ}\to 0}\text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{4}+\frac{\text{هـ}}{2}\right)\times\lim_{\text{هـ}\to 0}\frac{\text{حا}\frac{\text{هـ}}{2}}{2\times\frac{\text{هـ}}{2}}\right]$$

$$\lim_{\text{هـ}\to 0}\text{المقدار} = \text{حتا}\left(\frac{\text{ط}}{4}+0\right) \Leftarrow \lim_{\text{هـ}\to 0}\text{المقدار} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

٢٩) <u>أوجد</u> $\lim_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{حتا}(3\text{س}+3\text{هـ}) - \text{حتا}3\text{س}}{\text{هـ}}$

$$\text{حتا أ} - \text{حتاب} = -2\,\text{حا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{2}\right)\text{حا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{2}\right)$$

$$\text{البسط} = -2\,\text{حا}\left(3\text{س}+\frac{3}{2}\text{هـ}\right)\text{حا}\frac{3\text{هـ}}{2}$$

$$\underset{هـ \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = -2 \underset{هـ \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ حا}(3\text{س} + \frac{3}{2}\text{ هـ}) \times \underset{هـ \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا} \frac{3}{2}\text{هـ}}{\frac{3}{2}\text{هـ} \times \frac{2}{3}}$$

$$\underset{هـ \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = \text{حا} (3\text{ س} + 0) \times 3$$

$$\underset{هـ \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = -3\text{حا}3\text{س}$$

٣٠) <u>أوجد</u> $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{س حا س}}{1 - \text{حتا س}}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على س^2

$$\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{س . حا . س}}{\text{س}^2}}{\frac{1 - \text{حا . س}}{\text{س}^2}} = \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{1}{\frac{2\text{ حا}^2 \frac{\text{س}}{2}}{\left(2 \times \frac{\text{س}}{2}\right)^2}}$$

$$\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = 2$$

٣١) <u>أوجد</u> $\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{طا}^{-1}\text{س}}{\text{حا}^{-1}\text{س}}$ ؟!

بقسمة حدي الكسر على س

$$\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \text{ المقدار} = \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{طا}^{-1}\text{س}}{\text{س}} \div \underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^{-1}\text{س}}{\text{س}}$$

بوضع $\text{طا}^{-1}\text{ س} = \alpha$ $\qquad$ $\text{س} = \text{طا } \alpha$

$\text{حا}^{-1}\text{ س} = \beta$ $\qquad$ $\text{س} = \text{حا } \beta$

$$\lim_{س \to 0} \text{المقدار} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\text{ظا}\,\alpha} + \lim_{\beta \to 0} \frac{\beta}{\text{حا}\,\beta}$$

$$\lim_{س \to 0} \text{المقدار} = ١ + ١ = ١$$

تمرين (٢)

المجموعة الأولى :-

أوجد قيمة النهايات الآتية :-

(١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{حتا}\ ٢س}{٣س^{٢}}$

(٢) $\lim_{س \to 0} \frac{٥\ س + \text{حا}\ س}{٧\ س - \text{ظا}\ س}$

(٣) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{حتا}\ ٢\ س}{س^{٢}}$

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{٥}{س^{٢} \text{قتا}^{٢}\ س}$

(٥) $\lim_{س \to \frac{ط}{٢}} \frac{\text{حا}\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}{\frac{ط}{٢} - س}$

(٦) $\lim_{أ \to 0} \frac{١ - \text{حتا}\ أ}{أ^{٢}}$ حيث أ بالتقدير الدائري

(٧) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}\ س + س^{٢}}{س}$

(٨) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{قا}\ ٢\ س\ \text{ظا}\ ٣\ س}{٣\ س}$

(٩) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حتا}\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}{س}$

(١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{حا}^{٢}\ س}{س}$

(١١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حا^{٢} \frac{١}{٢} س}{س^{٢}}$

(١٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حتا ٢ س - ٢ حتا س + ١}{س^{٢}}$

(١٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^{٢} + حا ٣ س^{٢}}{س^{٢} + طا ٤ س}$

(١٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ حا س + ٣ طا س}{٥ س حتا ٢ س}$

(١٥) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢ س^{٢} + حا ٢ س^{٣}}{س^{٤} - طا^{٣} ٣ س}$

المجموعة الثانية :-

ضع علامة (√) أو (X)

(١) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حا س طا س}{٢ س} =$ صفر ( )

(٢) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{طا ٢ س حا ٣ س}{٥ س^{٢}} = \frac{٤}{٥}$ ( )

(٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٥}{س قتا ٣ س} = ٥$ ( )

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - حتا ٢ س}{س^{٢}} = ٣$ ( )

(٥) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س + حا ٣ س}{٢ س} = ٢$ ( )

(٦) $\lim\limits_{س \to \frac{ط}{٢}} \frac{حا ٣ س}{س}$ ( )

(٧) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حا ٢ س \ طا ٣ س}{٥ س^{٢}} = ١$ ( )

(٨) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حا ٣ س \ حتا ٣ س}{٩ س} = ١$ ( )

(٩) $\lim\limits_{س \to \frac{ط}{٢}} \frac{حا^{٢}س - حتا^{٢}س}{س^{٢}} = \frac{٤}{ط^{٢}}$ ( )

(١٠) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{حتا(\frac{ط}{٢} - س)}{٢ س} = \frac{١}{٢}$ ( )

الاشتقاق

دالة التغير – دالة متوسط التغير – دالة معدل التغير

<u>مفهوم التغير:</u>

اذا كان المتغير الحقيقى س قيمته الابتدائية $س_1$ وزادت قيمته أو نقصت ر أصبحت $س_2$

فان التغير فى س = $س_2 - س_1$

(يرمز للتغير فى س بالرمز هـ أو $\triangle$ س)

$\therefore$ هـ ($\triangle$ س) = $س_2 - س_1$

<u>ملاحظات :</u>

التغير فى س قد يكون موجبا أو سالبا

اذا كان $س_2 > س_1$ يكون موجبا

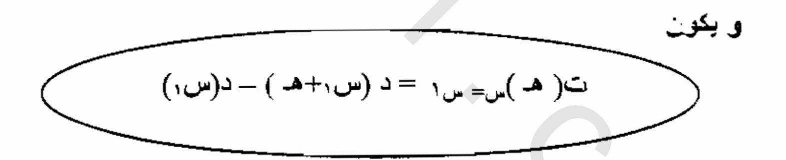
اذا كان $س_2 < س_1$ يكون سالبا

دالة التغير

- **اذا كانت ص= د(س) وتغيرت س من $س_1$ الى $س_1$ + هـ**

فان د(س) تتغير تبعا لها بمقدار د($س_1$+ هـ) – د(س)

و يكون



حيث ت (هـ) معناها التغير فى الدالة بمعنى أن ت (هـ) دالة تعين قيمة التغير الذى يتوقف على هـ

- **$\therefore$ دالة التغير = الدالة بعد التغير – الدالة قبل التغير**
- **ت (هـ) = د ($س_1$ + هـ) – د ($س_1$)**

$\triangle$ص = د ($س_1$ + $\triangle$س) – د ($س_2$)

مثال : اذا كانت د(س) = ٢ س + ١ و تغيرت س من س الى س + هـ .

أوجد دالة التغير ، ثم احسب ت (٠,٥)

الحـــل

∵ ت(هـ) = د (س + هـ) – د (س)

= [٢ (س + هـ) + ١] - (٢ س + ١)

= ٢ س + ٢ هـ + ١ – ٢ س – ١ = ٢ هـ

∴ ت (هـ) = ٢ هـ

∴ ت (٠,٥) = ٢ × ٠,٥ = ٠,١٠

مثال : اذا كانت د (س) = س^2 و تغيرت س من س = ٣ الى س = ٣ + هـ .

أوجد ت (هـ)$_{س = ٣}$ ثم أوجد قيمة ت (٠,١) ، ت (٠,٢٠)

الحـــل

∵ ت (هـ) = د (س$_1$ + هـ) – د (س$_1$)

، ∵ د (س) = س^2 ، س$_1$ = ٣ ∴ ت (هـ) د (٣ + هـ) – د (٣)

∴ ت (هـ) = (٣ + هـ)^2 – ٣ = ٩ + ٦ هـ + هـ^2 – ٩ = ٦ هـ + هـ^2

∴ ت (٠,١) = ٦ (٠,١) + (٠,١)^2 = ٠,٦ + ٠,٠١ = ٠,٦١

∴ت (٠,١) = ٠,٦١

∴ ت (٠,١) = ٠,٦١ (مقدار تغير د (س) عندما تتغير س من ٣ الى ٣,١)

، ت(٠,٢٠) = ٦ (٠,٢٠) + (٠,٢٠)^2 = ١,٢٠ + ٠,٠٤ = ١,١٦

= مقدار تغير د(س) عندما تتغير س من ٣ الى ٢,٨

مثال : اذا كانت د(س) = ٢ س + ٣ فما قيمة التغير فى س ، قيمة التغير فى د(س) فيما يلى:

(أ) عندما تتغير س من ٢ الى ٢,٠٢

(ب) عندما تتغير س من ٢ الى ١,٨

الحـــل

(أ) س$_1$= ٢ ، س$_2$ = ٢,٠٢ ∴ △س = التغير فى س = س$_2$ – س$_1$

∴ $\triangle$س = ٢,٠٢ – ٢ = ٠,٠٢

التغير فى د(س) = $\triangle$ ص = $\triangle$(س٢) – د (س١)

د (س٢) = د (٢,٠٢) ، د (س١) = ٢

= د (٢,٠٢) – د (٢) = (٣×٢,٠٢+١) – (٣×٢+١)

= (٧,٠٦) – (٧) = ٠,٠٦

(ب) س١= ٢ ، س٢ = ١,٨

$\triangle$س = التغير فى س = ١,٨ – ٢ = –٠,٢

$\triangle$ص = د (س٢) – د (س١) = د(١,٨) – د(٢)

= (٣×١,٨+١) – (٣×٢+١)

= ٦,٤ – ٧ = –٠,٦

(لاحظ $\triangle$س فى (أ) موجبة ، و سالبة فى (ب))

دالة متوسط التغير

∴ ت(هـ) = د (س١+ هـ) – د (س١)

بالقسمة على هـ حيث هـ≠٠ نحصل على :

دالة متوسط التغير [م(هـ)] = $\frac{ت(هـ)}{هـ}$ = $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$

= $\frac{د(س١ + هـ) – د (س١)}{هـ}$

∴ م(هـ)= $\frac{\text{الدالة بعد التغير – الدالة قبل التغير}}{هـ}$

<u>مثال:</u> اذا كانت د(س) = $\frac{٣}{(٢س – ١)}$

احسب متوسط التغير عندما تتغير س من س١ الى س١ + هـ . ثم احسب المتوسط عندما تتغير س من ٢ الى ٢,٢٥

<u>*الحـــل*</u>

ت(هـ) = د(س١ + هـ) – د(س١)

$$= \frac{٣}{(٢+\text{هـ})^{٢}-١} - \frac{٣}{٤-١} = \frac{٣}{٣+٢\text{هـ}} - ١$$

$$\text{ت}(\text{هـ}) = \frac{٣-٣-٢\text{هـ}}{٣+٢\text{هـ}} = \frac{-٢\text{هـ}}{٣+٢\text{هـ}}$$

$$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{ت}(\text{هـ})}{\text{هـ}} = \frac{-٢\text{هـ}}{٣+٢\text{هـ}} \times \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{-٢}{٣+٢\text{هـ}}$$

وعندما تتغير س من ٢ الى ٢,٢٥ فان هـ = ٠,٢٥

$$\therefore \text{م}(٠,٢٥) = \frac{-٢}{٣+٢\times ٠,٢٥} = \frac{-٢}{٣+٠,٥} = \frac{-٢}{٣,٠٥}$$

$$= -\frac{٢٠٠}{٣٠٥} = -٠,٦٦$$

<u>مثال :</u> اذا كان د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{اذا كان } ١ \le \text{س} < ٣ \\ ٢\text{س} + ١ & \text{اذا كان س} \ge ٣ \end{cases}$

فأوجد متوسط الدالة د(س) عندما تتغير س

(أ) من ١ الى ٢,٥ (ب) من ٣ الى ٤

<u>الحـل</u>

د(س)   س^{٢} ٢ س + ١

١   ٢,٥   ٣   ٤

(أ) عندما تتغير س من ١ الى ٢,٥ : س = ١ ، هـ = ١,٥

$$\therefore \text{م}(١,٥) = \frac{\text{د}(٢,٥) - \text{د}(١)}{١,٥} = \frac{٧}{٢}$$

(ب) عندما تتغير س من ٣ الى ٤ : س = ٣ ، هـ = ١

$\therefore$ م (١) = $\frac{\text{د(٤)} - \text{د(٣)}}{١}$ = $\frac{٩ - ٧}{١}$ = ٢

<u>مثال:</u> أوجد متوسط معدل تغير حجم كرة عندما يتغير نصف قطرها من ٣ سم الى ٥ سم

<u>الحـــل</u>

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} حيث نق نصف قطر الكرة

نق = ٣ ، نق + هـ = ٥ $\therefore$ هـ = ٢

م(هـ) = $\frac{\text{د(٥)} - \text{د(٣)}}{٢}$

$\therefore$ د(٥) = $\frac{١}{٣}$ ط (٥)^{٣} ، د(٣) = $\frac{٤}{٣}$ ط (٣)^{٣}

$\therefore$ م(هـ) = $\frac{٤}{٣}$ ط (٥)^{٣} − $\frac{٤}{٣}$ ط (٣)^{٣} = $\frac{٣٩٢}{٦}$ ط سم^{٣} / ث

<u>مثال:</u> يتحرك جسم على خط مستقيم بحيث كانت المسافة معطاة بالعلاقة

ف =٢ن^{٢} +٣ن+٥حيث ن الزمن بالثوانى ، ف بالسم . أحسب متوسط تغير ن من ١الى ٥

<u>الحـــل</u>

د(٥) = ٢(٥)^{٢}+٣×٥ +٥ = ٥٠+ ١٥+ ٥ = ٧٠

د(١) =٢(١)^{٢} + ٣×١ +٥ =١٠

هـ = ٥-١=٤

$\therefore$ م(هـ) = $\frac{٧٠-١٠}{٤}$ =١٥

<u>مثال:</u> احسب دالة متوسط التغير فى د عند س = ٣ اذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٨}$

الحــل

$\text{ت(هـ)} = \text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)$

$$= \sqrt{١ + \text{هـ} + ٨} - \sqrt{١ + ٨}$$

$$= \sqrt{٩ + \text{هـ}} - \sqrt{٩}$$ بالضرب × المرافق

$$= \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} - \sqrt{٩}}{١} \times \frac{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩}}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + \sqrt{٩}} = \frac{٩ + \text{هـ} - ٩}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + ٣}$$

$$\therefore \text{م(هـ)} = \frac{\text{هـ}}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + ٣} \times \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{١}{\sqrt{٩ + \text{هـ}} + ٣}$$

معدل تغير الدالة

$$\text{معدل تغير الدالة} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}_١ + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س}_١)}{\text{هـ}}$$

مثال: اذا كانت $\text{د(س)} = ٣\,\text{س}^٢ - ١$ و تغيرت س من س الى س + هـ .

احسب معدل التغير عند س = ١

الحــل

$$\therefore \text{معدل التغير} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{[٣(\text{س} + \text{هـ})^٢ - ١] - [٣\,\text{س}^٢ - ١]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{[٣\,\text{س}^٢ + ٦\,\text{س هـ} + ٣\,\text{هـ}^٢ - ١ - ٣\,\text{س}^٢ + ١]}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٦\,\text{س هـ} + ٣\,\text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٦\,\text{س} + ٣\,\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} ٦س + ٣هـ$$

∴ معدل التغير = ٦ س عندما س = ١

∴ معدل التغير = ٦ × ١ = ٦

<u>مثال:</u> مكعب من المعدن يتمدد بانتظام محتفظا بشكله . أوجد متوسط معدل التغير فى حجم المكعب عندما يتغير طول حرفه من ٣ سم الى ٣,٢ سم . ثم احسب معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه = ٤ سم .

<u>الحــل</u>

∵ ح = $س^٣$

∴ ت(هـ) = ($س_١$+ هـ)^٣ ــ $س_١^٣$

= هـ (٣ $س_١^٢$+ ٣ $س_١$ هـ+ $هـ^٢$)

∴ م هـ = هـ (٣ $س_١^٢$+ ٣ $س_١$ هـ+ $هـ^٢$) × $هـ^{-١}$

= ٣ $س_١^٢$+ ٣ $س_١$ هـ+ $هـ^٢$

و بوضع $س_١$ = ٣ ، هـ = ٣,٢ ــ ٣ = ٠,٢

∴ م(٠,٢) = ٢٧+ ٩ × ٠,٢ + ٠,٠٤ = ٢٨,٨٤

<u>لايجاد معدل التغير :</u>

$$\lim_{هـ \to ٠} م(هـ) = ٣ س_١^٢ + ٣ س_١ × ٠ +(٠)^٢$$

$$= ٣ س_١^٢ = ٣ × ١٦ = ٤٨$$

<u>مثال:</u> اذا كانت د(س) = أ $س^٢$+ ب س + حـ حيث أ ، ب ، حـ ∈ ح فأوجد دالة التغير ت(هـ) عندما س من ٢ الى ٢ + هـ . ثم أوجد كلا من أ ، ب ، حـ . علما بأن د (١) = ٠

، د (٢) = ٥

، ت(٠,٢) = ٦,٢٤

الحــل

∴ ت(هـ) = د (س + هـ) – د (س)

= أ (س + هـ)^{٢} + ب(س + هـ) + جـ – أ س^{٢} – ب س – جـ

= ٢ أ س هـ + أ هـ^{٢} + ب هـ

، ∴ د(١) = ٠ ∴ أ + ب + جـ = ٠ ....(١)

د(٢) = ٥ ∴ ٤ أ + ٢ ب + جـ = ٥ ....(٢)

ت(٢ ، ٠,٢) = ٦,٢٤ ∴ ٢١ أ + ٥ ب = ٣١ ....(٣)

بطرح (١) من(٢)

٤ أ + ٢ ب + جـ = ٥

أ + ب + جـ = ٠

---

٣ أ + ب = ٥..(٤)

بضرب (٤) × ٧ و بطرح (٣) منها

∴ ٢١ أ + ٧ ب = ٣٥

٢١ أ + ٥ ب = ٣١

---

٢ ب = ٤ ∴ ب = ٢

من (٣) أ = ١ و من (١) جـ = – ٣

<u>مثال:</u> اذا كانت د(س) = ٣ س – ١ ، س ≤ ١

س^{٢} + س ، س > ١

أوجد تغير الدالة عندما س = ١

<u>الحــل</u>

م(هـ) $=$ $\dfrac{\text{د(١ + هـ) – د(١)}}{\text{هـ}}$

س = ١

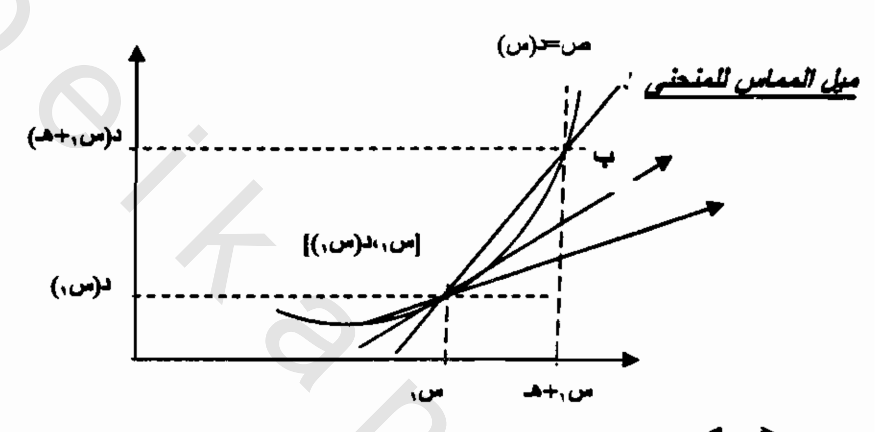
$= \begin{cases} \dfrac{\text{٣(١ + هـ) – ١ – ٢}}{\text{هـ}} \quad \text{، هـ < ٠} \\ \dfrac{\text{(١ + هـ)}^{٢}\text{ + ١ + هـ – ٢}}{\text{هـ}} \quad \text{، هـ > ٠} \end{cases}$

$$= \begin{cases} ٣ & ، \quad هـ < ٠ \\ ٣ + هـ & ، \quad هـ > ٠ \end{cases}$$

∴ $\lim_{هـ \to ٠}$ م(هـ) = ٣

∴ (معدل التغير)$_{س = ١}$ = ٣

التفسير الهندسى لمعدل التغير



لاحظ أن $\overleftrightarrow{أ ب}$ مستقيم قاطع للمنحنى و ميله يتعين بالمقدار

$$\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

أى أن ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند النقطة (س١ ، د(س١)) ∋ للمنحنى

هو ميل التماس = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ = طا ى = د' (س)

∴ معدل التغير = ميل المماس = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س+ هـ) - د(س)}{هـ}$

اذا كان ص = د(س) فان المشتقة الأولى للدالة عند نقطة هو ميل المماس للمنحنى عند نقطة ويرمز لها $\frac{ءص}{ءس}$ = ص' = د' (س) = $\frac{ء}{ءس}$ د(س)

مثال: اذا كانت د(س) = س^{٢} − ٣ س + ٥ أوجد د' (س) ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه

الحـل

د(س) = س^{٢} − ٣ س + ٥

∴ د(س+هـ) = (س + هـ)^{٢} − ٣ (س + هـ) + ٥

د(س + هـ) − د(س) = (س + هـ)^{٢} − ٣ (س + هـ) + ٥ − س^{٢} + ٣ س − ٥

= س^{٢} + ٢س هـ + هـ^{٢} − ٣ س − ٣ هـ + ٥ − س^{٢} + ٣ س − ٥

= ٢س هـ + هـ^{٢} − ٣هـ

∴ د'(س) = نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ(٢س - ٣ + هـ)}{هـ}$ = ٢س − ٣

∴ ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (س ، د (س)) = ٢س − ٣

= ٢ × ١ − ٣ = −١

∴ ميل المماس = −١ عند النقطة (١،٢)

مثال: أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\frac{٢}{٢س - ٣}$ عند أى نقطة عليه (س ، ص) ثم استنتج هذا الميل عند النقطة (−١ ، ٢) .

الحـل

ملاحظة لاحظ أن الدالة غير معرفة عند س= $\frac{٣}{٢}$ أى أن المشتقة الأولى للدالة عند

$س = \frac{٣}{٢}$ ليس لها وجود .

$$د(س + هـ) = \frac{٢}{٢(س + هـ) - ٣}$$

$$د(س + هـ) - د(س) = \frac{٢}{٢(س + هـ) - ٣} - \frac{٢}{٢س - ٣}$$

$$= \frac{٢[٢س - ٣] - ٢[٢س + ٢هـ - ٣]}{(٢س + ٢هـ - ٣)(٢س - ٣)}$$

$$د(س + هـ) - د(س) = \frac{٤س - ٦ - ٤س - ٤هـ + ٦}{(٢س + ٢هـ - ٣)(٢س - ٣)}$$

$$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \frac{-٤}{(٢س - ٣)^٢} = د'(س)$$

$$= \frac{ءص}{ءس}$$

$$\therefore \left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{-١ ، ٢} = \frac{-٤}{٢٥}$$

مثال: اذا كانت العلاقة التى تربط المسافة التى يتحركها جسيم و الزمن تعطى بالمعادلة

$ف = ن^٢ + ٢٠ ن + ١$ فأوجد سرعته بعد مرور ٥ ثوان

الحــل

السرعة هى معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

$\therefore$ لايجاد السرعة نوجد معدل تغير ف بالنسبة لـ ن أى $\lim_{\Delta ن \to ٠} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

$\therefore د(ن) = ف = ن^٢ + ٢٠ ن + ١$

$د(ن + هـ) = (ن + هـ)^٢ + ٢٠ (ن + هـ) + ١$

$\therefore \quad ف = د(ن + هـ) - د(ن)$

$= [(ن + هـ)^٢ + ٢٠ (ن + هـ) + ١] - [ن^٢ + ٢٠ ن + ١]$

= ن^{٢} + ٢ ن هـ + هـ^{٢} + ٢٠ ن + ٢٠ هـ + ١ − ن^{٢} − ٢٠ن − ١

∴ ف = ٢ ن هـ + هـ^{٢} + ٢٠ هـ

∴ معدل التغير (السرعة) = نهــا (Δ ن ← ٠) $\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$ = نهــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{٢ ن هـ + هـ}^{٢}\text{ + ٢٠ هـ}}{\text{هـ}}$

= نهــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{هـ(٢ ن + هـ + ٢٠)}}{\text{هـ}}$ = ٢ن + ٠ + ٢٠

∴ السرعة = ٢ن + ٢٠

عندما ن = ٥ ثوان فان ع = ٢×٥ + ٢٠ = ١٥+٢٠ = ٣٥ متر / ث

<u>مثال:</u> اثبت أن معدل التغير فى حجم مكعب بالنسبة لأحد أضلاعه هو ١٢ بوصة مكعبة لكل بوصة حينما يكون طول الضلع بوصتين .

<u>*الحل*</u>

∵ حجم المكعب = (طول الضلع)^{٣}

نفرض طول الضلع ل بوصة و أن حجم المكعب ح بوصة مكعبة

ح = ل^{٣} ∴ د(ل) = ل^{٣}

∴ د(ل + هـ) = (ل + هـ^{٣})

∴ معدل التغير فى حجم المكعب $\frac{\text{ءح}}{\text{ءل}}$ = نهــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{د(ل + هـ) − د(ل)}}{\text{هـ}}$

= نهــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{(ل + هـ)}^{٣}\text{ − ل}^{٣}}{\text{هـ}}$ = نهــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{(ل + هـ)}^{٣}\text{ − ل}^{٣}}{\text{(ل + هـ) − هـ}}$

= ٣ (ل)^{٢}

∴ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءل}}$ = ٣ ل^{٢}

و عندما يكون الضلع ل = ٢ بوصة فان $\frac{\text{ءح}}{\text{ءل}}$ = ٣ (٢)^{٢} × ٤ = ١٢

$\therefore \frac{ء ح}{ء ل}$ = ١٢ بوصة مكعبة / بوصة

تمرين(٣)

(١) اذا كانت د(س) = $س^٢$ + س وتغيرت س من ٢ الى ٢ + هـ أوجد :

(أ) دالة التغير ت ، ثم أوجد ت (٠,١)

(ب) دالة متوسط التغير م ، ثم أوجد م (٠,٠١)

(جـ) معدل التغير عند س = ٢

(٢) أوجد دالة متوسط معدل التغير للدالة د(س) = $س^٢$ – ٣س + ١ عندما تتغير س من $س_١$ الى $س_١$ + هـ ومنها أوجد:

(أ) متوسط معدل التغير عندما $س_١$ = ٥ ، هـ = ٠,٣

(ب) متوسط معدل التغير عندما $س_١$ = ٨ ، هـ = – ٠,٥

(٣) للدالة د : س ⟵ $\sqrt{س}$ ، س ∋ ح . أوجد :

(أ) دالة التغير (ب) دالة متوسط معدل التغير عند $س_١$= ١

(٤) اذا كانت د(س) معرفة كالآتى :

د(س) = $س^٢$ عند س > ٣

٢ س + ٣ عند س≥ ٣

أوجد متوسط تغير الدالة (س) عندما تتغير س :

(أ) من ٢ الى ٣ (ب) من ٤ الى ٤,٥

(٥) أوجد دالة التغير ت(هـ) للدالة د(س) = أ $س^٢$+ ب س + ٤ وذلك عندما تتغير س من ٣ الى ٣ + هـ . واذا كانت د(٣) = ٤ ، ت(٠,٥) = ١,٧٥ . أوجد قيمتى أ ، ب

(٦) اذا كانت د(س) = $\sqrt{س}$ (س > ١)

٥ – ٢س (س ≤ ١) أوجد :

(أ) متوسط معدل التغير للدالة عندما تتغير س من س = ١ الى س = ١,٣

(ب) متوسط معدل التغير عندما تتغير س من س = ١ الى س = ٠,٦٤

(٧) اذا كانت د(س) =
- ٢ س^{٢}+ ٣ ، ١> س ≤١
- ٦ ـ ٥ س ، ١> س <٣
- س ـ ٣ ، ١> س ≤٣

احسب متوسط معدل التغير اذا تغيرت س :

(أ) من س=١وتغيرت س بمقدار هـ حيث |هـ|< ١

(ب) من س =٣ وتغيرت س بمقدار هـ حيث |هـ|< ١

(٨) اذا كانت د(س) =
- س^{٣} + ٢ س ، س ≤٠
- س^{٢} + ٢ س ، س> ٠

أوجد معدل التغير للدالة عندما س = ٠

(٩) قرص دائرى من المعدن يتمدد بانتظام . أوجد معدل تغير مساحة سطح القرص بالنسبة الى طول نصف القطر وذلك عندما نصف القطر = ٧ سم

(١٠) اذا كانت الطاقة ق (بالأرج) فى سلك زنبركى تعطى بالمعادلة ق = ١٠٠٠ سم^{٢} حيث س هو التضاغط فى السلك بالسم . وكان الدفع فى السلك هو التغير فى الطاقة بالنسبة الى التضاغط. فأوجد كلا من : الطاقة و الدفع عند س = ٢ سم

المشتقة الأولى

تعرف المشتقة الأولى أو المعامل التفاضلي الأول للدالة ص = د(س) بأنه ميل المماس لهذه الدالة عند أي نقطة س في مجالها ويرمز إلى ذلك بالاتي

الدالة — مشتقة الدالة بالنسبة للمتغير س

المشتقة أو المعامل التفاضلي الأول ←

ص أو د(س)

أو تفاضل

أو معدل تغير بالنسبة ل س

أو ميل المماس للمنحنى ص=د(س)

$\frac{ء ص}{ء س}$ أو $د^{/}(س)$

أو $ص^{/}$

أو $\underset{\Delta س \to ٠}{نها} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

<u>قوانين مشتقة الدوال الجبرية</u>

قاعدة

إذا كانت $ص = س^{ن}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = ن\ س^{ن-١}$ حيث ن عدد حقيقي

<u>فمثلا</u>

(١) $ص = س^{٧}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = ٧\ س^{٦}$

(٢) $ص = س^{-٥}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = -\ ٥\ س^{-٦}$

ومن هذه القاعدة يمكن استنتاج الحالات الخاصة التالية

(١) $ص = أ\ س^{ن}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = أ\ ن\ س^{ن-١}$

<u>فمثلا</u> $ص = ٣س^{٥}$ فإن $\frac{ء ص}{ء س} = ١٥\ س^{٤}$

(٢) $ص = أ\,س$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = أ$

<u>فمثلا</u> ١) $ص = ٥\,س$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٥$ ٢) $ص = س$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ١$

(٣) $ص = أ$ (مقدار ثابت) فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

<u>فمثلا</u> ١) $ص = ٧$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$ ٢) $ص = ٣^{٤}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

(٤) $ص = \sqrt{س}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

<u>فمثلا</u> ١) $ص = \sqrt{س}$ $ص = س^{\frac{١}{٢}}$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}\,س^{-\frac{١}{٢}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}\cdot\frac{١}{س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢}\cdot\frac{١}{\sqrt{س}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

<u>وبشكل عام</u> $ص = \sqrt[ن]{س}$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{ن\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$

<u>البرهان</u>

$ص = \sqrt[ن]{س}$ $\therefore ص = س^{\frac{١}{ن}}$

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{ن}\,س^{\frac{١}{ن}-١} = \frac{١}{ن}\,س^{\frac{١-ن}{ن}} = \frac{١}{ن}\,س^{\frac{-(ن-١)}{ن}} = \frac{١}{ن}\cdot\frac{١}{س^{\frac{ن-١}{ن}}}$$

$$= \frac{١}{ن}\cdot\frac{١}{\sqrt[ن]{س^{ن-١}}} = \frac{١}{ن\sqrt[ن]{س^{ن-١}}}$$

فمثلا ١) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ $\qquad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}$

٢) $\text{ص} = \sqrt[٥]{\text{س}}$ $\qquad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{٥\sqrt[٥]{\text{س}^{٤}}}$

(٥) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

البرهان

$\text{ص} = \frac{١}{\text{س}}$ $\quad \therefore \text{ص} = \text{س}^{-١}$ $\quad \therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (-١)\,\text{س}^{-٢} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

ملاحظة :

تفاضل حاصل ضرب دالتين = الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول

مثال

إذا كانت $\text{ص} = (٢\text{س}^{٢} + ١)(٣\text{ س} - ٥)$ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

الحل

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \underbrace{(٢\text{س}^{٢} + ١)}_{\text{الأول}} \times \underbrace{(٣)}_{\text{تفاضل الثاني}} + \underbrace{(٣\text{ س} - ٥)}_{\text{الثاني}} \times \underbrace{(٤\text{ س})}_{\text{تفاضل الول}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٦\text{س}^{٢} + ٣ + ١٢\text{ س}^{٢} - ٢٠\text{ س} = ١٨\text{س}^{٢} - ٢٠\text{ س} + ٣$$

حل أخر

يمكن تبسيط المقدار ثم التفاضل كالتالي

$\text{ص} = (٢\text{س}^{٢} + ١)(٣\text{ س} - ٥)$

∴ ص = ٦س^{٣} - ١٠ س^{٢} + ٣س – ٥

ءص / ءس = ١٨س^{٢} - ٢٠ س + ٣ وهو نفس الناتج السابق

نتيجة

تفاضل حاصل ضرب ثلاثة دوال

= الأول × الثاني × تفاضل الثالث + الأول × الثالث × تفاضل الثاني + الثاني × الثالث × تفاضل الأول

فمثلا ص = (٣س + ١) (٢س^{٢} + ٥) (٧س – ١)

فإن

ءص / ءس = = [(٣س + ١) (٢س^{٢} + ٥) (٧)] [(٣س + ١) (٧ س – ١) (٤ س)] + [(٢س^{٢} + ٥) (٧ س – ١) (٣)]

= [٤٢س^{٣} + ١٠٥س + ١٤س^{٢} + ٥] + [٨٤س^{٣} + ١٦س^{٢} - ٤س] + [٤٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ١٠٥س - ١٥]

ءص / ءس = ١٦٨س^{٣} + ٢٤س^{٢} + ٢٠٦س - ٢٠

ملاحظة :

تفاضل خارج قسمة دالتين = (المقام × تفاضل البسط - [البسط × تفاضل المقام]) / مربع المقام

<u>فمثلا</u> ص = (٢س^{٢} - ١) / (٣س + ٥)

ءص / ءس = (١٢س^{٢} + ٢٠س - ٦س^{٢} + ٣) /)٣س+٥)^{٢} = (٦س^{٢} + ٢٠س + ٣) / (٣س+٥)^{٢}

ملاحظة :

تفاضل دالة الدالة = تفاضل الدالة × تفاضل ما بداخل الدالة

إذا كانت في صورة قوس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخل القوس

إذا كانت في صورة جذر = تفاضل الجذر × تفاضل ما بداخل الجذر

مثال :

إذا كانت $\text{ص} = (\text{٣س}^{٢} + \text{٥ س} + ٣)^{٨}$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٨\,(\text{٣س}^{٢}+\text{٥س}+٣)^{٧} \times [\text{٦س}+٥] = (\text{٤٨س}+٤٠)(\text{٣س}^{٢}+\text{٥س}+٣)^{٧}$$

مثال :

إذا كانت $\text{ص} = \sqrt[٢]{\text{٥س}^{٢}+١}$ فإن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underbrace{\frac{١}{٢\sqrt{\text{٥س}^{٢}+١}}}_{\text{تفاضل الجذر}} \times \underbrace{\text{١٠س}}_{\text{تفاضل ما تحت الجذر}} = \frac{\text{٥س}}{\sqrt{\text{٥س}^{٢}+١}}$$

أى أن تفاضل الجذر التربيعي = $\frac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{\text{ضعف الجذر}}$

وبشكل عام تفاضل الجذر النوني = $\frac{\text{تفاضل ما تحت الجذر}}{\text{ن}\sqrt[\text{ن}]{\text{ما تحت الجذر}^{\text{ن}-١}}}$

فمثلا $\text{ص} = \sqrt[٧]{\text{٣س}^{٢} + \text{٥س} + ١}$ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٦س}+٥}{٧\sqrt[٧]{(\text{٣س}^{٢}+\text{٥س}+١)^{٦}}}$

قاعدة السلسلة

إذا كانت ص = د (ع) ، ع = ر(س) حيث د قابلة للأشتقاق عند ع ، ر قابلة للأشتقاق عند س

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

فمثلا إذا كانت ص = (٣ س ^{٢} + ٥س + ٣) ^{٨} أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ مستخدما قاعدة السلسلة

<u>الحل</u>

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = ٨ع^{٧} × [٦ س + ٥]

ولكن ع = ٣س^{٢} + ٥ س + ٣

$\frac{ءص}{ءس}$ =٨ (٣س^{٢} + ٥ س + ٣)^{٧} (٦ س + ٥)

نتيجة

إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(م) ، م= ي (س)

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس}$

<u>فمثلا</u> إذا كانت ٢ع^{٢} + ٥ ، ع = م^{٢} + ١ ، م = ٧س +١٢ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

<u>الحل</u>

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءم} \times \frac{ءم}{ءس}$

= ٦ع^{٢} × ٢م × ٧ = ٨٤ع^{٢} م ولكن ع = م^{٢} +١

$= ٨٤(\text{م}^{٢} + ١)^{٢}\ \text{م}$

$= ٨٤[\text{م}^{٢} + ٢\text{م} + ١]\text{م}$

$= ٨٤\ [\text{م}^{٣} + ٢\text{م}^{٢} + \text{م}]$ ولكن $\text{م} = ٧\text{س} + ١٢$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٨٤[(٧\text{س}+١٢)^{٣} + ٢(٧\text{س}+١٢)^{٢} + (٧\text{س}+١)]$$

التفاضل الضمني

يجرى للدوال الضمنية وهى التي تكون في صورة د (س ، ص) = ٠ أي ارتباط س مع ص بعلاقة

فمثلا ١) $\text{س ص} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ١$ ٢) $\text{س ص} + \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

والطريقة العلمية لتفاضل الدوال الضمنية تتلخص في الآتي

- هو تفاضل س ، ص معاً ولكن عند تفاضل ص يلزم ضربها في $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ثم

استخلاص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في الطرف الأيمن

مثال :

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$

الحل

بالتفاضل $٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

$٢\text{ص}(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}) = -٢\text{س}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$$

مثال :

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ اذا كانت $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ١$

الحل

بالتفاضل $\frac{-١}{ص^{٢}} \left(\frac{ءص}{ءس}\right) - \frac{١}{س^{٢}} = ٠$

أو $\frac{-١}{ص^{٢}} \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{١}{س^{٢}}$ أو $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-ص^{٢}}{س^{٢}}$

أمثلة محلولة على مشتقة الدوال الجبرية

١- **أوجد** $\frac{ءص}{ءس}$ **في الحالات الاتية**

(أ) $ص = س^{-٨}$ (ب) $ص = \frac{\sqrt[٤]{س}}{س}$

(ج) $ص = \sqrt[٥]{س^{٣}}$ (د) $ص = س \sqrt[٣]{س}$

(هـ) $ص = \frac{٢}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$

الحل

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = -٨س^{-٩} = \frac{٨}{س^{٩}}$

(ب) $ص = \frac{س^{\frac{١}{٤}}}{س}$ $ص = س^{\frac{١}{٤}-١}$ $ص = س^{-\frac{٣}{٤}}$

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٣}{٤} س^{-\frac{٧}{٤}} = \frac{-٣}{٤\sqrt[٤]{س^{٧}}}$

(ج) $ص = س^{\frac{٣}{٥}}$ $\qquad \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣}{٥} س^{-\frac{٢}{٥}} = \frac{٣}{٥س} = \frac{٣}{٥\sqrt[٥]{س^{٧}}}$

(د) $ص = س \sqrt[٣]{س}$ $\quad ص = س \, س^{\frac{١}{٣}}$

$ص = س^{\frac{٤}{٣}}$ $\qquad \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}} = \frac{٤}{٣} \sqrt[٣]{س}$

(هـ) $ص = \frac{٢}{\sqrt[٥]{س^{٣}}}$ $\quad ص = ٢ \, س^{-\frac{٣}{٥}}$

$\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٦}{٥} س^{-\frac{٨}{٥}} = \frac{-٦}{٥\sqrt[٥]{س^{٨}}}$

٢ ـ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل من الحالات الآتية

(أ) $ص = \frac{س^{٣}-١}{س-١}$ $\qquad$ (ب) $ص = \frac{\sqrt{س+١}}{(\sqrt{س+١})^{٣}}$

(ج) $ص = (١ - \sqrt{س})(١ + \sqrt{س})(١ + س)(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})$

الحل

(أ) $ص = \frac{س^{٣}-١}{س-١} = س^{٢} + س - ١$

$ص = س^{٢} + س - ١$ $\qquad \frac{ءص}{ءس} = ٢س + ١$

لاحظ قانون الفرق بين مكعبين $أ^{٣} - ب^{٣} = (أ - ب)(أ^{٢} + أب + ب^{٢})$

(ب) $ص = \frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س+١}\,\sqrt{س+١}\,\sqrt{س+١}} = \frac{١}{(\sqrt{س+١})^{٢}} = \frac{١}{س+١} = (س + ١)^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = (-١)(س + ١)^{-٢} (١) = \frac{١}{(س+١)^{٢}}$

(ج) $ص = (١ - \sqrt{س})(١ + \sqrt{س})(١ + س)(١ + س^{٢})(١ + س^{٤})$

$ص = (١ - س)(١ + س)(١ + س^٢)(١ + س^٤)$

$= (١ - س^٢)(١ + س^٢)(١ + س^٤)$

$ص = (١ - س^٤)(١ + س^٤)$

$س = ١ - س^{١٢}$ $\qquad\qquad \frac{ءص}{ءس} = -١٦س^{١٥}$

لاحظ استخدام في هذا المثال $(أ - ب)(أ + ب) = أ^٢ - ب^٢$ بطريقة متتالية

٣- <u>أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت</u> :

(أ) $ص = \sqrt{س} + \sqrt[٣]{س} + \sqrt[٤]{س}$

(ب) $ص = ١ + \frac{١}{س^٢} + \frac{١}{س^٣}$

(ج) $ص = \frac{١}{١ + س + س^٢ + س^٣}$

(د) $ص = \sqrt{س + س^٢ + س^٣}$

<u>الحل</u>

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٣\sqrt[٣]{س^٢}} + \frac{١}{٤\sqrt[٤]{س^٣}}$

(ب) $ص = ١ + س^{-١} + س^{-٢} + س^{-٣}$

$\frac{ءص}{ءس} = (-١)س^{-٢} + (-٢)س^{-٣} + (-٣)س^{-٤} = -\frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣} - \frac{٣}{س^٤}$

(ج) $ص = \frac{١}{١ + س + س^٢ + س^٣} = (١ + س + س^٢ + س^٣)^{-١}$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -1\left(1+\text{س}+\text{س}^{2}+\text{س}^{3}\right)^{-2}\left(1+\text{س}+\text{س}^{2}+\text{س}^{3}\right)' =$$

$$\frac{-\left(1+2\text{س}+3\text{س}^{2}\right)}{\left(1+\text{س}+\text{س}^{2}+\text{س}^{3}\right)^{2}}$$

(د) $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+\text{س}^{2}+\text{س}^{3}}$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{1+2\text{س}+3\text{س}^{2}+4\text{س}^{3}}{2\sqrt{\text{س}+\text{س}^{2}+\text{س}^{3}+\text{س}^{4}}}$$

٤- أوجد مشتقة الدوال الآتية

(أ) $\text{د(ن)} = \frac{2}{\sqrt{\text{ن}}} + \frac{6}{\sqrt[3]{\text{ن}}}$

(ب) $\theta = \frac{\text{ر}^{2}+5}{5\text{ر}+2}$

(ج) $\text{ف} = \frac{\frac{3}{\text{ت}^{5}}-1}{\frac{2}{\text{ت}^{2}}+7}$

(د) $\text{ف} = (\text{ن}-1)\sqrt{\text{ن}^{2}-2\text{ن}+1}$

(ه) $\text{ك(ع)} = (\text{ع}^{3})^{-5}$

الحل

(أ) $\text{د(ن)} = 2\text{ن}^{-\frac{1}{2}} + 6\text{ن}^{-\frac{1}{3}}$

$$\text{د}'\text{(ن)} = -\text{ن}^{-\frac{3}{2}} - 2\text{ن}^{-\frac{4}{3}} = \frac{-1}{\text{ن}^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\text{ن}^{\frac{4}{3}}} = \frac{-1}{\sqrt{\text{ن}^{3}}} - \frac{2}{\sqrt[3]{\text{ن}^{4}}}$$

(ب) $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءر}} = \frac{\text{١٥ر+٤-[١٥ر+٢٥]}}{\text{(٥ر+٢)}^{٢}}$

$\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءر}} = \frac{\text{-٢١}}{\text{(٥ر+٢)}^{٢}}$

(ج) بضرب البسط والمقام في $\text{ت}^{٢}$ $\text{ف} = \frac{\text{ت}^{٢}\left(\frac{٣}{\text{٥ت}} - ١\right)}{\text{ت}^{٢}\left(\frac{٢}{\text{ت}^{٢}} + ٧\right)}$

$\text{ف} = \frac{\text{٠,٦ت-ت}^{٢}}{\text{٢+٧ت}^{٢}} = \frac{\text{(٢ + ٧ت}^{٢}\text{)(٠.٦ - ٢ت)} - \left[\text{(٠.٦ت - ت}^{٢}\text{)(١٤ت)}\right]}{\text{(٢ + ٧ت}^{٢}\text{)}^{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءت}} = \frac{\text{١.٢ - ٤ت - ٢.٤ت}^{٢}}{\text{(٢ + ٧ت}^{٢}\text{)}^{٢}}$

(هـ) $\frac{\text{ءك}}{\text{ءع}} = \text{-٥(٣ع)}^{\text{-٦}} \times ٣$

$\frac{\text{ءك}}{\text{ءع}} = \frac{\text{-١٥}}{\text{(٣ع)}^{٦}} = \frac{\text{-١٥}}{\text{٣}^{٦}\text{ع}^{٦}} = \frac{\text{-١٥}}{\text{٧٢٩ع}^{٦}}$

٥-(أ) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٣} + \frac{٩}{٢}\text{س}^{٢} - ٣٠\text{س} + ١٢$ **أوجد قيم س عندما** $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$

(ب) اذا كانت $\text{ص} = \text{س}\sqrt{\text{س}+١}$ أوجد قيم س التي تجعل $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$

الحل

(أ) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{٣س}^{٢} + \text{٩س} - ٣٠$

عندما $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$ $\therefore$ $\text{٣س}^{٢} + \text{٩س} - ٣٠ = ٠$ بالقسمة على ٣

$\text{س}^{٢} + \text{٣س} - ١٠ = ٠$ $\therefore$ $\text{(س-٢)(س+٥)} = ٠$

$\therefore$ أما س = ٢ أ، س = -٥

(ب) $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$ ولكن $\frac{ءص}{ءس} = ص$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

ص $= \sqrt{س+1}$ ∴ $\sqrt{س+1} = \frac{1}{2\sqrt{س+1}}$

أو $2(\sqrt{س+1})^2 = 1$ ∴ $2(س+1) = 1$ ∴ $س+1 = \frac{1}{2}$

∴ $س = -\frac{1}{2}$

٧- أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

(أ) $د(س) = \sqrt[9]{(3-س-2س^2)^5}$

(ب) $د(س) = (\frac{\sqrt{س}}{س} + \frac{س}{\sqrt{س}})^5$

الحل

(أ) $د(س) = (3-س-2س^2)^{\frac{5}{9}}$

$د'(س) = \frac{5}{9}(3-س-2س^2)^{-\frac{4}{9}}(-1-4س)$

(ب) $د(س) = [\frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}]^5$

∴ $د(س) = [س^{-\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{2}}]^5$

∴ $د'(س) = 5[س^{-\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{2}}]^4 \times (-\frac{1}{2}س^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}س^{-\frac{1}{2}})$

$= 5[\frac{1}{\sqrt{س}} + \sqrt{س}]^4 (\frac{-1}{2\sqrt{س^3}} + \frac{1}{2\sqrt{س}})$

مثال :

اذا كانت $ص = ع^5$ ، $ع = 3س^2 + 5$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = ع^{٥} ———————— (١)

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٦ س ———————— (٢) بضرب ١ × ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = ٥ ع^{٤} × ٦ س

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ع^{٤} × ٦ س

= ٥(٣س^{٢} + ٥)^{٤} × ٦ س

حل آخر

ص = ع^{٥} ———————— (١) ، ع = ٣س^{٢} + ٥ ———————— (٢)

من (١) ، (٢)

ص = (٣ س^{٢} + ٥)^{٥}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ (٣س^{٢} + ٥)^{٤} × ٦ س

مثال :

اذا كانت س = ن^{٢} ــ ١ ، ص = ن^{٣} أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٢ ن ———————— (١)

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٣ن^{٢} ———————— (٢) بالقسمة

$\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ + $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٣ ن^{٢} × $\frac{١}{٢ن}$ = $\frac{٣}{٢}$ ن

، س = ن^{٢} -١

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٣}{٢}\left(\text{ن}^{٢} - ١\right)$$

مثال :

اذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١$ ، $\text{ع} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$ فاثبت ان

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = ٢\ \text{ع}$$

الحل

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\ \text{س} \qquad ، \quad \text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} - ١$$

$$٢\text{ع}\ \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ٢\ \text{س}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \times \frac{\text{ء س}}{\text{ء ع}} = ٢\text{س} \times \frac{٢\text{ع}}{٢\text{س}} = ٢\ \text{ع}$$

مثال :

اذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{س}$ ، $\text{ع} = \frac{\sqrt{\text{س} - ١}}{\text{س}}$ أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}}$ عندما $\text{س} = ١$

الحل

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} + \text{س} \qquad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\ \text{س} + ١$$

$$\text{ع} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}} - \text{س}^{-١}$$

$$\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = -\frac{١}{٢}\ \text{س}^{-\frac{٣}{٢}} + \text{س}^{-٢}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = \frac{٢ + ١}{-٠,٥ + ١} = ٦$$

مثال :

اذا كانت $ص = \left(\dfrac{ع+1}{ع-1}\right)^{2}$ ، $ع = س^{2} + 2\,س$ أوجد $\dfrac{ءص}{ءس}$

الحل

$$ص = \left(\frac{س^{2}+2س+1}{س^{2}+2س-1}\right)^{2}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = 2\left(\frac{س^{2}+2س+1}{س^{2}+2س-1}\right) \times$$

$$\frac{(س^{2}+2س-1)(2س+2)-(س^{2}+2س+1)(2س+2)}{(س^{2}+2س-1)^{2}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = -8$$

تمرين (٤)

المجموعة الأولى

أوجد المشتقة الأولى للدالة د حيث

د = { (س ، ص) : ص = د (س) } وذلك بالنسبة إلى س في كل من الحالات الآتية

١) $د(س) = (س^{3} - س)(س^{4} + 4)$

٢) $د(س) = (س^{2} + 2\,س + 3)(2\,س^{2} - 5\,س + 1)$

٣) $د(س) = (4\,س^{5} - 6س^{2})(3س^{2} - س^{3})$

٤) $د(س) = (2س + 1)(3\,س - 2)(4\,س - 1)$

٥) $د(س) = (3\,س - 1)(2\,س - 3)(4\,س + 1)$

٦) $د(س) = (3\,س + 2)^{2}$

٧) $د(س) = \dfrac{4}{س+1}$ بشرط أن $س \neq -1$

٨) $د(س) = \dfrac{2س}{س^{2}+3}$

٩) $د(س) = \dfrac{\sqrt{س}}{1-س}$ بشرط ان $س \neq 1$

١٠) $د(س) = \frac{١-س+س^{٢}}{١+س+س^{٢}}$

١١) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى الذي معادلته

$ص = (٢س^{٢} + ٣)(١ - س^{٢})$ عندما $س = ١$

١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى الذي معادلته :

$ص = \frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٥}$ والتي يكون المماس عندها موازيا المحور السيني

١٣) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته

$ص = \frac{٤س}{س^{٢}+٤}$ عند نقطة الأصل والنقطة (٢ ، ١)

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

$ص = \frac{٥س}{س^{٢}+١}$ عندما $س = ٢$

١٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

$ص = \frac{٢س+١}{٣-س}$ عندما $س = ٥$

المجموعة الثانية

١- أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :-

أ- $ص = (٧س - ٣)(٨س + ٢)$

ب- $ص = (س^{٢} + ١)(س + ٢)$

ج- $ص = (س^{٢} - ٢س + ١)(٢س^{٣} + ٥)$

ء- $ص = (س - ١)(س + ٢)(س - ٣)$

ه- $ص = (س^{٤} + ٢س - ٣)(س^{٦} - ٧س^{٥} + ٨س^{٣} + ٩س^{٢} + ١)$

و- $ص = (س^{-٢} - ٢)(س - ٤)(س^{٣})$

ز- $ص = \frac{٢س^{٢}-٣س+٤}{س}$

ح- $ص = \frac{٢س^{٣}-٣س^{٢}+٤س-٢}{س^{٣}}$

ط- $ص = \frac{٥س-٢}{٤س+٣}$

ي - $\text{ص} = \frac{\text{س}^{2}+1}{\text{س}^{2}-1}$

ك - $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}^{2}+1}$

٢- إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}+\text{أ}}{\text{س}-\text{أ}}$ وكان $\text{د}'(2) = -2$ فأوجد قيمة الثابت أ

٣- إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{2}+\text{ب س}+\text{جـ}}{\text{س}^{2}+3\text{س}+2}$ وكان $\text{د}(0) = 2$ ، $\text{د}'(0) = -4$ فأوجد

قيم ب ، جـ الحقيقية

٤- أوجد معادلتي المماس والعمودي لكل من المنحنيات الآتية

أ- $\text{ص} = (\text{س}^{2} - 1)(\text{س}+5)$ عند $\text{س} = -5$

ب – $\text{ص} = \frac{\text{س}}{2\text{س}+1}$ عند النقطة (-١ ، ١)

جـ - $\text{ص} = \frac{1-2\text{س}}{\text{س}-3}$ عند $\text{س} = 2$

المجموعة الثالثة

١- أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ في كل مما يأتي :

أ - $\text{ص} = (\text{س}+2)^{7}$

بـ $\text{ص} = (3\text{س} - 1)^{5}$

جـ - $\text{ص} = (\text{س}^{2} + 3\text{س} - 2)^{4}$

ء - $\text{ص} = \text{س}^{5}(\text{س} + 3)^{7}$

هـ - $\text{ص} = (\text{س}^{2} + 2\text{س} - 3)^{16}(2\text{س} + 5)^{13}$

ل - $\text{ص} = \frac{(2\text{س}^{2}+3)^{5}}{(4\text{س}^{2}-1)^{7}}$

و - $\text{ص} = \frac{(\text{س} + 1)^{4}}{(\text{س}-1)^{5}}$

م - $\text{ص} = \frac{(\text{س}^{2}+1)^{5}(3\text{س} - 7)^{8}}{(\text{س}^{2}+5\text{س}-4)^{6}}$

٢- أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل الدوال الآتية

أ - $ص = (٢ س + ٥)^{١٢}$

ب- $ص = \sqrt{٢س + ٣}$

جـ- $ص = \left(\frac{٣س}{٢س+١}\right)^{٥}$

ء- $ص = \left(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}\right)^{٨}$

٣- أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ بدلالة س ، ص في كل من الدوال الضمنية الآتية

أ - $س^{٤} + ٤ص^{٤} - ٢ = ٠$

ب- $٢س^{٢} - ٣س ص + ص^{٢} + س + ٢ ص - ٨ = ٠$

جـ- $س^{٣} + ٢س^{٢} ص - س ص^{٢} + ٢ص^{٣} = ٤$

ء - $س^{٥} - ٢س^{٣}ص^{٢} + ٣س ص^{٤} - ص^{٥} = ٥$

هـ- $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ حيث أ ، ب ثابتان

و- $س^{٢} - ٢ س ص + ص^{٢} = ١٦$

م - $س^{٤} - ٢ س ص^{٢} + س ص^{٣} = ١$ عند النقطة (١ ، ٢)

<u>المجموعة الرابعة</u>

١- اذا كانت $ص = \left(\frac{س^{٢}+١}{س^{٢}-١}\right)^{ن}$ فاثبت ان $(١ - س^{٤}) \frac{ء ص}{ء س} = ٤ن س ص$

٢- إذا كان $د(س) = س^{٣} - ٣س٢٤^{٢}س$ أوجد قيم س التي تجعل $د^{/}(س) =$ صفر

٣- أوجد المشتقة الأولى لكل من :-

أ- $ص = \frac{(س^{٢}-١)^{٢}}{س+١}$ ب- $ص = س\sqrt{١-س^{٢}}$

٤) إذا كانت $د(س) = ٢س^{٣}\sqrt{٣س - ٦}$ أوجد $د^{/}(٠)$

٥) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كانت $ص = (س^{٢} + ١)(س^{٣}+٢س)(س^{٤}+٥س^{٢})$

٦) إذا كانت ص = (س^{٢} - ١)^{ن} حيث ن = عدد صحيح موجب أثبت أن

$$٢ن\ س\ ص + (١ - س^{٢}) \frac{ء ص}{ء س} = ٠$$

٧) إذا كانت ص = $\frac{٣ - ٢ س}{٣ + ٢ س}$ فاثبت ان س ∈ { ٠ ، - ٣} وذلك عندما $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٤}{٣}$

٨) إذا كانت ص = $\sqrt{٣ س}$ + $\frac{١}{\sqrt{٣ س}}$ فاثبت أن

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(٣ س + ١)\sqrt{٣ س}}{٦ س^{٢}}$$

٩) إذا كانت $\sqrt[ن]{ص} = \frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ١}$ فاثبت ان $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٦ ن\ س\ ص}{(س^{٢} + ١)(س^{٢} - ٢)}$

١٠) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ لكل من

أ- ص = $\sqrt{٣ س^{٢} - س - ٦}$

ب - ص = $\sqrt[٣]{٣ س^{٢} - س - ٦}$

جـ - ص = $\frac{س}{\sqrt{س} - ١}$

ء - ص = $\sqrt[٣]{(س^{٢} + س)^{٢}}$

١١) إذا كانت م = أ (ن – أ)^{٢} حيث أ ثابت

أثبت ان $\left(\frac{ء م}{ء ن}\right)^{٣} - ٤\ ن\ م \left(\frac{ء م}{ء ن}\right) + ٨\ م^{٢}$ = صفر

١٢) أثبت ان : $\frac{ء}{ء س}$ (س$^{-ن}$) = - ن س$^{-ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب

١٣) إذا كانت (٥ ن – م)^{٥} (ن + م) = ٣

فاثبت ان $\frac{ء م}{ء ن} - \frac{٥ ن}{م} = ٤$

١٤) إذا كان (٤ ن – م)^{٤} (ن + م) = ١ فاثبت أن $\frac{ءم}{ءن}$ - $\frac{ن٤}{م}$ = ٣ (م ≠ ٠)

١٥) إذا كان س ص = (س + ص)^{٢}

فاثبت أن س ص$'$ = ص حيث ص$'$ = $\frac{ء ص}{ء س}$

المشتقة الأولى لبعض الدوال المثلثية

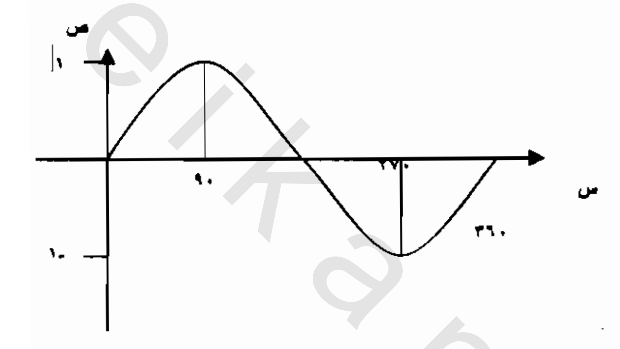
دالة الجيب

المجال ص = حا س

المنطلق ح

المدى (-١ ، ١)

الدالة فردية



<u>ملاحظات على دالة الجيب :-</u>

ص = حا س ⟵ ص/ = حتا س

ص = حاأس ⟵ ص/ = أ حتا أ س

ص = حا د(س) ⟵ ص/ = حتا د(س) × تفاضل الدالة

ص = [حا(س)]^{ن} ⟵ ن[حا(س)]$^{ن-١}$ × حتاد(س) × تفاضل الزاوية

ص = حا $\sqrt{\quad}$ ⟵ ص/ = حتا $\sqrt{\quad}$ × تفاضل الجذر

(قاعدة عامة)

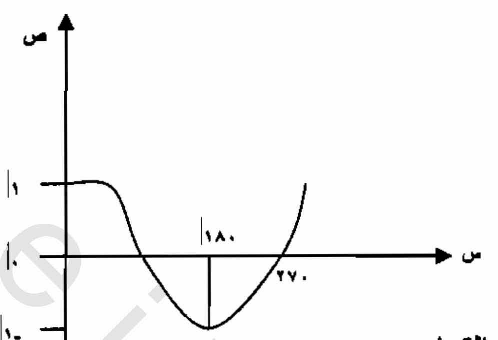
(دالة مثلثية)^{ن} ⟵ ن(دالة مثلثية)$^{ن-١}$ × تفاضل الدالة × تفاضل الزاوية

دالة جيب التمام

ص = حتا س

المجال ح

لمدى (-١ ، ١)



<u>ملاحظات على قاعدة جيب التمام</u>

ص = حتا س   ص/ = - حا س

ص = حتاأس   ص/ = - أحا أ س

ص = حتا د(س) ⟵ ص/ = حا د(س) × تفاضل الدالة

ص = $[\text{حتا(س)}]^{ن}$ ⟵ ن$[\text{حتا(س)}]^{ن-١}$ × - حاد(س) × تفاضل الزاوية

ص = حتا $\sqrt{\quad}$ ⟵ ص/ = - حا $\sqrt{\quad}$ × تفاضل الجذر

دالة الظل

ص= ظا س   ، س ∋ ح

<u>المجال</u>   س ∋ [ح − ($\frac{ط}{٢}$ + ن ط)]

<u>المدى</u> ∋ ح

إيجاد المشتقة الأولى للدالة ص = ظا س

ص = ظا س

$= \frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}$

$\therefore \frac{\text{ر ص}}{\text{ر س}} = \frac{\text{حتا س × حتا س - حا س × -حا س}}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}$

$$= \frac{\text{حتا}^{٢}\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{حتا}^{٢}\text{س}} = \frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \text{طا س} = \text{قا}^{٢}\text{س}$$

<u>ملاحظات على دالة الظل</u>

ص = طا س ⟵ ص/ = قا٢ س

ص = طا أس ⟵ ص/ = أ قا٢ أ س

ص = طا د(س) ⟵ ص/ = قا٢د(س) × تفاضل الدالة

ص = [طا (د(س))]ن ⟵ ن[د(س))]ن-١ × قا٢د(س) × تفاضل الزاوية

ص = طا √ ⟵ ص/ = حا √ × تفاضل الجذر

<u>مثال :</u>

$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٥ حا س) $= ٥ \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (حا س) = ٥ حتا س

$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ ($\frac{١}{٢}$ حتا س) $= \frac{١}{٢} \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (حتا س) = - $\frac{١}{٢}$ حا س

$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٣ حا س + ٤ حتا س) $= ٣ \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (حا س) + ٤ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (حتا س)

= ٣حتا س − ٤ حا س

$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٢حا س − ٧س٢) = ٢حتا س − ١٤ س

$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (٧ حتا س + $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$) = - ٧ حا س - $\frac{٦}{\text{س}^{٤}}$

<u>مثال :</u>

إذا عرفت الدالة بالمعادلة

د(س) = س٢ حا س ، فأوجد د/ (س)

الحل

د(س) = س^{٢} حا س

د$^{/}$ (س) = س^{٢}حتا س + حا س × ٢ س

= س(س حتا س + ٢ حا س)

مثال :

أوجد المشتقة الأولى للدالة د المعنية بالمعادلة

(أ) د(س) = حا (٣ س + ٥)

(ب) د(س) = حتا (س^{٢} – ١)

الحل

(أ) د(س) = حا (٣ س + ٥)

د$^{/}$ (س) = حتا (٣ س +٥) × ٣

= ٣حتا(٣ س +٥)

(ب) د(س) = حتا (س^{٢} – ١)

د$^{/}$ (س) = - حا (س^{٢} – ١) × ٤ س

= -٢ س حا (س^{٢} - ١)

مثال :

إذا كان د(س) = (س٢ + ١) حا س^{٣}- فأوجد د$^{/}$ (س)

الحل

د(س) = (س^{٢} + ١) حا س^{٣}

د$^{/}$ (س)= (س^{٢} + ١) حتا س × ٣ س^{٢} + ٢ س حا س^{٣}

= ٣ س^{٢} (س^{٢} + ١) حتا س^{٣} + ٢ س حا س^{٣}

= س [٣ س (س^{٢} + ١) حتا س^{٣} + ٢ حا س^{٣}]

مثال :

أوجد المشتقة الاولى للدالة المعرفة بالمعادلة

د(س) = حا^{٣} (٥ س + ٣)

د(س) = حا^{3} (٥ س + ٣) = [حا (٥ س + ٣)]^{3}

= ٣[حا(٥س + ٣)]^{2} × حتا (٥ س + ٣) × ٥

= ١٥ حا^{2} (٥ س + ٣) حتا (٥ س + ٣)

مثال :

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا عرفت ص بالمعادلة :

٣ ص حا س + ٥ ص^{2} حتا س – س^{3} = صفر

الحل

٣ ص حا س + ٥ ص^{2} حتا س – س^{3} = صفر

٣(ص حتا س + حا س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)+٥[ص^{2}(-حا س)+حتاس×٢ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$] -٣س^{2} = ٠

(٣حاس+ ١٥ ص حتا س) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥ ص^{2} حا س – ٣ ص حتا س + ٣ س^{2}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٥ص}^{2}\text{ حا س - ٣ ص حتا س + ٣ ص}^{2}}{\text{٣ حا س + ١٠ ص حتا س}}$

مثال :

أوجد

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (س طا $\frac{1}{2}$ س)

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (طا^{2} أ س)

الحل

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (س طا $\frac{1}{2}$ س)

= (س قا^{2} $\frac{1}{2}$ س) × $\frac{1}{2}$ + (طا $\frac{1}{2}$ س) × ١

= $\frac{١}{٢}$ س قا^{٢} $\frac{١}{٢}$ س + طا $\frac{١}{٢}$ س

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ر س}}$ (طا^{٢} ا س)

= [طا (ا س)]^{٢} = ٢ طا (ا س) × قا^{٢} (ا س) × ا

= ٢ ا طا (ا س) قا^{٢} (ا س)

مثال :

اوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا علمت أن :-

(١) طا ص = $\frac{\text{٢ س}}{\text{١ - س}^{٢}}$

(٢) ص طا ٢ س = س

الحل

(١) طا ص = $\frac{\text{٢ س}}{\text{١ - س}^{٢}}$

قا^{٢} ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{٢}(\text{١ - س}^{٢}) - \text{٢ س}(\text{- ٢ س})}{(\text{١ - س}^{٢})^{٢}}$

= $\frac{\text{٢ - ٢ س}^{٢} + \text{٤ س}^{٢}}{(\text{١ - س}^{٢})^{٢}}$ = $\frac{(\text{٢ + ٢ س}^{٢})}{(\text{١ - س}^{٢})^{٢}}$ = $\frac{\text{٢}(\text{١ + س}^{٢})}{(\text{١ - س}^{٢})^{٢}}$

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{٢}(\text{١ - س}^{٢})\ \text{جتا}^{٢}\text{ص}}{(\text{١ - س}^{٢})^{٢}}$ = ٢

(٢) ص طا ٢ س = س

ص قا^{٢} ٢ س × ٢ + $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ طا ٢ س = ١

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{١ - ٢ ص قا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{طا ٢ س}}$

مثال :

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ إذا علمت أن :

ص = (٢ س^{٢} – ١) طا^{٣} ٥ س

الحل

ص = (٢ س^{٢} – ١) طا^{٣} ٥ س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = (٢ س^{٢} – ١) (٣ طا^{٢} ٥ س) (قا^{٢} ٥ س) × ٥ + ٤ س طا^{٣} ٥ س

= ١٥ (٢ س^{٢} – ١) طا^{٢} ٥ س + ٤ طا^{٣} ٥ س

= طا^{٢} ٥س [١٥ (٢ س – ١) قا^{٢} ٥ س + ٤ س طا ٥ س]

مثال :

أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = طا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س ، عند س = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ (ط = $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$)

الحل

ص = طا $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ قا^{٢} $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س عند س = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

ص = طا $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ = ١

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ قا^{٢} $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٢ = ١

معادلة المماس المطلوبة هي

ص – ١ = ١ (س - $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$) = س - $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

ص = س + ١ - $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ = س + ١ - $\frac{\text{٢٢}}{\text{٢×٧}}$

= س + ١ - $\frac{\text{١١}}{\text{٧}}$ = س - $\frac{\text{٤}}{\text{٧}}$

أي ٧ (ص – س) + ٤ = ٠

مثال :

إذا كان ص = ٢ س حا س حتا س **فاثبت أن**

ص/ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

الحل

ص =٢ س حا س حتا س

= س × ٢ حا س حا س = س حا ٢ س

ص/ = س × حتا ٢ س × ٢ + حا ٢ س × ١

ص/ = ٢ س حتا ٢ س + حا ٢ س

مثال :

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

(١) ص = ٣ س حا س + ٣ س حتا س

(٢) ص = $\frac{\text{٦ س - حا ٢ س}}{\text{٨ س + حا ٢ س}}$ عند س = $\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$

الحل

(١) ص = ٣ س حا س + ٣ س حتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ س (حتا س – حا س) + ٣ (حا س + حتا س)

(٢) ص = $\frac{\text{٦ س - حا ٢ س}}{\text{٨ س + حا ٢ س}}$

ص/ = $\frac{\text{-٢٨ س + ١٤ حا ٢ س}}{\text{(٨ س + حا ٢ س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{١٤ (حا٢س - ٢ س)}}{\text{(٨ س + حا ٢ س)}^{٢}}$

د/ ($\frac{\text{ط}}{\text{٤}}$) = $\frac{\text{١٤ (١- } \frac{\text{ط}}{\text{٢}} \text{)}}{\text{(٢ ط + ١)}^{٢}}$

مثال :

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(١) $\text{ص} = \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٣}$

(٢) ص = ظتا س

(٣) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{حا}^{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}$

(٤) $\text{حا ص} = \frac{٢\,\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

الحل

(١) $\text{ص} = \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٣}$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣ \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٢} \times \frac{\text{حا س (١ + حا س)- حتا س (س - حتا س)}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= ٣ \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٢} \times \frac{\text{حا س + حا}^{٢}\text{ س + حتا}^{٢}\text{ س - س حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= ٣ \; ٣ \left(\frac{\text{س - حتا س}}{\text{حا س}} \right)^{٢} \times \frac{\text{١ + حا س - س حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{ س}}$$

$= \text{حا}^{٢}\text{ س + حتا}^{٢}\text{ س} = ١$

(٢) ص = ظتا س

$$\text{ص} = \frac{\text{حتا س}}{\text{حا س}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{حا س × - حا س - حتا س × حتا س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{-\text{حا}^2\text{س} - \text{حتا}^2\text{س}}{\text{حا}^2\text{س}} = \frac{-(\text{حا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س})}{\text{حا}^2\text{س}}$$

$$= -\frac{1}{\text{حا}^2\text{س}} = -\text{قتا}^2\text{س}$$

$$(3)\ \text{ص} = \sqrt[3]{\text{حا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{حتا}^2\text{س}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2}{3}\ \text{حا}^{-1/3}\ \text{حتا س} - 2\ \text{حتا}^{-3}\text{س}\ (-\ \text{حا س})$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{\text{حتاس}}{\sqrt[3]{\text{حا س}}} + \frac{2\ \text{حا س}}{\text{حتا}^3\text{س}}$$

$$(4)\ \text{حا ص} = \frac{2\text{س}}{1 + \text{س}^2}$$

$$\text{حتا ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2(1 + \text{س}^2) - 4\text{س}^2}{(1 + \text{س}^2)^2}$$

وحيث ان $\text{حا ص} = \frac{2\text{س}}{1 + \text{س}^2}$ ، $\text{حا}^{/}\text{ص} = \pm\sqrt{1 - \text{حا}^2\text{ص}}$

فان

$$\text{حتا ص} = \pm\frac{\sqrt{4\text{س}}}{(1 + \text{س}^2)^2} = \pm\frac{(1 - \text{س}^2)^2}{1 + \text{س}^2}$$

$$= \frac{|1 - \text{س}^2|}{1 + \text{س}^2}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{2(1 - \text{س}^2)}{(1 + \text{س}^2)\,|1 - \text{س}^2|}$$

وهكذا فان

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \begin{cases} \frac{2}{1 + \text{س}^2} & \text{عندما } |\text{س}| < 1 \\ -\frac{2}{1 + \text{س}^2} & \text{عندما } |\text{س}| > 1 \end{cases}$$

وعندما | س | = ١ لا توجد مشتقة

تمرين (٥)

<u>أوجد</u> $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

(١) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٥ س – حتا س

(٢) إذا كانت ص = حا(٥س^{٢} + ٣ س + ١)

(٣) إذا كانت ص = حتا (٥ س + ٣)

(٤) إذا كانت ص = حتا^{٥} (٣س + ١)

(٥) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (طا^{٦} ٢ س)

(٦) إذا كانت ص = حا (٣ س + ١) حتا ٧ س

(٧) إذا كانت ص = حتا ٥ س حا ٣ س أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ بطريقتين مختلفتين

(٨) أوجد

(أ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (طا $\frac{\text{ط}}{٤}$)

(ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ حا٣ك حيث ك مقدار ثابت

(جـ) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (حا^{٢} ٥ س + حتا^{٢} ٥ س)

(٩) أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للآتي :-

(أ) ص = $\sqrt[١٠]{\text{حا ٣ س + حتا ٥ س}}$

(ب) ص = حتا^{5} $\sqrt[7]{س^{2} + 1}$

(١٠) أثبت أن : $\frac{ء}{ءس}$ [حا^{2} $\frac{س}{2}$ - حتا^{2} $\frac{س}{2}$] = حا س

(١١) إذا كانت ص = طا^{3} (٢ س – ٥) فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١٢) إذا كان ص = حتا س فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١٣) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان ص = حا س^{3}

(١٤) إذا كان ص = حتا^{3} (٣ – س) عند س = ٣٣° أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(١٥) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان حا س + حتا ص = س + ص

(١٦) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان س حتاص = حا (س + ص)

(١٧) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ حيث د(ص) = حا^{3} (س – ٦)^{2}ومن ثم أثبت أن د$'$($\frac{ط}{ه}$)= صفر

(١٨) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كانت ص = حا $\frac{ط}{2}$ + حتا$\sqrt{س}$

(١٩) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كانت ص = حا س - $\frac{1}{3}$ حا^{3} س

(٢٠) إذا كانت س = ص طا ٢ س فأثبت أن

$\frac{ء ص}{ء س}$ طا ٢ س + ٢ ص قا^{2} ٢ س = ١

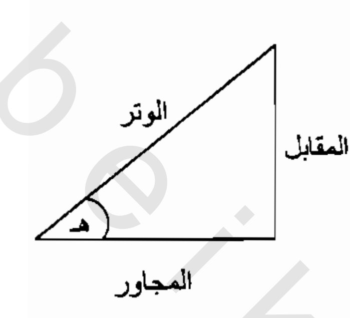
(٢) : حساب المثلثات

- قاعدة الجيب ومساحة المثلث
- قاعدة جيب التمام
- حل المثلث
- تطبيقات على حل المثلث (زوايا الارتفاع والانخفاض)
- الدوال المثلثية لمجموع او فرق قياسي زاويتين
- الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

حساب المثلثات

تذكر أن :

١ ـ الدوال المثلثية للزاوية الحادة في المثلث القائم :-



جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ‖ قتا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$

جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ‖ قا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$

ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ‖ ظتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

٢ ـ العلاقات الأساسية للدوال المثلثية :-

١) قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$ ، قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظا هـ}}$

٢) ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$.

٣) جا ^{٢} هـ + جتا ^{٢} هـ = ١ ⟸ { جا ^{٢} هـ = ١ ـ جتا ^{٢} هـ ، جتا ^{٢} هـ = ١ ـ جا ^{٢} هـ }

٤) ١ + ظا ^{٢} هـ = قا ^{٢} هـ ، ١ + ظتا ^{٢} هـ = قتا ^{٢} هـ

٣ ـ العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين:-

جا (٩٠ ـ هـ) = جتا هـ ‖ جا ١٥° = جتا ٧٥°

جتا (٩٠ ـ هـ) = جا هـ ‖ ظا ٥٨° = ظتا ٣٢°

ظا (٩٠ ـ هـ) ظتا هـ ‖ قا ١٧° = قتا ٧٣°

جا (٩٠° + هـ) = جتا هـ   **مثال**   جا ٩٨° = جا (٩٠° + ٨°) = جتا ٨°

جتا (٩٠° + هـ) = - جا هـ   **مثال**   جتا ١٠٠° - جتا (٩٠° + ١٠°) = - جا ١٠°

ظا (٩٠° + هـ) = - ظتا هـ

٤- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين:-

جا (١٨٠ – هـ) = ج هـ   جا ١٦٥ = جا ١٥

جتا (١٨٠ – هـ) = - جتا هـ   جتا ١٤٠° = - جتا ٤٠°

ظا (١٨٠ – هـ) – ظا هـ   ظا ١٣٥°= - ظا ٤٥°

➢ في اي مثلث أ ب جـ يكون :-

ق(أ) + ق (ب) + ق (جـ) = ١٨٠°

∴ ق(أ) + ق(ب) = ١٨٠ – ق(جـ)

أ

جـ   ب

∴ **جا (أ + ب) = جا جـ**

جتا (أ + ب) = - جتا جـ

ظا (أ + ب) = - ظا جـ

- تحديد الربع :

<u>الربع الأول : -</u>

٠ < هـ < ٩٠° ، ٠ < هـ < ط/٢

نرسم أي مثلث قائم

الوتر

المقابل

هـ

المجاور

الثاني

الوتر

المقابل

المجاور

٩٠° < هـ < ١٨٠°

ط/٢ < هـ < ط

الثالث

المجاور

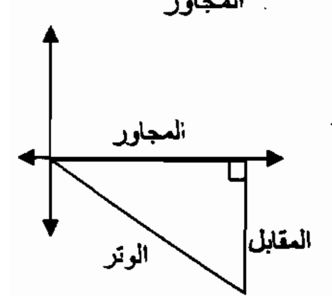
المقابل

الوتر

١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

ط < هـ < ٣ط/٢

الرابع



٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

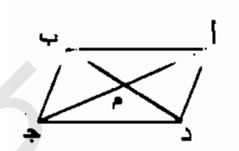
٣ط/٢ < هـ < ٢ ط

- بعض المساحات المستخدمة :-

* مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

* أو = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول أي ضلعين × جا الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة ▱ = القاعدة × الارتفاع



= ٢ مساحة المثلث أ ب جـ = ٤ مساحة Δ أ ب م

* مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين في الارتفاع

* مساحة الشكل الرباعي نوجده كمجموع مساحة أي مثلثين

أو = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طول القطرين × جا الزاوية المحصورة بينهما

* مساحة الدائرة = ط نق^{٢} * محيط الدائرة = ٢ ط نق

- يكون الشكل الرباعي دائري :-

(١) إذا كان فيه زاويتين مرسومتين علي قاعدة واحد متساويتا في القياس .

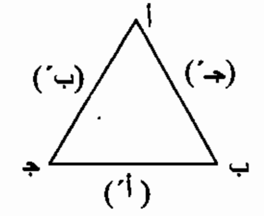
(٢) إذا كان فيه زاويتين متقابلين متكاملتين .

- **إذا كان** $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و}$ فإن $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = أحدي النسب

$\therefore \frac{أ + جـ + هـ}{ب + د + و}$ = أي نسبة من النسب مطلوب إيجادها

قاعدة الجيب

- في أي مثلث أ ب جـ يكون



$\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$ = ٢ نق

أي : أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع جيوب الزوايا المقابلة لها

الإثبات :-

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب أي ضلعين × جيب الزاوية بينهما

$\therefore \frac{1}{2}$ بَ جَ جا أ = $\frac{1}{2}$ أَ جَ جا ب = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا جـ

بالقسمة على $\frac{1}{2}$ أَ بَ جَ

$\frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جَ}}$

$\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$

ملاحظات :

1. نق هو نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث من الخارج .
2. محيط المثلث = أَ + بَ + جَ
3. محيط الدائرة = ٢ ط نق
4. مساحة الدائرة = ط نق^2
5. تستخدم قاعدة الجيب إذا علم زاويتان وضلع .

تمرين مشهور :-

في أي مثلث أ ب جـ يكون

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق ، نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ

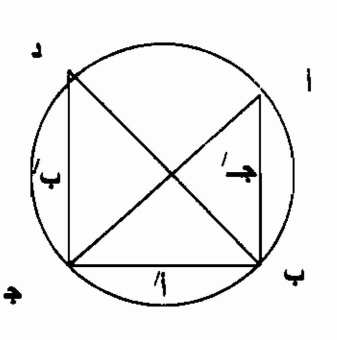
البرهان

أرسم القطر $\overline{\text{ب ء}}$ ثم صل $\overline{\text{ء جـ}}$

$\therefore$ أ ب جـ ء رباعي دائري

$\therefore$ ق (ء) = ق (أ)

لكن (ب جـ ء) ٩٠° في نصف دائرة



$\therefore \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ء}}$ = جا ء

$\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{٢ نق}}$ = جا أ $\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق

$\therefore \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق

مثال : أ ب جـ مثلث فيه ق (أ) = ١٨´ ٥٦ ° ، ق (ب) = ١١´ ٤٧ ° ، جـ´ = ١٦ سم

أوجد ما يلي :-

١) أ´ ، ب´   ٢) نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

الحـــــل

أولاً : نوجد ق (جـ)

ق (جـ) = ١٨٠ – ١٨´ ٥٦ ° - ١١´ ٤٧ °

الآلة : ,, Sh = ,,١١,,٤٧ -,,١٨,,٥٦ – ١٨٠

ق (جـ) = ٣١´ ٧٦ °

أ

(جـ´) (ب´)

جـ ب

(أ´)

$\therefore \frac{أ´}{جا أ} = \frac{ب´}{جا ب} = \frac{جـ´}{جا جـ}$ $\therefore \frac{أ´}{جا ١٨´ ٥٦ °} = \frac{ب´}{جا ١١´ ٤٧ °} = \frac{١٦}{جا ٣١´ ٧٦ °}$

$\frac{أ´}{جا ١٨´ ٥٦ °} = \frac{١٦}{جا ٣١´ ٧٦ °}$ ، $\frac{ب´}{جا ١١´ ٤٧ °} = \frac{١٦}{جا ٣١´ ٧٦ °}$

أ´ = $\frac{١٦ \times جا ١٨´ ٥٦ °}{جا ٣١´ ٧٦ °}$ ، ب´ = $\frac{١٦ \times جا ١١´ ٤٧ °}{جا ٣١´ ٧٦ °}$

= Sin,,٣١,,٧٦ ÷ ١٦ × Sin,,١٨,,٥٦   = Sin,,٣١,,٧٦ ÷ ١٦ × Sin,,١١,,٤٧

أ´ = ١٣,٣ سم ، ب´ = ١٢

إيجاد نق : نضع $\frac{١٦}{جا ٣١´ ٧٦ °}$ = ٢ نق

نق = ٨,٢ سم   = ٢ ÷ Sin,,٣١,,٧٦ ÷ ١٦

مثال : ا ب جـ مساحه سطحه = ٣٣٦ سم^{٢} فيه أ´ = ٢٨سم ، ب´ = ٢٦ سم ، جـ´ = ٣٠ سم أوجد مساحة سطح الدائرة المارة برؤوسه ؟

الحـــــل

∴ مساحة سطح Δ = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

∴ ٣٣٦ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٨ × ٢٦ × جا جـ

= ٣٦٤ × جا جـ   ∴ جا جـ = $\frac{٣٣٦}{٣٦٤}$

∴ جا جـ = ٠,٩٣٢   ∴ ق (جـ) = ٢٣´ ٦٧ °

∴ $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{٣٠}}{\text{جا ٢٣´ ٦٧°}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ٣٢,٤ ⟵ نق = ١٦,٢ سم

∴ مساحة الدائرة = ٣٫١٤ × (١٦٫٢)^{٢} = ٨٢٤,٤ سم^{٢}

مثال : أ ب جـ Δ فيه ق (أ) = ٢٦° ، ق (جـ) = ١٠٦° ، جـَ - أَ = ٥ سم أوجد أَ

الحـــــــل

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا جـ}}$ = $\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$

∴ $\frac{\text{جـَ - أَ}}{\text{جا جـ - جا أ}}$ = $\frac{\text{أَ}}{\text{جا جـ}}$

∴ $\frac{\text{٥}}{\text{جا ١٠٦ - جا ٢٦}}$ = $\frac{\text{أَ}}{\text{جا ٢٦}}$ ∴ أَ = $\frac{\text{٥ جا ٢٦}}{\text{جا ١٠٦ - جا ٢٦}}$ = ٤,٢ سم

مثال :

أب جـ مثلث فيه ق (أ) = ٣٨´ ٥٥٦ ، ق (ب) = ١٢´ ٥٧١ ، بَ = ٢٥ سم

احسب : ١) طول جـَ ٢) نصف قطر الذي تمر بروؤس المثلث .

٣) طول العمود الساقط من أ علي $\overline{\text{ب جـ}}$

الحـــــــل

ق(جـ) = ١٨٠ - ٣٨´ ٥٥٦ - ١٢´ ٥٧١

∴ ق(جـ) = ١٠´ ٥٥٢

$\frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}}$ = $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$ = ٢ نق

$\frac{\text{جـَ}}{\text{جا ١٠´ ٥٥٢}}$ = $\frac{\text{٢٥}}{\text{جا ١٢´ ٥٧١}}$ = ٢ نق

جـَ = $\frac{\text{٢٥ × جا ١٠´ ٥٥٢}}{\text{جا ١٢´ ٥٧١}}$ = ٢٠,٨ سم

نق = $\frac{\text{٢٥}}{\text{٢× جا ١٢´ ٥٧١}}$ = ١٣,٢ سم ٢٥ ÷ ٢ ÷ ٧١,,١٢,,Sin = ١٣,٢

إيجاد طول العمود : في Δ أ ء ب $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ١٢´ ٧١°}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ء}}$

$\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ١٢´ ٧١°}} = \frac{\text{٢٠,٨}}{\text{جا ٩٠}}$ ∴ أ ء = $\frac{\text{٢٠,٨} \times \text{جا ١٢´ ٧١°}}{\text{١}}$

∴ أ ء = ١٩.٦ سم

مثال : برهن أن مساحة سطح الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ = $\frac{\text{ط أ´ ب´}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

البرهان

∴ مساحة سطح الدائرة = ط نق^{٢}

∴ $\frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$ = ٢نق

∴ نق = $\frac{\text{أ´}}{\text{٢جا أ}}$ أو $\frac{\text{ب´}}{\text{٢جا ب}}$

∴ مساحة الدائرة = ط نق × نق

= ط × $\frac{\text{١}}{\text{٢جا أ}}$ × $\frac{\text{ب}}{\text{٢جا ب}}$ = $\frac{\text{ط أ´ ب´}}{\text{٤ جا أ جا ب}}$

مثال : أ ب جـ Δ محيطه ١٨ سم فإذا كان ق (أ) = ٤٧° ، ق (ب) = ٥٣° . أوجد اطوال أضلاعه ثم أوجد مساحة سطحه .

الحـــــل

ق (جـ) = ١٨٠ – (٤٧ + ٥٣) = ٨٠°

∴ $\frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{\text{أ´}}{\text{٠,٧٣١٤}} = \frac{\text{ب´}}{\text{٠,٧٩٨٦}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{٠,٩٨٤٨}}$

∴ $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالي}}$ = إحدي النسب

∴ $\frac{\text{أ´ + ب´ + جـ´}}{\text{٠,٧٣١٤ + ٠,٧٩٨٦ + ٠,٩٨٤٨}} = \frac{\text{١٨}}{\text{٢,٥١٤٨}}$ حيث المحيط (أ´ + ب´ + جـ´)

∴ أ´ = $\frac{\text{١٨} \times \text{٠,٧٣١٤}}{\text{٢,٥١٤٨}}$ = ٥,٢٣ سم

∴ ب´ = $\frac{\text{١٨} \times \text{٠,٧٩٨٦}}{\text{٢,٥١٤٨}}$ = ٥,٧٢ سم

$\therefore$ جـ´ = $\dfrac{١٨ \times ٠,٩٨٤٨}{٢,٥١٤٨}$ = ٧,٠٥ سم

$\therefore$ مساحة Δ = $\dfrac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

= $\dfrac{١}{٢}$ × ٥,٢٣ × ٥,٧٢ جا ٨٠ = ١٤,٧٣ سم^{٢}

مثال :

أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٨ سم ، ق < ب أ جـ = ٤٧° ، ق < أ ب ء = ٥٦°

احسب : ١) طول $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ ٢) مساحة سطح متوازي الأضلاع .

الحـــــل

في Δ أ م ب

ق(< م) = ١٨٠ ـ ٤٧ ـ ٥٦

ق(< م) = ٧٧°

$\dfrac{أ ب}{جا م} = \dfrac{أ م}{جا ٥٦} = \dfrac{م ب}{جا ٤٧}$ $\therefore$ $\dfrac{١٨}{جا ٧٧} = \dfrac{أ م}{جا ٥٦} = \dfrac{م ب}{جا ٤٧}$

أ م = $\dfrac{١٨ \times جا ٥٦}{جا ٧٧}$ = ١٥,٣ سم $\therefore$ م ب = $\dfrac{١٨ \times جا ٤٧}{جا ٧٧}$ = ١٣,٥ سم

أ جـ = ٢ أ م = ٢ × ١٥,٣ = ٣٠,٦ سم

ب ء = ٢ ب م = ٢ × ١٣,٥ = ٢٧ سم

مساحة Δ أ م ب = $\dfrac{١}{٢}$ أ ب × أ م جا أ

= $\dfrac{١}{٢}$ × ١٨ × ١٥,٣ × جا ٤٧ = ١٠٠,٧ سم^{٢}

مساحة متوازي الأضلاع = ٤ × ١٠٠,٧ = ٤٠٢,٨ سم^{٢}

مثال:

ـ في أي مثلث أ ب جـ اثبت أن مساحته = $\dfrac{أ´ ب´ جـ´}{٤ نق}$ حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه .

الحـــــل

نرمز لمساحة المثلث م

$\therefore$ م = $\dfrac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

= $\dfrac{أ´ ب´ جا جـ}{٢}$ (الطرفين × الوسطين)

$\therefore$ أ´ ب´ × جا جـ = ٢ م   بالقسمة علي أ´ ب´

جا جـ = $\frac{٢م}{أ´ ب´}$ بضرب الطرفين × $\frac{١}{جـ´}$

$\frac{جا جـ}{جـ´} = \frac{٢م}{أ´ ب´ جـ´}$ ، $\because \frac{أ´}{جا أ} = \frac{ب´}{جا ب} = \frac{جـ´}{جا جـ} = ٢ نق$

$\therefore \frac{جا جـ}{جـ´} = \frac{١}{٢ نق}$

$\therefore \frac{١}{٢ نق} = \frac{٢م}{أ´ ب´ جـ´}$ $\therefore$ ٤ م نق = أ´ ب´ جـ´ ÷ ٤ نق

$\therefore$ م = $\frac{أ´ ب´ جـ´}{٤ نق}$

حل آخر: $\because$ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

، $\because \frac{جـ´}{جا جـ}$ = ٢ نق $\therefore$ جا جـ = $\frac{جـ´}{٢ نق}$

$\therefore$ مساحة Δ = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ × $\frac{جـ´}{٢ نق}$

= $\frac{أ´ ب´ جـ´}{٤ نق}$

مثال : **اثبت أن مساحة سطح المثلث = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا جـ**

الحـــــل

م Δ = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ   ---------- (١)

$\because \frac{أ´}{جا أ} = \frac{ب´}{جا ب}$ = ٢ نق

أ´ = ٢ نق جا أ   ب´ = ٢ نق جا ب   بالتعويض في (١)

$\therefore$ م Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ نق جا أ × ٢ نق جا ب × جا جـ

م Δ = ٢ نق^{٢} جا أ جا ب جا جـ

تمارين (٦)

١- أ ب جـ Δ فيه ق (أ) = ٥٤٨ ، ق(< ب) = ٥٧٣ ، أ´ = ١٥٠ سم

اوجد محيط Δ أ ب جـ.

٢- أ ب جـ △ فيه ق (أ) = ١٠٥°، ق(> ب) = ٤٥°، جـ´ = ٢٠ سم أوجد أ´ ، ب´.

٣- أ ب جـ △ فيه (جـ´) = ٤٢,٤ سم ، ق(> أ) = ٨٢°، ق (> جـ) ٥٨°

أوجد ب´ ، مساحة △ أ ب جـ وكذا طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ .

٤- أوجد محيط △ أ ب جـ الذي فيه ق(> أ) = ٢١´ ٦٢° ، ق(> ب) = ٣٩´ ٥٤°

أوجد مساحة سطحه إذا كان جـ´ = ٩,٢٥ سم .

٥- أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٢,٥ سم ، ق (> أ ب جـ) = ١١٠°،

ق (> ب أ جـ) = ٤٥° أوجد أ جـ ، أ ء .

٦- أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ٢٠سم وقطراه أ جـ ، ب ء يصنعان مع الضلع أ

ب الزاويتين ٢٢´ ٣٦° ، ٥٨´ ٤٤° علي الترتيب - أوجد طول القطرين ثم اوجد

مساحة المتوازي .

٧- △ أ ب جـ فيه أ´ = ١٣,٥ سم ، ظا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، ظا جـ = $\frac{٨}{١٥}$ أوجد ب´ ، جـ´

٨- أ ب جـ △ فيه ب´ = ١٢,٦ سم ، ق(> أ) = ١٥´ ٦٤° ، ق (> جـ) ١٨´ ٤٢°

أوجد ما يلي : ١) محيط △ أ ب جـ ومساحته.

٢) طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤس المثلث أ ب جـ .

٩- △ أ ب جـ فيه ق (> أ) = ٥٠° ، ق (> ب) = ١٢٠° ، جـ´ = ٨ سم أوجد : ب´ ،

وكذلك طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ وكذلك مساحة المثلث .

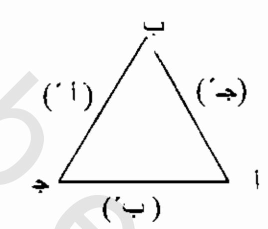
١٠- أ ب جـ △ فيه جـ´ = ٧,٦ سم ، ق(> أ)= ٨٠° ، ق(> ب) = ٤٧° أحسب محيط

المثلث وكذا طول نصف قطر الدائرة المارة بروؤسه .

قاعدة جيب التمام

في أي مثلث أ ب جـ يكون :

$$أ'^2 = ب'^2 + جـ'^2 - ٢ ب' جـ' جتا أ$$
$$ب'^2 = أ'^2 + جـ'^2 - ٢ أ' جـ' جتا ب$$
$$جـ'^2 = أ'^2 + ب'^2 - ٢ أ' ب' جتا جـ$$



الإثبات :-

جـ ب = جـ أ + أ ب

∴ ‖ جـ ب ‖² = ‖ جـ أ ‖² + ‖ أ ب ‖² + ٢ جـ أ ن أ ب

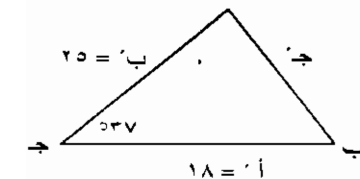
أ'² = ب'² + جـ'² − ٢ أ جـ ن أ ب

أ'² = ب'² + جـ'² - ب' جـ' جتا أ

ملاحظة :

– تستخدم هذه الصورة إذا علم ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما .

مثال : أ ب جـ ∆ فيه أ' = ١٨ سم ، ب' = ٣٥ سم ، ق (< جـ) = ٣٧° أوجد جـ'



الحـــل

جـ'² = أ'² + ب'² - أ' ب' جتا جـ

= (١٨)² +(٣٥)² − ٢ × ١١٨ × ٣٥ جتا ٣٧

$\sqrt{\quad}$= ١٨ Sh ×² +٣٥ Sh ×² − ٢ ×١٨ ×٣٥ ×٣٧ Cas

جـ' = ٢٣,٣ سم

مثال ٢ : أ ب جـ ∆ فيه ب' = ٤٦سم ، جـ' = ٧٥ سم ، ق (< أ) = ٥٢° ٤٣' أوجد :

١) أ' ، محيط المثلث .

٢) طول نصف قطر الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

٣) طول العمود الساقط من ب علي أ جـ

أ

ب′ = ٤٦ سم

٥٢ َ ٤٣°

جـ′ = ٧٥

ء

جـ ب

أ′

الحـــــل

١) أ′ ^٢^ = ب′ ^٢^ + جـ′ ^٢^ − ٢ ب′ جـ′ جتا أ

= (٤٦)^٢^ + (٧٥)^٢^ − ٢ × ٤٦ × ٧٥ × جتا ٥٢ َ ٤٣°

أ′ = ٥٢,٥ سم

٢) محيط المثلث = أ′ + ب′ + جـ′ = ٥٢,٥ + ٤٦ + ٧٥ = ١٧٣,٥ سم

٣) أ′ / جا أ = ٢ نق   ٥٢,٢ / جا ٥٢ َ ٤٣° = ٢ نق   نق = ٣٧,٩ سم

ثالثا : في Δ أ ب ء

ب ء / جا أ = أ ب / جا ء

ع / جا ٥٢ َ ٤٣° = ٧٥ / جا ٩٠

ع = ٧٥ × جا ٥٢ َ ٤٣° = ٥١,٩ سم

مثال : في Δ أ ب ء إذا كان [(أ′ + ب′) - جـ′) (ب′ + جـ′) - أ′] = ٣ ب′ جـ′

أوجد ق (< أ) .

الحـــــل

∴ [(أ′ + ب′) - جـ′) (ب′ + جـ′) - أ′] = ٣ ب′ جـ′

فرق مربعين

∴ (ب′ + جـ′)^٢^ - أ′^٢^ = ٣ ب′ جـ′

ب′^٢^ + جـ′^٢^ + ٢ ب′ جـ′ - أ′^٢^ = ٣ ب′ جـ′

ب′^٢^ + جـ′^٢^ - أ′^٢^ = ب′ جـ′   بالقسمة على ٢ ب′ جـ′

∴ (ب′^٢^ + جـ′^٢^ - أ′^٢^) / ٢ ب′ جـ′ = ١ / ٢

∴ جتا أ = ١ / ٢   ∴ ق (< أ) = ٦٠°

مثال : أ ب جـ ء متوازي أضلاع طولا قطريه $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ يساوي ٢٤ سم ، ١٨ سم ، قياس الزاوية بين القطرين ٥٠° احسب محيط متوازي الأضلاع .

الحـــــل

في Δ أ ب م

(أ ب)^2 = (م أ)^2 + (أ ب)^2 – ٢ م أ × م ب جتا ب

(أ ب)^2 = (١٢)^2 + (٩)^2 – ٢ × ١٢ × ٩ × جتا ب

∴ (أ ب) = ٩,٢ سم

في Δ أ م ء

ق (< م) = ١٨٠ – ٥٠ = ١٣٠°

(أ ء)٢ = (م أ)٢ + (م ء)٢ – ٢ م أ × م ء جتا ١٣٠

(أ ء)^2 = (١٢)^2 + (٩)^2 – ٢ × ١٢ × ٩ جتا ١٣٠

∴ أ ء = ١٩

محيط متوازي الأضلاع = (١٩ + ١٩ + ٩,٢ + ٩,٢)

= ٥٦,٤ سم

الحالة الثانية من قاعدة جيب التمام :

في أي Δ أ ب جـ يكون

$$جتا\ أ = \frac{ب'^2 + جـ'^2 - أ'^2}{2\ ب'\ جـ'}$$

$$جتا\ ب = \frac{أ'^2 + جـ'^2 - ب'^2}{2\ أ'\ جـ'}$$

$$جتا\ جـ = \frac{أ'^2 + ب'^2 - جـ'^2}{2\ أ'\ ب'}$$

الإثبات :

∴ أ'^{2} = ب'^{2} + جـ'^{2} – ٢ ب' جـ' جتا أ

∴ ٢ ب' جـ' جتا أ = ب'^{2} + جـ'^{2} - أ'^{2}

$$جتا\ أ = \frac{ب'^2 + جـ'^2 - أ'^2}{2\ ب'\ جـ'}$$

ملاحظات :

١) تستخدم هذه القاعدة لإيجاد قياسات زوايا المثلث إذا علم الأضلاع الثلاثة أ، النسب بين أطوال أضلاعه .

٢) أكبر زاوية تكون مقابلة لأكبر ضلع وأصغر زاوية تكون مقابلة لأصغر ضلع .

مثال : أ ب جـ ∆ فيه أ = ٢٦ سم ، ب´ = ٣٥ سم ، جـ´ = ٤١ سم – أوجد أكبر قياسات زوايا المثلث وما هي مساحة سطحه .

الحـــــل

جـ´ أكبر ضلع ∴ جـ´ = أكبر زاوية

جتا جـ = $\frac{\text{أ}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{جـ}'^{2}}{\text{٢ أ´ ب´}}$ = $\frac{(٢٦)^{٢} + (١٥)^{٢} - (٤١)^{٢}}{٢ \times ٢٦ \times ٣٥}$

٢٦ Sh ×٢ + ٣٥ Sh ×٢ – ٤١ Sh ×٢ = ÷ ٢ ÷ ٢٦ ÷ ٣٥ = Sh Cos Sh ,,

ق (< جـ) = ٣´ ٣٨°٥

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ´ ب´ جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٦ × ٣٥ × جا ٣´ ٣٨°٥

= ٤٥١,٦ سم٢

مثال : أ ب جـ ∆ فيه أ´ = ٣٢ سم ، ب´ = ٣٩ سم . جـ´ = ٥٢ سم أوجد :

١) ق (< أ) ٢) مساحة سطح المثلث

٣) طول نصف قطر الدائرة الذي تمر برؤوس المثلث .

٤) طول العمود الساقط من ب علي أ جـ .

الحـــــل

جتا أ = $\frac{\text{ب}'^{2} + \text{جـ}'^{2} - \text{أ}'^{2}}{\text{٢ ب´ جـ´}}$

جتا أ = $\frac{(٣٩)^{٢} + (٥٢)^{٢} - (٣٢)^{٢}}{٢ \times ٣٩ \times ٥٢}$

∴ ق (< أ) = ٥٣´ ٣٧°٥

إيجاد نق : $\frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{٣٢}{\text{جا٥٣´ ٣٧°٥}}$ = ٢ نق

نق = ٢٦ سم

مثال : في Δ أ ب جـ إذا كانت جتا ب = $\frac{جـ'}{٢ أ'}$ أثبت أن المثلث متساوي الساقين وإذا كان $\frac{جا جـ}{جا أ} = \sqrt{٣}$ أوجد : ق (< ب) ، ق (< جـ) .

الحـــــل

$\because$ ب'^{٢} = جـ'^{٢} + أ'^{٢} − ٢ أ' جـ' جتا ب

= جـ'^{٢} + أ'^{٢} − ٢ أ' جـ' جتا $\frac{جـ'}{٢ أ'}$

ب'^{٢} = جـ'^{٢} + أ'^{٢} − جـ'^{٢}

$\therefore$ ب'^{٢} = أ'^{٢} $\therefore$ ب' = أ' $\therefore$ Δ متساوي الساقين

$\because$ $\frac{جا جـ}{جا أ} = \sqrt{٣}$ $\therefore$ $\frac{جـ'}{أ'} = \sqrt{٣}$

$\therefore$ جـ' = أ$\sqrt{٣}$

$\therefore$ جتا ب = $\frac{جـ'}{٢ أ'} = \frac{أ\sqrt{٣}}{٢ أ'} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ ق (< ب) = ٣٠° $\therefore$ ق (< أ) = ٣٠°

$\therefore$ ق(< جـ) = ١٢٠°

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ ب' جـ' ا

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٩ × ٥٢ × جا ٥٣' ٣٧°

= ٦٢٢,٦ سم^{٢}

Δ أ ب ء : $\frac{أ ب}{جا ٩٠} = \frac{ب ء}{جا ٥٣' ٣٧°}$

$\frac{٥٢}{١} = \frac{ب ء}{جا ٥٣' ٣٧°}$

ب ء = ٥٢ × جا ٥٣' ٣٧°

ب ء = ٣١,٩ سم

مثال : أ ب جـ Δ فيه جا ب = $\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$ ، ب' = ١٠سم ، جـ' = ٨ سم أثبت أن:

المثلث متساوي الساقين وأوجد : جا أ ، جتا جـ

الحـــل

∵ جا ب = $\frac{\sqrt{٢١}}{٥}$ ⟵ جتا ب = $\frac{٢}{٥}$

∵ ب′٢ = جـ′٢ + أ′٢ − ٢أ′ جـ′ جتا ب

١٠٠ = ٦٤ + أ′٢ − ٢ × ٨ × أ′ × $\frac{٢}{٥}$

٣٦ = أ′٢ − $\frac{٣٢}{٥}$ أ′ بضرب الطرفين في ٥

١٨٠ = ٥أ′٢ − ٣٢أ′ ∴ ٥أ′٢ − ٣٢أ′ − ١٨٠ = ٠

(٥أ′ + ١٨) (أ′ − ١٠) = ٠

إما ٥أ′ + ١٨ = ٠ ⟵ مرفوض أو أ′ − ١٠ = ٠ ⟵ أ′ = ١٠

∴ أ′ = ١٠ ، ب′ = ١٠ ، جـ′ = ٨

جا أ = جا ب = $\frac{\sqrt{٢٠}}{٥}$

، جتا جـ = $\frac{أ′^٢ + ب′^٢ − جـ′^٢}{٢ أ′ ب′}$ = $\frac{(١٠)^٢ + (١٠)^٢ − (٨)^٢}{٢ × ١٠ × ١٠}$ = ٠,٩٦

تمارين (٧)

١- أ ب جـ Δ فيه (ب′) = ١١,٣ سم ، (جـ′) = ١٥,٢ سم ، ق(< أ) = ٧٠° . احسب: أ′

٢- أ ب جـ Δ أ′ = ٥٠ سم ، ب′ = ٦٠ سم ، جـ′ = ٨٠ سم – أوجد : قياس أكبر زاوية في المثلث.

٣- أ ب جـ ء متوازي أضلاع ق (< أ) = ٦٠° ومحيطه ٢٢ سم وطول قطره الأصغر = ٧ سم

أوجد : أب ، ب جـ

٤- أ ب جـ Δ فيه جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ ، ب′ = ١٠ سم ، جـ = ٨ سم اثبت ان Δ أ ب جـ متساوي الساقين .

٥- خطأ! ارتباط غير صالح.ب جـ = ٢٠ سم و ق(< ب) = ٢٩° ، ق(< جـ) = ٧٣° ، ء منتصف ب جـ . أوجد طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$.

٦- أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب جـ = ٥ سم ، جـ ء = ٨ سم ، أ جـ = ١١ سم – أثبت ان : الشكل أ ب جـ ء دائري .

٧- أ ب جـ Δ فيه أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٢٥ سم ، جـ أ = ٢٤ سم - أوجد : طول المتوسط المنصف للضلع $\overline{\text{ب جـ}}$

٨- في Δ أ ب جـ إذا علم ان :

$\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٦}$ جا جـ أوجد ق (< ب) ثم اثبت ان جتا جـ = $\frac{-١١}{٢٤}$

كذلك أوجد ق (< جـ)

٩- أ ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ، أ جـ = ١٦ سم ، بء = ٢٠ سم ، ق (< أ م ب) = ٥٠° - إحسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$

١٠- أ ب جـ Δ فيه أ´ : ب´ : جـ´ = ٣ : ٥ : ٧ - احسب قياس أكبر زاوية فيه .

حل المثلث

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه الثلاثة وقياس زواياه الثلاثة .

ملاحظات هامة :-

١) إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين

أستخدم القانون : $\frac{أ^\prime}{جا\ أ} = \frac{ب^\prime}{جا\ ب} = \frac{جـ^\prime}{جا\ جـ}$

٢) إذا علم ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

أستخدم القانون : $أ^{\prime 2} = ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - ٢\ ب^\prime\ جـ^\prime\ جتا\ أ$

٣) إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة

أستخدم القانون : $جتا\ أ = \frac{ب^{\prime 2} + جـ^{\prime 2} - أ^{\prime 2}}{٢\ ب^\prime\ جـ^\prime}$

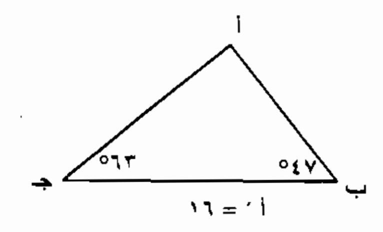
أولاً : إذا علم زاويتان وضلع يكون المطلوب ضلعين وزاوية لذلك تستخدم قاعدة الجيب

$$\left(\frac{أ^\prime}{جا\ أ} = \frac{ب^\prime}{جا\ ب} = \frac{جـ^\prime}{جا\ جـ} \right)$$

مثال١: حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أ´ = ١٦ سم ، ق (< ب) = ٤٧° ، ق (< جـ) = ٦٣°

الحـــــل

- المعلوم : زاويتان وضلع
- المطلوب : ضلعين وزاوية



ق (< أ) = ١٨٠ – ٤٧ – ٦٣

ق(< أ) = ٧٠°

$$\frac{أ^\prime}{جا\ أ} = \frac{ب^\prime}{جا\ ب} = \frac{جـ^\prime}{جا\ جـ}$$

$$\frac{١٦}{جا\ ٧٠°} = \frac{ب^\prime}{جا\ ب} = \frac{جـ^\prime}{جا\ جـ}$$

$\text{ب}' = \dfrac{\text{١٦} \times \text{جا ٤٧}}{\text{جا ٧٠}} = \text{١٢,٤ سم}$

$\text{جـ}' = \dfrac{\text{١٦} \times \text{جا ٦٣}}{\text{جا ٧٠}} = \text{١٥ سم}$

<u>ثانياً</u> : إذا علم الأضلاع الثلاثة يكون المطلوب الزوايا الثلاثة لذلك تستخدم :

$$\text{جتا أ} = \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\,\text{جـ}'} \qquad \text{جتا ب} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{\text{٢ أ}'\,\text{جـ}'}$$

$$\text{جتا جـ} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{جـ}'^{٢}}{\text{٢ أ}'\,\text{ب}'}$$

<u>مثال</u>:- حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أ' = ١٨ سم ، ب' = ٢٥ سم ، جـ' = ٣٧ سم

<u>الحـــل</u>

- **المعلوم : الأضلاع الثلاثة**
- **المطلوب : الزوايا الثلاثة**

$\text{جتا أ} = \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\,\text{جـ}'} = \dfrac{(\text{٢٥})^{٢} + (\text{٣٧})^{٢} - (\text{١٨})^{٢}}{\text{٢} \times \text{٢٥} \times \text{٣٧}}$ ∴ $\text{ق}(\angle \text{أ}) = \text{٢٩}'\ \text{٢٥}^{\circ}$

٢٥ Sh×٢ + ٣٧ Sh×٢ – ١٨ Sh×٢ = ÷ ٢ ÷ ٢٥ ÷ ٣٧ = Sh Cos Sh ,, =

$\text{جتا ب} = \dfrac{\text{أ}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{ب}'^{٢}}{\text{٢ أ}'\,\text{جـ}'} = \dfrac{(\text{٨})^{٢} + (\text{٣٧})^{٢} - (\text{٢٥})^{٢}}{\text{٢} \times \text{١٨} \times \text{٣٧}}$ ∴ $\text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{٤١}'\ \text{٣٦}^{\circ}$

$\text{ق}(\angle \text{جـ}) = \text{١٨٠} - \text{٢٩}'\ \text{٢٥}^{\circ} - \text{٤١}'\ \text{٣٦}^{\circ}$

$\text{ق}(\angle \text{جـ}) = \text{٥٠}'\ \text{١١٧}^{\circ}$

<u>ثالثاً</u>: إذا علم ضلعين و قياس الزاوية المحصورة بينهما يكون المطلوب ضلع وزاويتان لإيجاد الضلع نستخدم :

$\text{أ}'^{٢} = \text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{٢ ب}'\,\text{جـ}'\ \text{جتا أ}$

$\text{، ب}'^{٢} = \text{أ}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{٢ أ}'\,\text{جـ}'\ \text{جتا ب}$

$\text{، جـ}'^{٢} = \text{أ}'^{٢} + \text{ب}'^{٢} - \text{٢ أ}'\,\text{ب}'\ \text{جتا جـ}$

ثم نستخدم $\text{جتا أ} = \dfrac{\text{ب}'^{٢} + \text{جـ}'^{٢} - \text{أ}'^{٢}}{\text{٢ ب}'\,\text{جـ}'}$ **وهكذا ....**

<u>مثال</u> : حل المثلث أ ب جـ الذي فيه ب´ = ٣٥ سم ، جـ´ = ٥٤ سم ، ق (< أ) = ٥٣°

<u>**الحـــــل**</u>

أ´٢ = ب´٢ + جـ´٢ – ٢ ب´ جـ´ جتا أ

أ´٢ = (٣٥)٢ + (٥٤)٢ – ٢ × ٣٥ × ٥٤ جتا ٥٣

٣٥ Sh ×٢ + ٥٤ Sh ×٢ -٢O٣٥O٥٤O٥٣ Cos =√

∴ أ´ = ٤٣ سم

جتا ب = (أ´٢ + جـ´٢ – ب´٢) / (٢ أ´ جـ´) = ((٤٣)٢ + (٥٤)٢ – (٣٥)٢) / (٢ × ٤٣ × ٥٤)

∴ ق (< ب) = ٢٠´ ٤٠°

ق (< جـ) = ١٨٠ – ٥٣ – ٢٠´ ٤٠° = ٤٠´ ٨٦°

تمارين (٨)

١- حل ∆ أ ب جـ الذي فيه : (ب´) = ٤٠سم ، (أ´) = ٣٢ سم ، ق (< جـ) = ٢٨´ ١١٢°

٢- حل ∆ أ ب جـ الذي فيه: (جـ´) = ٧٢ سم ، (ب´) = ٨٠ سم ، (أ´) = ٥٠ سم

٣- حل ∆ أ ب جـ الذي فيه: (أ´) = ٣٧سم ، (ب´) = ٥٦سم ، ق(< جـ) = ١٦´ ٤٣°

٤- حل ∆ أ ب جـ الذي فيه : ق (< أ) = ٢´ ٥٧° ، ق(< ب) = ٥´ ١٠٨° ، (أ´) = ١٨,٩٥ سم

٥- حل ∆ أ ب جـ الذي فيه: (أ´) = ٢٦ سم ، (ب´) = ١٨ سم ، (جـ´) = ١٤ سم

٦- حل ∆ س ص ع حيث : (س´) = ٣ سم ، (ص´) = ٥ سم ، (ع´) = ٧ سم

٧- حل ∆ أ ب جـ حيث : (أ´) = ٢٧سم ، (ب´) = ٣٦سم ، ق(< جـ) = ١٦´ ٤٣°

٨- حل Δ س ص ع حيث : (س َ) = ٥ سم ، ق (< ع) = ٦٠° ، مساحة سطحه =

١٥ √ ٣ سم٢

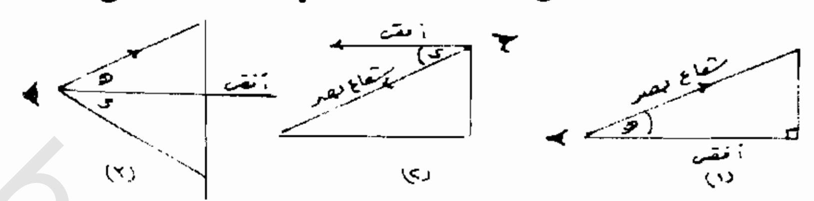
٩- حل Δ أ ب جـ الذي فيه : (أ َ) = ١٧ سم ، (ب َ) = ٢٠ سم ، (جـ َ) = ٢٩ سم

١٠- حل Δ س ص ع الذي فيه : (س َ) = ١٠ سم ، ق(< ص) = ٦٢° ، ق (< ع)

= ٤٨°

زوايا الارتفاع والانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين شعاع البصر والخط الأفقي الذي يمر بشعاع البصر .



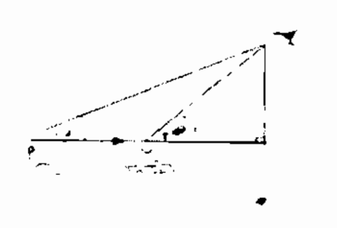
شكل (١) هـ زاوية ارتفاع
شكل (٢) ى زاوية انخفاض
شكل (٣) هـ ، ى زاويتي ارتفاع وانخفاض .

كيف تفكر في حل مسائل زوايا الارتفاع والانخفاض ؟

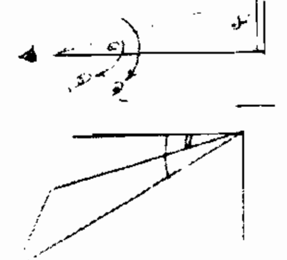
(١)ارسم المسالة جيدا .
(٢) من الرسم يتكون مثلثين مشتركان في ضلع واحد – احد المثلثين معلوم فيه طول ضلع والآخر مطلوب إيجاد طول ضلع فيه .
(٣) نبدأ بالمثلث المعلوم فيه طول ضلع ونستخدم قاعدة الجيب وبذلك توجد طول الضلع المشترك .
(٤) نستخدم قاعدة الجيب مرة أخرى في المثلث المطلوب إيجاد طول الضلع المجهول فيه .

أنواع المسائل

النوع الأول : -
رصد زاوية ارتفاع من مكانين مختلفين
أو زاوية انخفاض لجسم متحرك .



النوع الثاني :-
رصد زاوية ارتفاع قمة وقاعدة برج
فوق تل .



النوع الثالث :-
رصد زاوية انخفاض لجسم منخفض من
مكان أعلى .

النوع الرابع :-

رصد زاويتي ارتفاع وانخفاض من مكان واحد
(تستخدم قاعدة الجيب) .

النوع الأول

مثال١

من نقطة على سطح الأرض رصد شخص زاوية ارتفاع من برج فكانت ١٦° وإذا تحرك الشخص جهة قاعدة البرج مسافة ٢٠٠ متر ورصد زاوية الارتفاع مرة أخرى فكانت ٣٥° احسب ارتفاع البرج .

الحـــــــل

في Δ أ ب ء

هـ = ٣٥ ـ ١٦ = ١٩°

Δ أ ب ء

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا أ}}$$

$$\frac{٢٠٠}{\text{جا١٩}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا١٦}}$$

$$\therefore \text{ب ء} = \frac{٢٠٠ \times \text{جا ١٦}}{\text{جا ١٩}} \qquad \therefore \text{ب ء} = ١٦٩,٣٠ \text{ م}$$

في Δ ب ج ء

$$\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا٣٥}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا٩٠}}$$

$$\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا٣٥}} = \frac{١٦٩,٣}{\text{جا ٩٠}} \qquad \text{د ج} = \frac{١٦٩,٣ \times \text{جا ٣٥}}{١}$$

$\therefore$ ء ج = ٩٧ م

مثال:

من نقطة أ في المستوى الأفقي المار بقاعدة برج رأسي وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = س° وحين تقدم الراصد في اتجاه قاعدة البرج مسافة ف وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج = ص°

أثبت أن : ارتفاع البرج = $\frac{\text{ف جا س جا ص}}{\text{جا (ص - س)}}$

الحـــــــل

Δ ء ب أ

$$\frac{\text{ف}}{\text{جا (ص - س)}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}}$$

∴ ء ب = $\frac{\text{ف جا س}}{\text{جا (ص - س)}}$ ⟵ (١)

Δ ء جـ ب

$\frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}} = \frac{\text{ء ب}}{\text{جا س}}$ ∴ ء ب جا ص = ء جـ ⟵ (٢)

من ١ ، ٢

∴ ء جـ (ارتفاع البرج) = $\frac{\text{ف جا س جا ص}}{\text{جا (ص - س)}}$

مثال:

برج ارتفاعه ٧٠م رصدت زاوية انخفاض سيارة من قمة البرج في لحظة ما فكانت ٥٧° وبعد ٣ دقائق أصبحت زاوية ارتفاع السيارة هي ١٦° احسب سرعة السيارة (علما بان البرج والسيارة في الحالتين تقعان في مستوى رأسي واحد)

الحـــــل

Δ أ ب جـ

$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}}$

$\frac{٧٠}{\text{جا٥٧}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{٧٠ × جا٩٠}}{\text{جا ٥٧}}$ = ٨٣,٤ م

في Δ أ جـ ء هـ = ٥٧ ـ ١٦ = ٤١

$\frac{\text{جـ ء}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ء}}$

$\frac{\text{جـ ء}}{\text{جا ٤١}} = \frac{٨٣,٤}{\text{جا ١٦}}$

∴ جـ ء = $\frac{\text{٧٣,٤ × جا٤١}}{\text{جا ١٦}}$ = ١٩٨,٥ م

السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{١٩٨,٥}{٣}$ = ٦٦,١ م / ق

مثال:

من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر عن سطح الأرض رصد رجل زاويتي انخفاض قاربين يقعان في مستوى رأسي مار بالرجل فوجد أن قياسهما ٣٠َ ٤٨° ، ٢٥َ ٣٢° . أوجد البعد بين القاربين .

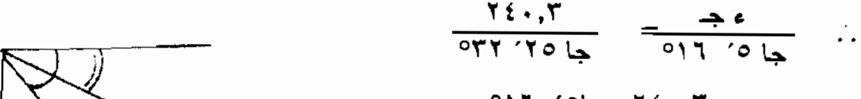
الحـــــــل

Δ أ ب جـ

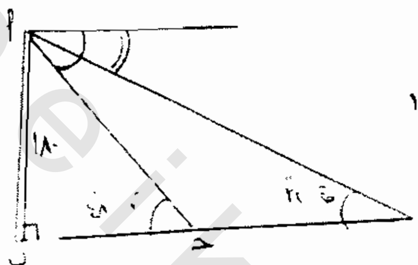
$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٩٠} = \frac{١٨٠}{\text{جا } ٣٠َ\ ٤٨^\circ} \qquad \text{أ جـ} = \frac{١٨٠ \times \text{جا } ٩٠}{\text{جا } ٣٠َ\ ٤٨^\circ} = ٢٤٠,٣ \text{ متر}$$

Δ أ جـ ء

$$\text{ق } (\angle \text{ ء أ جـ}) = ٣٠َ\ ٤٨^\circ - ٢٥َ\ ٣٢^\circ = ٥َ\ ١٦^\circ$$



$$\therefore \frac{\text{ء جـ}}{\text{جا } ٥َ\ ١٦^\circ} = \frac{٢٤٠,٣}{\text{جا } ٢٥َ\ ٣٢^\circ}$$



$$\therefore \text{ء جـ} = \frac{٢٤٠,٣ \times \text{جا } ٥َ\ ١٦^\circ}{\text{جا } ٢٥َ\ ٣٢^\circ} = ١٢٤,٢$$

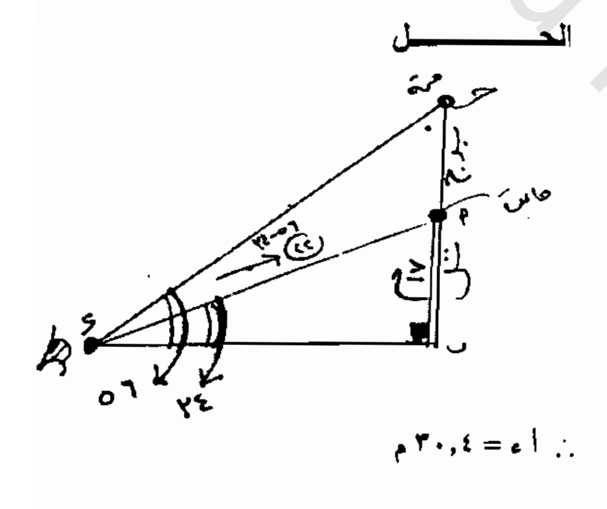
$\therefore$ البعد بين القاربين = ١٢٤,٢ متر

النوع الثاني

مثال:

من نقطة على سطح الأرض رصد شخص زاويتي ارتفاع قمة وقاعدة برج مقام فوق تل ارتفاعه ١٧ متر فكانتا ٥٦° ، ٣٤° احسب ارتفاع البرج .

الحـــــــل



Δ أ ب ء

$$\frac{١٧}{\text{جا } ٣٤} = \frac{\text{أ ء}}{\text{جا } ٩٠}$$

$$\therefore \text{أ ء} = \frac{١٧ \times \text{جا } ٩٠}{\text{جا } ٣٤} \qquad \therefore \text{أ ء} = ٣٠,٤ \text{ م}$$

Δ أ جـ ء :

$<$ (جـ) = ٩٠ ـ ٥٦ = ٣٤°

$$\frac{\text{أ ء}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ء}}$$

$$\frac{٣,٤}{\text{جا ٣٤}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٢٢}}$$

$$\text{أ جـ} = \frac{٣٠,٤ \times \text{جا٢٢}}{\text{جا٣٤}}$$

أ جـ = ٢٠,٣ م

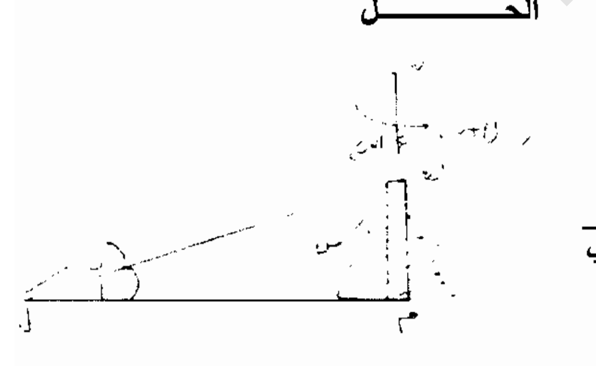
∴ ارتفاع البرج = ٢٠,٣ م

مثال:

برج ارتفاعه (ع) مقام على قمة جبل ارتفاعه س عن سطح الأرض ومن نقطة على سطح الأرض وجد أن الجبل يقابل زاوية مقدارها أ والبرج يقابل زاوية مقدارها ب

اثبت أن : ارتفاع الجبل = $\frac{\text{جا أ جتا (أ + ب) ع}}{\text{جا ب}}$

الحـــــــل



Δ ن م ل

ق ($<$ ن) = ٩٠ ـ (أ + ب)

Δ ن هـ ل

$$\frac{\text{هـ ل}}{\text{جا(٩٠ - (أ + ب))}} = \frac{\text{ع}}{\text{جاب}}$$

$$\therefore \frac{\text{هـ ل}}{\text{جتا(أ + ب)}} = \frac{\text{ع}}{\text{جاب}}$$

$$\therefore \text{هـ ل} = \frac{\text{جتا(أ + ب)ع}}{\text{جاب}} \leftarrow (١)$$

∴ Δ هـ م ل :

$$جا\,أ = \frac{س}{هـ\,ل}$$

∴ س = جا أ × هـ ل

بالتعويض في (١)

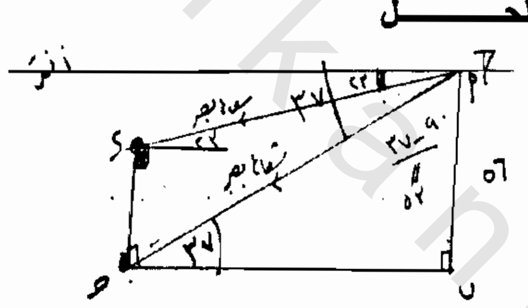
$$\therefore س = \frac{جا\,أ \times ع \times جتا(أ + ب)}{جا\,ب}$$

النوع الثالث

مثال:

رصد زاويتي انخفاض لجسم منخفض من مكان أعلى من قمة برج ارتفاع ٥٦ متر رصدت زاوية انخفاض قمة وقاعدة برج آخر فكانت ٢٣ ، ٣٧° احسبي ارتفاع البرج الثاني والبعد الأفقي بين البرجين .

الحـــــل



Δ أ ب جـ

$$\frac{٥٦}{جا\,٣٧} = \frac{أ\,جـ}{جا\,٩٠} = \frac{ب\,جا}{جا\,٥٣}$$

$$أ\,جـ = \frac{٥٦ \times جا\,٩٠}{جا\,٣٧} = ٩٣\ م$$

$$ب\,جـ = \frac{٥٦ \times جا\,٥٣}{جا\,٣٧} = ٧٤,٣\ م$$

في Δ أ جـ ء

ق (> أ) = ٣٧ ـ ٢٣ = ١٤°

ق (> ء) = ٩٠ + ٢٣ = ١١٣°

$$\therefore \frac{ء\,جـ}{جا\,١٤} = \frac{أ\,جـ}{جا\,١١٣}$$

$$\frac{ء\,جـ}{جا\,١٤} = \frac{٩٣}{جا\,١١٣}$$

$$\therefore ء\,جـ = \frac{٩٣ \times جا\,١٤}{جا\,١١٣}$$

∴ ء جـ = ٢٤,٤ م

مثال:

من قمة برج ارتفاعه ١١٦,٥ مترا عن سطح الأرض وجد أن زاويتي انخفاض سيارتين على الطريق الأفقي المار بقاعدة البرج هما ١٨´ ٤٦° ، ٣٦´ ٢١° أوجد البعد بين السيارتين .

الحـــــل

جـ أ ء = ١٨´ ٤٦° ـ ٣٦´ ٢١°

= ٤٢´ ٢٤°

Δ أ ب جـ القائم في ب

$$\text{جا جـ} = \frac{١١٦,٥}{\text{أ جـ}}$$

$$\therefore \text{أ جـ} = \frac{١١٦,٥}{\text{جا } ١٨' \ ٤٦^\circ}$$

Δ أ جـ ء :

$$\frac{\text{جـ ء}}{\text{جا } ٤٢' \ ٢٤^\circ} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ٣٦' \ ٢١^\circ}$$

$$\therefore \text{جـ ء} = \frac{١١٦,٥ \times \text{جا } ٤٢' \ ٢٤^\circ}{\text{جا } ٣٦' \ ٢١^\circ}$$

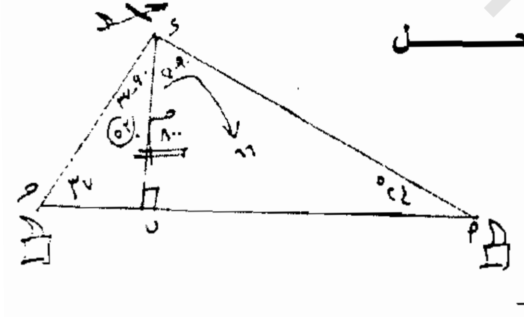
$$= \frac{١١٦,٥ \times \text{جا } ٤٢' \ ٢٤^\circ}{\text{جا } ١٨' \ ٤٦^\circ \times \text{جا } ٣٦' \ ٢١^\circ}$$

$$= ١٨٢,٩$$

∴ البعد بين السيارتين = ١٨٣ متر تقريبا

مثال:

طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر من سطح البحر رصدت زاويتي انخفاض سفينتان فكانتا ٢٤° ، ٣٧° احسب البعد بين السفينة إذا علمت أن مسقط الطائرة يقع بين السفينتين .



الحـــــــل

Δ أ ب ء

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٦٦} = \frac{٨٠٠}{\text{جا } ٢٤}$$

$$\text{ا ب} = \frac{٨٠٠ \times \text{جا } ٦٦}{\text{جا } ٢٤} = ١٧٩٦,٨ \text{ متر}$$

$$\Delta \text{ ء ب جـ} \quad \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٥٣} = \frac{٨٠٠}{\text{جا } ٣٧}$$

$$\text{ب جـ} = \frac{٨٠٠ \times \text{جا } ٥٣}{\text{جا } ٣٧} = ١٠٦١,٦ \text{ متر}$$

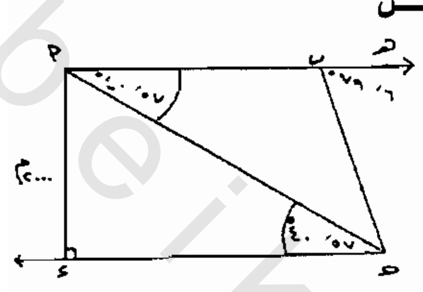
البعد بين السفينتين = أ ب + ب جـ = ١٧٩٦,٨ + ١٠٦١,٦

= ٢٨٥٨,٤ متر

مثال:

رصد طيار معسكرا وهو على ارتفاع ٢٠٠٠ م عن سطح البحر فوجد أن قياس زاوية انخفاض ٥٧´ ٠ ٥٤ وبعد أن سار دقيقتين وهو على نفس الارتفاع متجها نحو المعسكر وقبل أن يصله وجد أن قياس زاوية انخفاض المعسكر أصبحت ٧´ ٥٧٩ . فما سرعة الطيار بالمتر / الثانية ؟

الحـــــــــل



أ موضع الطيار الأول.

ب موضع الطيار بعد دقيقتين ، جـ المعسكر

ب أ جـ هي زاوية انخفاض جـ للموضع الأول

هـ ب جـ هي زاوية انخفاض جـ للموضع الثاني

ق(ب أ جـ) = ق (أ جـ ء) = ´57 ٠ ٥٤° بالتبادل

ق (ب جـ ء) = ق (جـ ب هـ) = ٦´ ٧٩° بالتبادل

∴ ق (أ جـ ب) = ٦´ ٧٩° - ٥٧´ ٠ ٥٤° = ٩´ ٣٨°

Δ أ ء جـ القائم فيه جا (أ جـ ء) = $\frac{\text{أد}}{\text{أجـ}}$

∴ أ جـ = $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا (< أ جـ ء)}} = \frac{٢٠٠٠}{\text{جا (٥٧´ ٠ ٥٤°)}} = ٣٠٥١,٦$

ق (أ ب جـ) = ١٨٠ - (٦´ ٧٩°) = ٥٤´ ١٠٠°

Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا (< أ ب جـ)}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا (< أ جـ ب)}} = \frac{٣٠٥١,٦}{\text{جا (٥٤´ ١٠٠°)}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا (٩´ ٣٨°)}}$

ا ب = $\frac{\text{٣٠٥١,٦ جا ٩´ ٣٨°}}{\text{جا ٥٤´ ١٠٠°}} = ١٩٢٠$

سرعة الطيار بعد دقيقتين = $\frac{١٩٢٠}{٦٠\times٢} = ١٦$ م / ث

مثال:

برج به فتحتان أ ، ب في مستوى رأسي واحد المسافة بينهما ٣,٥ م رصدت الفتحتان من النقطة جـ الواقعة في المستوى الأفقي المار بقاعدة البرج فكان قياسا زاويتي أرتفاعهما هما ٣٠´ ٥٧° ، ٤٨´ ١٢° على الترتيب . أوجد بعد النقطة جـ عن قاعدة البرج ($\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مستقيمة راسية)

الحـــــــــل

ق (< أ) = ١٨٠ – (٩٠ + ٤٨ ′ ١٢ °) = ١٢ ′ ٧٧ °

ق (< أ جـ ب) = ٤٨′١٢° – ٣٠ ′ ٧° = ١٢ ′ ٥٥°

∆ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا (< أ جـ ب)}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا (< أ)}}$

$\frac{\text{٣,٥}}{\text{جا ١٢ ′ ٥٥°}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ١٢ ′ ٧٧°}}$

∴ ب جـ = $\frac{\text{٣,٥ جا ١٢ ′ ٧٧°}}{\text{جا ١٢ ′ ٥٥°}}$ = ٣٧,٧ م

∆ ب جـ ء القائم

∴ جتا (< ب جـ ء) = $\frac{\text{ء جـ}}{\text{ب جـ}}$

∴ ء جـ = ب جـ جتا (< ب جـ ء)

= ٣٧,٣ جتا ٣٠ ′ ٧° = ٣٧ م .

النوع الرابع

مثال:

رصد زاوية ارتفاع وانخفاض معا من شرفة منزل يرتفع عن سطح الأرض ٨ متر رصدت زاويتي ارتفاع وانخفاض برج مقابل فكانتا ٣٧ ° ، ١٨ ° احسب :

- البعد بين المنزل والبرج   - ارتفاع البرج

الحـــــــــل

∆ أ ب جـ

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا أ}}$

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٩٠}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ١٨}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٧٢}}$

أ جـ = $\frac{\text{٨ جا ٩٠}}{\text{جا ١٨}}$ = ٢٤,٦ متر (البعد بين المنزل والبرج)

في ∆ أ جـ ء

$$\frac{د\,جـ}{جا\ ا} = \frac{ا\,جـ}{جا\ د}$$

$$\therefore \frac{ء\,جـ}{جا\ ٥٥} = \frac{٢٥,٨}{جا\ ٥٣}$$

$$\therefore ء\,ج = \frac{٢٥,٨ \times جا\ ٥٥}{جا\ ٥٣}$$

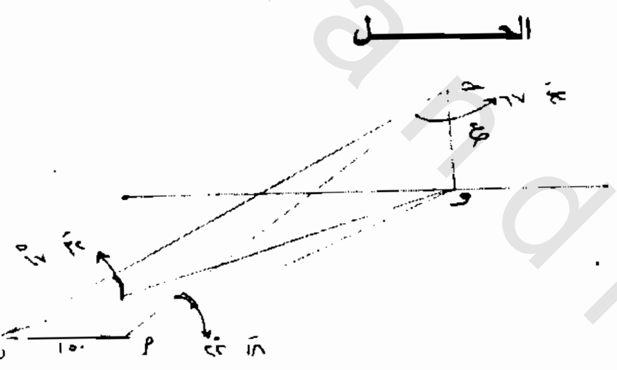
∴ ء ج = ٢٦,٤ متر

ارتفاع البرج = ٢٦,٤ متر

مثال:

شاهد رجل قمة مئذنة تقع شماله فوجد أن زاوية ارتفاعها ´18 °٢٢ ولما سار مسافة ١٥٠متر جنوبا وجد أن زاوية ارتفاع قمة المئذنة أصبحت ´32 °١٧ فما ارتفاع المئذنة .

الحـــــــل



و ا = ع طا ´42 °٦٧

= ٢,٤٣٨٢ ع

و ب = ع طا ´28 °٧٢

= ٣,١٦٥٨ ع

ب ا ⊥ ا و

Δ و ا ب قائم :

∴ و ب^{٢} = و ا^{٢} ـ ا ب^{٢}

ع^{٢} (٣,١٦٥٨)^{٢} = ع^{٢} (٢,٤٣٨٢)^{٢} + ١٥٠^{٢}

$$ع^{٢} = \frac{٢٢٥٠٠}{٤,٠٧٧٢} = ٥٥١٨,٠٤٩$$

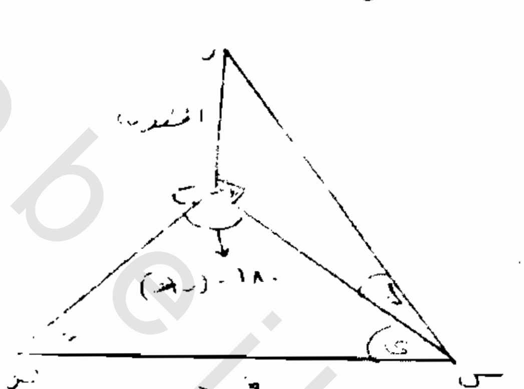
∴ ع = ٧٢,٢٨

مثال:

س ، ص نقطتان في المستوى الأفقي المار بنقطة ع حيث ع قاعدة مئذنة قمتها ن ، ع ∉ ص´ س´ وكان س ص = ف ، ق (< س ص ع) = هـ ، ق (< ص س ع) = ى وقياس زاوية ارتفاع قمة المئذنة من س = ل°

اثبت أن : ارتفاع المئذنة = (ف جا هـ طا ل) / (جا(ى + هـ))

الحـــــــــل



Δ س ع ن :

طا ل = ع / س ع

∴ ع = س ع طا ل ← ١

Δ س ص ع :

ف / جا(ى + هـ) = س ع / جا هـ

∴ س ع = (ف جا هـ) / (جا(ى + هـ)) ← ٢

من ١ ، ٢

∴ ع (ارتفاع البرج) = (ف جا هـ طا ل) / (جا(ى + هـ))

<u>مثال:</u>

شاهد رجل من نقطة عند سطح تل أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٢َ ٢٧ْ ولما صعد نجو التل مسافة ٢٠٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ١٧ْ وجد أن مقياس زاوية ارتفاع قمة التل ١٥َ ٢٦ْ . احسب ارتفاع التل .

الحــــــل

ق (س ء جـ) = ١٨٠ ـ ١٧ = ١٦٣

ق (أ ء جـ) = ٣٦٠ ـ (١٦٣ + ١٥َ ٢٦ْ)

= ٤٥َ ١٦٠ْ

ق (ء أ جـ) = ١٨٠ ـ (٤٥َ ١٦٠ْ + ١٢َ ١٠ْ)

= ٣َ ٩ْ

Δ أ جـ ء

أ جـ / جا ٤٥َ ١٦٠ْ = ٢٠٠٠ / جا ٣َ ٩ْ

∴ أ جـ = (٢٠٠٠× جا ٤٥َ ١٦٠ْ) / (جا ٣َ ٩ْ) = ٤١٠١,٩٧

Δ أ ب جـ

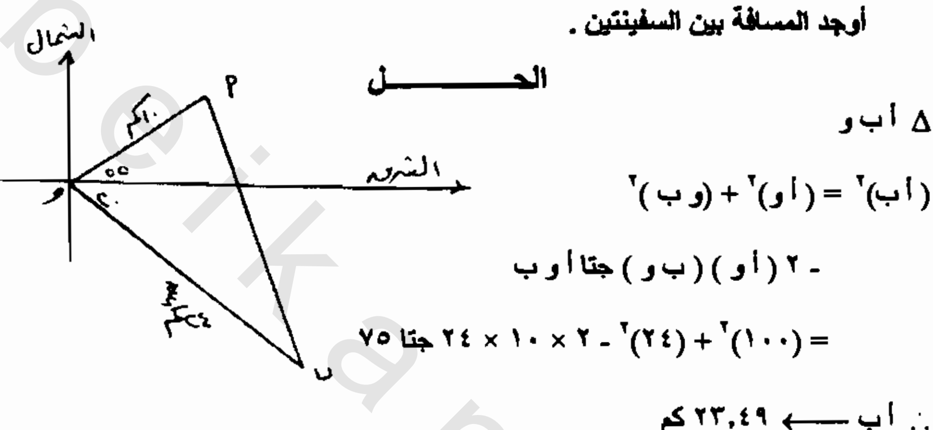
أ جـ / جا٩٠ = ٢٠٠٠ / جا ١٢َ ٢٧ْ

∴ أ ب = ٤١٩١,٩٧ × جا ١٢ً ٢٧°

= ١٩١٦ وهو ارتفاع البرج

مثال:

تحركت سفينة من نقطة ما في اتجاه ٧٠° شرق الجنوب مسافة ٢٤ كم وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى في اتجاه ٥٥° شمال الشرق مسافة ١٠ كم . أوجد المسافة بين السفينتين .



الحـــــل

Δ أ ب و

(أ ب)^{٢} = (أ و)^{٢} + (و ب)^{٢}

- ٢ (أ و) (ب و) جتا أ و ب

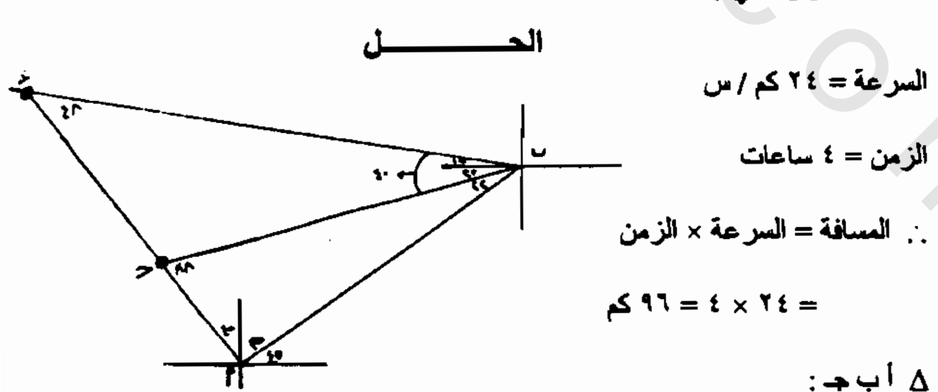
= (١٠٠)^{٢} + (٢٤)^{٢} - ٢ × ١٠ × ٢٤ جتا ٧٥

∴ أ ب ⟵ ٢٣,٤٩ كم

مثال:

سفينة تسير نحو الشمال الشرقي بسرعة ٢٤ كم / ساعة شاهد راكب فيها نقطتين ثابتين تجاه ٢٥° غرب الشمال وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت في اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى في اتجاه ١٧° شمال الغرب - أوجد البعد بين النقطتين علما بان النقطتين والرجل في مستوى أفقي واحد .

الحـــــل



السرعة = ٢٤ كم / س

الزمن = ٤ ساعات

∴ المسافة = السرعة × الزمن

= ٢٤ × ٤ = ٩٦ كم

Δ أ ب جـ :

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٧٠}} = \frac{\text{٩٦}}{\text{جا ٨٨}}$$

$$\therefore \text{ب جـ} = \frac{\text{٩٦} \times \text{جا ٧٠}}{\text{جا ٨٨}} = \text{٩,٣} \leftarrow \text{١}$$

Δ ب جـ ء :

$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٤٨}} = \frac{\text{جا ء}}{\text{جا ٤٠}}$$

$$\therefore \text{جـ ء (البعد بين النقطتين)} = \frac{\text{ب جـ جا ٤٠}}{\text{جا ٤٨}} \leftarrow \text{٢}$$

بالتعويض من ١ في ٢

$$\therefore \text{جـ ء} = \frac{\text{٩,٣} \times \text{جا ٤٠}}{\text{جا ٤٨}} \cong \text{٨}$$

تمارين (٩)

١- قاس شخص زاوية ارتفاع قمة منزل فوجدها ١٢´ ٢٧° ثم سار مسافة ١٦ متر متجهاً نحو المنزل وقاس زاوية ارتفاع قمة المنزل مرة أخري فوجدها ٤٩´ ٣٥° - أوجد ارتفاع المنزل .

٢- من نقطة في المستوي الأفقي المار بقاعدة تل رصد شخص قمة تل فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٥´ ٤٢° ولما سار جهة التل مسافة ٢٣٥ متر ورصد قمة التل مرة ثانية فوجد زاوية ارتفاعها ٣٠´ ٦٧° - أحسب ارتفاع التل .

٣- من قمة صخرة ارتفاعها ٧٠ متر رصد قاربين بزاويتي انخفاض ٢٠° ، ٤٥°- أوجد البعد بين القاربين علماً القاربين وقاعدة الصخرة في مستوي أفقي واحد.

٤- رصد شخص من نقطة علي سطح الأرض قمة برج رأسي فوجد أن قياس زاويةارتفاع قمة البرج تساوي ٣٥´ ١٢° وعندما سار مسافة ٧٥ متر نحو البرج وجد أن زاوية ارتفاع قمة البرج أصبح مقاسها ٢٨´ ١٧° - أوجد ارتفاع البرج من سطح الأرض .

٥- من نقطة علي سطح الأرض رصد رجل زاويتا ارتفاع أعلي وأسفل نقطة من سارية علم مثبتة رأسياً فوق سطح منزل فوجدهما ٢٦´ ٥٤° ، ١٢´ ٤٣° فإذا كان طول السارية ٨,٢٥ متر - فأوجد ارتفاع المنزل .

٦- قلعة ارتفاعها ٢٠ متر فوق قمة تل فإذا كان قياس زاويتا قمة القلعة وقاعدتها من نقطة علي سطح الأرض هما ٢٤´ ٥٦٥ ، ٥٣٨ - إحسب ارتفاع التل .

٧- برجان رأسيان البعد الأفقي بينهما ٦٠متر وزاوية أنخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثاني هي ٥٣٠ - أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثاني ١٥٠متر .

٨- برج ارتفاعه ٣٠متر مقام فوق جبل – فإذا كانت زاويتاارتفاع قمة البرج وقاعدته من نقطة علي سطح الأرض هما ١٢´ ٥٦٧ ، ٥٣٥ - أوجد ارتفاع الجبل .

٩- رصد طيار في وقت واحد محطتين علي سطح الأرض أ ، ب المسافة بينهما ١٥٠٠متر فوجد أن قياس زاويتي أنخفاضيتهما ٥٤٨ ، ٥٥٧ فإذا كانت الطائرة والمحطتين في مستوي رأسي واحد – أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض علماً بأن مسقط الطائرة علي الأرض يقع علي أ ب .

١٠- من قمة برج قيست زاويتي أنخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكانتا ٢٧´ ٥٣، ٥٢´ ٥٥٧ علي الترتيب – اوجد ارتفاع البرج إذا كان ارتفاعع المئذنة ٣٧متر .

١١- من قمة صخرة قيست زاويتا أنخفاض علامتين علي الأرض البعد بينهما كيلو متر واحد فوجدتا ٥٧٤ ، ٥٥٢ علي الترتيب وفي نفس الأتجاه شرق الصخرة – أوجد ارتفاع الصخرة .

١٢- برج به فتحتان س،ص في خط رأسي واحد المسافة بينهما ١٥متر رصدت الفتحتان من النقطة جـ الواقعة في المستوي الأفقي المار بقاعدة البرج فكانت زاويتا ارتفاعهما ٢٨´ ٥١١ ، ١٩´ ٥١٥ - أوجد بعد جـ عن قاعدة البرج .

١٣- أراد رجل أن يعين ارتفاع قمة تل فأختار نقطتين ب ، جـ في مستوي قاعدة التل البعد بينهما ٥٠٠متر ثم رصد نقطة أ علي قمة التل فكانت < أ ب جـ=٥١٢٧ ، < أجـ ب=٥٣٣ وزاوية ارتفاع نقطة أ من الموقع ب هي ١٤´ ٥٥ - أحسب ارتفاع التل .

١٤- أ ، ب نقطتان المسافة بينهما ١٢٠قدماً ، جـء برج قاعدته جـ تقع في المستوي الأفقي المار بالنقطتين أ ، ب . رصدت قمة البرج ء من نقطة أ فكانت زاوية ارتفاعها ٣٨´ ٥١٢ فإذا كانت < ب أ جـ = ١٢´ ٥٧٧ ، < أ ب جـ = ٣٠´ ٥٦٥ فأوجد ارتفاع البرج لأقرب قدم .

١٥- من قمة منزل ارتفاعه ١٥متر كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج ٦٧° ، قياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٥° . أوجد ارتفاع البرج علماً بأن قاعد البرج وقاعدة المنزل في مستوي أفقي واحد .

١٦- شاهد رجل من نقطة عند سطح تل أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٤٢° ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠متر علي مستوي يميل علي الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وجد أن مقياس زاوية ارتفاع قمة التل ٥٨° . احسب ارتفاع التل .

١٧- وقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسم عند نقطة جـ التي تبعد ٦٠متر شرق ب عندما سار من ب إلي أ في اتجاه ١٠° شمال الشرق وجد أن النقطة جـ في اتجاه ١٥° جنوب الشرق من أ – أوجد بعد جـ من أ .

١٨- بدأت قاذفة قنابل رحلة لها من مدينة (أ) قاصدة مدينة (ب) فطارت في مستوي أفقي في إتجاه ٣٢° ٤٢´ شرق الشمال فوصلت (ب) بعد أن قطعت مسافة ٣٨٥ ميلاً ثم غيرت اتجاهها بعد ذلك وطارت في اتجاه ٤١° ٣٦´ غرب الشمال فوصلت إلي مدينة (جـ) بعد أن قطعت مسافة ٥١٠ ميلاً فإذا أرادت العودة من (جـ)إلي (أ) من أقصر طريق ففي أي اتجاه تطير ؟ .

النسب المثلثية للزاوية المركبة (أ - ب) ، (أ + ب)

١) جتا (أ - ب) = جتا أ جتا ب = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

٢) جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

٣) ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

٤) جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب

٥) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب

٦) ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + جا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$

النوع الأول من المسائل إيجاد النسب المثلثية:

مثال: إذا كانت ظا أ = $\frac{٥}{١١}$ ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$

حيث: ٠ < أ < $\frac{ط}{٢}$ ، ١٨٠° < ب < ٢٧٠°

الحل:

١٣ ، ٥ ، ١٢ ، أ

٥ ، ٣ ، ٤ ، ب

جا -
جتا -
ظا +

ظا أ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{٥}{١٢}$ ، ظا ب = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ = $\frac{٣}{٤}$

جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب = $\frac{٥}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} - \frac{١٢}{١٢} \times \frac{-٣}{٥}$

جا (أ - ب) = $\frac{-٢٠}{٦٥} + \frac{٣٦}{٦٥}$ ∴ جا (أ - ب) = $\frac{١٦}{٦٥}$

∴ قتا (أ - ب) = $\frac{٦٥}{١٦}$

جتا (أ - ب) = جتا أ . جتا ب + جا أ جا ب

$$= \frac{١٢}{١٣} \times \frac{-٤}{٥} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{-٣}{٥}$$

$$= \frac{-٤٨}{٦٥} \quad \frac{-١٥}{٦٥}$$

جتا (أ - ب) = $\frac{-٦٣}{٦٥}$ ومنها قا (ا - ب) = - $\frac{٦٥}{٦٣}$

ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$ = $\dfrac{\frac{٥}{١٢} + \frac{٣}{٤}}{١ + \frac{٥}{١٢} \times \frac{٣}{٤}}$

ظا (أ - ب) = $\frac{٢٠ - ٣٦}{٤٨ + ١٥}$ ظا (أ - ب) = $\frac{-١٦}{٦٣}$

<u>ملاحظات</u>:-

١) قتا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ + ب)}}$

٢) قا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{جتا (أ + ب)}}$

٣) ظتا (أ + ب) = $\frac{١}{\text{ظا (أ + ب)}}$ = $\frac{\text{١ - ظا أ ظا ب}}{\text{ظا أ + ظا ب}}$

٤) جتا أ ي زاوية = - جتا المكملة لها

٥) جا أي زاويـة = جا مكملتها

٦) ظا أي زاويـة = - ظا المكملة لها

<u>مثال</u>: إذا كان: جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا ب = $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{ط}{٢} < أ < ب < ط$

أوجد: قتا (أ - ب)

<u>الحـــــــل</u>:

∵ قتا (أ - ب) = $\frac{١}{\text{جا (أ - ب)}}$

∴ جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب

$$= \frac{٤}{٥} \times -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \left(\frac{-٣}{٥}\right)\frac{١}{٢}$$

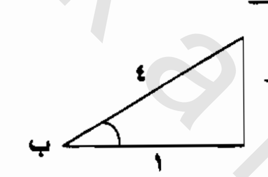
$$= \frac{٤\sqrt{٣}}{١٠} + \frac{٣}{(-١٠)} = \frac{-٤\sqrt{٣} + ٣}{١٠}$$

$$\therefore \text{قتا } (أ - ب) = \frac{١٠}{-٤\sqrt{٣} + ٣}$$

مثال: أ ب جـ مثلث حاد الزاوية فيه جتا أ = $\frac{١}{٣}$ ، جتا ب = $\frac{١}{٤}$

أوجد جتا (أ + ب) ، جتا جـ

الحـــــــل



$\because$ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ا

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٤} - \frac{\sqrt{٨}}{٣} \times \frac{\sqrt{١٥}}{٤}$$

$$= \frac{١}{١٢} - \frac{١٢٠}{١٢} = \frac{١ - \sqrt{١٢٠}}{١٢}$$

$\because$ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

$\therefore$ أ + ب تكمل جـ

$\therefore$ جتا (أ + ب) = - جتا جـ

$\therefore$ جتا جـ = $\frac{-١ + \sqrt{١٢}}{١٢}$

النوع الثانى من المسائل:-

إيجاد النسب المثلثية لـ بعض الزاوايا بأستخدام الزوايا الخاصة الزوايا:

١٥°، ٧٥°، ١٠٥

١) $15 = 45 - 30 = 60 - 45$

٢) $75 = 45 + 30$

٣) $105 = 60 + 45$

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة جا١٥ ، جتا١٥ ، ظا١٥

الحل: جا١٥ = جا (٦٠ - ٤٥) = جا٦٠ جتا٤٥ - جتا٦٠ جا٤٥

$\therefore$ ١) جا١٥ $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ جا١٥ $= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

٢) جتا١٥ = جتا (٦٠ - ٤٥) = جتا ٦٠ جتا ٤٥ + جا ٦٠ جا ٤٥

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

جتا١٥ $= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

٣) ظا ١٥ = ظا (٦٠ - ٤٥) - $\frac{\text{ظا ٦٠ - ظا ٤٥}}{\text{١ + ظا٦٠ ظا ٤٥}}$

ظا ١٥ $= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 + 1}$

ظا ١٥ $= \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$

مثال: برهن أن: $\sqrt{2}$ ٢ جتا ٧٥ = $\sqrt{3} - 1$

الحـــــل

∵ جتا ٧٥ = جتا (٤٥ + ٣٠)

= جتا ٤٥ جا ٣٠ - جا ٤٥ جتا ٣٠

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

∴ الأيمن = $2\sqrt{2}$ جتا ٧٥ = $2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

= $\sqrt{3} - 1$ = الأيسر

مثال: أثبت أن: جا ٣٥ + جتا ٦٥ = جتا ٥

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ + ٥) + جتا (٦٠ + ٥)

= جا ٣٠ جتا ٥ + جتا ٣٠ جا ٥ + جتا ٦٠ جتا ٥ - جا ٦٠ جا ٥

= $\frac{1}{2}$ جتا ٥ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا ٥ + $\frac{1}{2}$ جتا ٥ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا ٥

= جتا ٥ = الأيسر

مثال: أثبت أن: جا ٢٠ + جا ٤٠ = جا ٨٠

الحـــــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ - ١٠) + جا (٣٠ + ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ - جتا٣٠ جا١٠ + جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠

= $\frac{1}{2}$ جتا ١٠ + $\frac{1}{2}$ جتا ١٠ = جتا ١٠ ⇐ (١)

الطرف الأيسر = جا ٨٠ = جا (٩٠ - ١٠) = جتا ١٠ ⇐ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال: بدون الحاسبة

أثبت أن مهما كانت قيمة أ يكون $\sqrt{2}$ جتا ($\frac{ط}{4}$ - أ) = جتا أ + جا أ

الحـــــل

$\sqrt{2}$ [جتا ٤٥ - أ] = $\sqrt{2}$ [جتا أ جتا ب + جا أ جا ب]

= $\sqrt{2}$ [جتا ٤٥ جتا أ + جا ٤٥ جا أ]

= $\sqrt{2}$ [$\frac{1}{\sqrt{2}}$ جتا أ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جا أ]

= جتا أ + جا أ

مثال: بدون الحاسبة أثبت أن: جا ٤٠ + جتا ٧٠ = جتا ١٠

الحـــل

الطرف الأيمن = جا (٣٠ + ١٠) + جتا (٦٠ + ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠ + جتا٦٠ جتا١٠ - جا٦٠ جا١٠

= $\frac{1}{2}$ جتا١٠ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا١٠ + $\frac{1}{2}$ جتا١٠ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جا١٠

= جتا١٠ = الأيسر

النوع الثالث: التطبيق العكسي للقوانين:

بدون الحاسبة أوجد قيمة.

١) جا ٧٥ جتا ١٥ - جتا ٧٥ جا ١٥

٢) جتا ٣٨ جتا ٨ + جا ٣٨ جا ٨

٣) $\frac{\text{ظا ٦٥ - ظا ٢٠}}{\text{١ + ظا ٦٥ ظا ٢٠}}$

الحـــــل

مفكوك ١) جا (٧٥ - ١٥) = جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مفكوك ٢) جتا (٣٨ - ٨) = جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مفكوك ٣) هو ظا (٦٥ - ٢٠) = ظا ٤٥ = ١

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة: جا ٤٠ جتا ١٠ + جا ٥٠ × جا ١٠

الحل: تعدل إلى جا ٤٠ جتا ١٠ + جتا ٤٠ جا ١٠

= جا (أ + ب)

= جا (٤٠ + ١٠) = جا ٥٠

مثال: أثبت أن: ظا ٥٠ = $\frac{\text{١ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٥}}$ بدون الحاسبة

الحل: ظا ٥٠ = ظا (٤٥ + ٥) = $\frac{\text{ظا ٤٥ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٤٥ ظا ٥}}$

ظا ٥٠ = $\frac{\text{١ + ظا ٥}}{\text{١ - ظا ٥}}$

مثال: أثبت أن: جا (س + ٧٠) + جتا (٣٠ - س) + جتا (س + ٧٠) جا (٣٠ - س)

لا تتوقف على قيمة س.

الحل: المقدار = جا [(س + ٧٠) + (٣٠ - س)]

= جا (أ + ب)

= جا (س + ٧٠ + ٣٠ - س) = جا ١٠٠

∴ المقدار لا يتوقف على قيمة س.

مثال: برهن أن:

جتا (س - ١١٠) جتا (س + ٧٠) + جا (س - ١١٠) جا (س + ٧٠) = -١

الحل: المقدار على صورة جتا (أ - ب)

∴ جتا [(س - ١١٠) - (س + ٧٠)]

= جتا (س - ١١٠ - س - ٧٠)]

= جتا (-١٨٠) = جتا ١٨٠

= -١ = الأيسر

مثال: بدون الحاسبة أوجد قيمة: جتا ٧٥ جتا ١٥ - جا ٧٥ × جا ٧٥

الحـــــل

= جتا٧٥ جتا ١٥ - جا ٧٥ جا ١٥

= جتا (٧٥ + ١٥) = جتا ٩٠ = صفر

النوع الرابع: إثبات صحة علاقات:

مثال: أثبت أن: $\frac{\text{جا }(أ+ب)+\text{جا }(أ-ب)}{\text{جتا }(أ+ب)+\text{جتا }(أ-ب)}=\text{ظا }أ$

الحل: $\frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب + جا أ جتا ب - جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب - جا أ جا ب + جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}}$

$=\frac{\text{٢جا أ جتا ب}}{\text{٢جتا أ جتا ب}}=\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}=\text{ظا أ}=\text{الأيسر}$

مثال: إذا كانت أ ، ب قياسا زوايتين حادتين، ظا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٩}$

أثبت بدون أستخدام الآلة الحاسبة أن: أ + ب = ٤٥

الحل: إذا أمكن أثبات أن ظا (أ + ب) = ١ فإن أ + ب = ٤٥°

$\text{ظا }(أ+ب)=\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}=\frac{\frac{٤}{٥}+\frac{١}{٩}}{١-\frac{٤}{٥}\times\frac{١}{٩}}$

$=\frac{\frac{٣٦+٥}{٤٥}}{\frac{٤٥-٤}{٤٥}}=\frac{٤١}{٤١}=١$

مثال: أثبت أن: $\text{ظا }(٤٥-\text{جـ})=\frac{\text{جتا جـ - جا جـ}}{\text{جتا جـ + جا جـ}}$

الحل: الأيمن $=\frac{\text{ظا ٤٥ - ظا جـ}}{\text{١ + ظا ٤٥ ظا جـ}}$

$=\frac{١-\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}{١+١\times\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}}$ بضرب البسط والمقام في جتا جـ

∴ ظا (٤٥ - جـ) = $\frac{\text{جتا جـ - جا جـ}}{\text{جتا جـ + جا جـ}}$ = الأيسر

مثال: أوجد قيمة أ ∈ [٠ ، ٣٦٠] التي تحقق المعادلة:

جا أ جتا ١٥ + جتا أ جا ١٥ = $\frac{١}{٢}$

الحـــــل

جا أ جتا ١٥ + جتا أ جا ١٥ = $\frac{١}{٢}$

جا (أ + ١٥) = $\frac{١}{٢}$

∵ جا موجب ∴ أ + ١٥ في الربع الأول

أ + ١٥ في الربع الثاني

∴ أ + ١٥ = ٣٠° أو أ + ١٥ = ١٥٠°

∴ أ = ١٥° أ = ١٣٥°

مثال: إذا كان: جا ١٠٥ جتا هـ - جتا ١٠٥ جا هـ = ١

أوجد قيمة هـ حيث هـ ∈] ٠ ، $\frac{ط}{٢}$ [

الحـــــل

الأيمن هو مفكوك جا (١٠٥ - هـ) = ١

الزاوية التي جيبها ١ هي ٩٠°

١٠٥ - هـ = ٩٠

١٠٥ - ٩٠ = هـ

هـ = ١٥°

تمرين (١٠)

١) إذا كان قا أ = $\frac{١٧}{٨}$ ، قتا ب = $\frac{٥}{٤}$ برهن: قتا (أ + ب) = $\frac{٨٥}{٧٧}$

٢) أ ب جـ مثلث فيه ظا أ = ٣ ، جا ب = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

أوجد: جتا (أ + ب) ثم برهن ق (جـ) = ٤٥°

٣) إذا كانت: أ ∈] ٠ ، $\frac{ط}{٢}$ [حيث جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ب ∈]ط ، $\frac{٣ط}{٢}$[

حيث ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$ أوجد قيمة: ظا (أ + ب) ، ظا (أ - ب)

٤) إذا كان: ظا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، ظا ب = $\frac{١}{١١}$ برهن أن: أ + ب = ٤٥°

٥) إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$ ، ظا جـ = $\frac{١}{٨}$

برهن: (أ) + (ب) + (جـ) = ٤٥°

٦) إذا كان ٥ جا أ + ٣ = ٠ ، حيث أ ∈]ط ، ٣ط[، جتا ب = $\frac{٧}{٢٥}$

حيث ب ∈] $\frac{٣ط}{٢}$ ، ٢ط[أوجد قيمة: قتا (أ - ب) ، قا (أ - ب) ، ظتا (أ - ب)

٧) المثلث أ ب جـ الحاد الزاوية إذا كان ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ظا ب = $\frac{١٢}{٥}$

اثبت أن: أ : ب : جـ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

٨) أثبت أن: جا ٢٣ + جتا ٥٣ = جتا ٧

٩) اثبت أن: ظا ٧٥ - ظا ٣٠ - ظا ٧٥ ظا ٣٠ = ١

١٠) أوجد قيمة: ظا $\frac{٧ط}{١٢}$

١١) أوجد قيمة: ظا ١٥ ، ظا $\frac{٧ط}{١٢}$

١٢) برهن أن: ظا ٥٥ = $\frac{١ + ظا ١٠}{١ - ظا ١٠}$

١٣) أوجد قيمة: جا ٣٧ جتا ٨ + جتا ٣٧ جتا ٨٢

١٤) جتا ١٠٥ جتا ١٥ + جا ١٠٥ جتا ٧٥

١٥) أوجد قيمة: $\frac{١ + ظا ٤٠ ظا ١٧٥}{ظا ٤٠ - ظا ١٧٥}$

١٦) جتا $\frac{٥ط}{١٢}$ جتا $\frac{ط}{١٢}$ - جا $\frac{٥ط}{١٢}$ جا $\frac{ط}{١٢}$

١٧) اختصر: $\frac{١ + ظا ١٥ ظا ١٥٠}{ظا ١٥ - ظا ١٥٠}$

١٨) أوجد قيمة: جا ٣٤ جتا ١١ + جتا ٣٤ جتا ٧٩

١٩) أوجد قيمة: $\frac{جتا ٤٢ جتا ١٢ + جا ٤٢ جا ١٢}{جا ٢٥ جتا ٣٥ + جتا ٢٥ جا ٣٥}$

٢٠) برهن: $\frac{جتا ٤٣ جتا ١٣ + جا ٤٣ جا ١٣}{جا ٣٠ ٢ ١٢° جتا ٣٠ ٢ ٣٢° + جتا ٣٠ ٢ ٣٢° جا ٣٠ ٢ ١٢°} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢١) أثبت أن: ظا (٤٥ + أ) = $\frac{جتا أ + جا أ}{جتا أ - جا أ}$

٢٢) إذا كان أ ، ب ، جـ زوايا مثلث فأثبت أن:
ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

٢٣) إذا كان جا (س + ص) = $\frac{٣}{٤}$ ، جا (س - ص) = $\frac{١}{٢}$

برهن أن: ظا س = ٥ ظا ص

٢٤) أثبت أن جا (أ + ب) جا (أ - ب) = جا^{٢}أ - جا^{٢}ب

٢٥) إذا كان ق(أ̂) + ق(ب̂) + ق(جـ) = $\frac{ط}{٢}$ فاثبت أن:

ظا أ ظا ب + ظا ب ظا جـ + ظا جـ ظا أ = ١

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

(١) جا٢أ = ٢ جا أ جتا أ

الأثبات: ∵ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب   بوضع أ = ب

∴ جا (أ + ب) = جا أ جتا أ + جتا أ جا أ

جا٢أ = ٢جا أ جتا أ

∴ جا ضعف أي زاوية = ٢ جا الزاوية × جتا الزاوية

ملحوظة: إذا وضعنا أ/٢ بدلاً من أ

∴ جا أ = ٢جا أ/٢ جتا أ/٢

(١) جتا٢أ = جتا²أ - جا²أ

= ١ - ٢جا²أ

= ٢جتا² - ١

الأثبات: جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب   بوضع أ = ب

جتا (أ + أ) جتا أ جتا أ - جا أ جا أ

∴ جتا٢أ = جتا²أ - جا²أ

، ∵ جا²أ = جتا²أ - ١

∴ جتا ضعف الزاوية = (١) جتا² الزاوية - جا² الزاوية

(٢) ٢جتا² الزاوية - ١

(٣) ١ - ٢ جا² الزاوية

ملحوظة: بوضع أ/٢ بدلا من أ   ∴ جتا أ = جتا² أ/٢ - جا² أ/٢

= ٢جتا² أ/٢ - ١

= ١ - ٢جا² أ/٢

(٣) ظا٢أ = $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^2\text{أ}}$

📖 __الإثبات:__ ظا٢أ = ظا (أ + أ)

= $\frac{\text{ظا أ + ظا أ}}{\text{١ - ظا أ ظا أ}}$ = $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^2\text{أ}}$

🔔 __ملحوظة:__ بوضع $\frac{\text{أ}}{\text{٢}}$ بدلا من أ ∴ ظا أ = $\frac{\text{٢ظا}\frac{\text{أ}}{\text{٢}}}{\text{١ - ٢ظا}^2\frac{\text{أ}}{\text{٢}}}$

__مثال:__ إذا كان ظا أ = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ [

أوجد: ١) جا٢أ   ٢) جتا ٢أ   ٣) ظا٢أ

__الحـــــــل__

(١) جا٢أ = ٢جا أ جتا أ

= ٢ × $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ × $\frac{\text{٤}}{\text{٥}}$ = $\frac{\text{٢٤}}{\text{٢٥}}$

(٢) جتا٢أ = جتا^{2}أ - جا^{2}أ

= $(\frac{\text{٤}}{\text{٥}})^2$ - $(\frac{\text{٣}}{\text{٥}})^2$ = $\frac{\text{١٦}}{\text{٢٥}}$ - $\frac{\text{٩}}{\text{٢٥}}$ = $\frac{\text{٧}}{\text{٢٥}}$

(٣) ظا٢أ = $\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^2\text{أ}}$ = $\frac{\text{٢} \times \frac{\text{٣}}{\text{٤}}}{\text{١ - }(\frac{\text{٣}}{\text{٤}})^2}$

= $\frac{\frac{\text{٦}}{\text{٤}}}{\text{١ - }\frac{\text{٩}}{\text{١٦}}}$ = $\frac{\frac{\text{٩}}{\text{٤}}}{\frac{\text{١٦ - ٩}}{\text{١٦}}}$ = $\frac{\frac{\text{٦}}{\text{٤}}}{\frac{\text{٧}}{\text{١٦}}}$

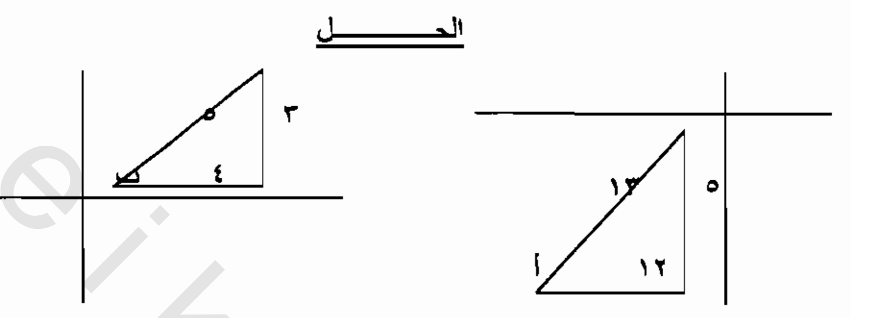
__مثال:__ إذا كان ظا أ = $\frac{\text{٥}}{\text{١٢}}$ حيث ١٨٠ < أ < ٢٧٠

جا ب = $\frac{٣}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{ط}{٢}$

احسب قيمة ما يلي (١) جا(٩٠ + ٢جـ)   (٢) جتا (١٨٠ - ٢ب)

(٣) جا (أ + ٢ب)   (٤) ظا (٢أ + ب)

<u>الحـــــــل</u>



(١) جا(٩٠ + ٢أ) = جا٩٠ جتا٢أ + جتا ٩٠ جا٢أ

= ١ × جتا٢أ + صفر × جا٢أ

= جتا٢أ + ٠

= جتا٢أ - جا^{٢} أ

= $(\frac{-١٢}{١٣})^{٢}$ - $(\frac{-٥}{١٣})^{٢}$ = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$ - $\frac{٢٥}{١٦٩}$ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$

(٢) جتا (١٨٠ - ٢ب) = جتا١٨٠ جتا٢ب + جا١٨٠ جا٢ب

= -١ جتا٢ب + صفر × جا٢ب

= - جتا٢ب

= - [جتا^{٢}ب - جا^{٢}ب]

= -[$(\frac{٤}{٥})^{٢}$ - $(\frac{٣}{٥})^{٢}$] = -[$\frac{١٦}{٢٥}$ - $\frac{٩}{٢٥}$] = $\frac{-٧}{٢٥}$

(٣) جا (أ + ٢ب) = جا أ جتا٢ب + جتا أ جا٢ب

∵ جتا ٢ب = جتا^{٢} ب - جا^{٢}ب = $\frac{٧}{٥}$

جا٢ب = ٢جا ب جتا ب = $٢ \times \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

∴ جا(أ + ٢ب) = $\frac{-٥}{١٣} \times \frac{٧}{٢٥} + \frac{-١٢}{١٣} \times \frac{٢٤}{٢٥}$

$= \frac{-٣٥}{١٣ \times ٢٥} - \frac{٢٨٨}{١٣ \times ٢٥} = \frac{-٣٢٣}{٣٢٥}$

(٤) ظا (٢أ + ب) = $\frac{\text{ظا٢أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا٢أ ظا ب}} =$

ظا٢ب = $\frac{\text{٢ظاب}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ب}} = \frac{٢ \times \frac{٥}{١٢}}{١ - (\frac{٥}{١٢})^{٢}} = \frac{\frac{١٠}{١٢}}{١ - \frac{٢٥}{١٤٤}}$

$= \frac{\frac{١٠}{١٢}}{\frac{١١٩}{١٤٤}} = \frac{١٠}{١٢} \times \frac{١٤٤}{١١٩} = \frac{١٢٠}{١١٩}$

∴ ظا(٢أ + ب) = $\frac{\frac{١٢٠}{١١٩} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١٢٠}{١١٩} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{٨٣٧}{١١٦}$

<u>مثال:</u> إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب زوايا حادة

اثبت أن (أ + ب) = ٤٥°

<u>الحـــــل</u>

نثبت أن ظا(أ + ٢ب) = ظا ٤٥ = ١

ظا (أ + ٢ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا٢ب}}{\text{١ - ظا أ ظا٢ب}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - (\frac{٣}{٤})^{٢}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{\frac{٢}{٣}}{\frac{٨}{٩}} = \frac{٣}{٤}$

∴ ظا ٢ب = $\frac{\text{٢ظا ب}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ب}}$

$$\therefore \text{ظا}(\text{أ} + ٢\text{ب}) = \frac{\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}} = \frac{\frac{٤ + ٢١}{٢٨}}{\frac{٢٨ - ٣}{٢٨}} = \frac{٢٥}{٢٥}$$

$\therefore$ ظا (أ + ٢ب) = ١ $\therefore$ أ + ٢ب = ٤٥°

مثال: إذا كان جا أ + جتا أ = $\frac{٧}{٦}$ أوجد قيمة جا٢أ ، جتا٢أ

الحل

$$(\text{جا أ} + \text{جتا أ})^٢ = \left(\frac{٧}{٦}\right)^٢$$

$$\text{جا}^٢\text{أ} + \text{جتا}^٢\text{أ} + ٢\text{جا أ جتا أ} = \frac{٤٩}{٣٦}$$

$$١ + ٢\ \text{جا أ جتا أ} = \frac{٤٩}{٣٦}$$

$$\therefore \text{جا٢أ} = \frac{٤٩}{٣٦} - ١ = \frac{٤٩ - ٣٦}{٣٦} = \frac{١٣}{٣٦}$$

إيجاد جتا٢ أ $\because$ جا^٢ ٢أ + جتا^٢ ٢أ = ١

$$\therefore \text{جتا}^٢\ ٢\text{أ} = ١ - \text{جا}^٢\ ٢\text{أ} = ١ - \left(\frac{١٣}{٣٦}\right)^٢$$

$$= \frac{(٣٦)^٢ - ١٦٩}{(٣٦)^٢} = \frac{١١٢٧}{١٢٩٦}$$

$$\therefore \text{جتا ٢أ} = \frac{١١٢٧}{١٢٩٦}$$

مثال: إذا كان جتا أ + جا أ = $\sqrt{\frac{٦}{٥}}$ أوجد: جا٢أ ، جتا٢أ ، ظا٢أ

الحـــــــل

∵ (جا أ + جتا أ) = $\frac{٦}{٥}$ بتربيع الطرفين

(جتا أ + جا أ)^{٢} = $\frac{٣٦}{٢٥}$ ∴ جتا^{٢} + جا^{٢}أ + ٢جا أ جتا أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$

١ + جا٢أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$

∴ جا٢أ = $\frac{٣٦}{٢٥}$ - ١ = $\frac{٣٦ - ٢٥}{٢٥}$ = $\frac{١١}{٢٥}$

جا٢أ = $\frac{١١}{٢٥}$

∴ جتا٢أ = $\frac{\sqrt{٥٠٤}}{٢٥}$ ، ظا٢أ = $\frac{١١}{\sqrt{٥٠٤}}$

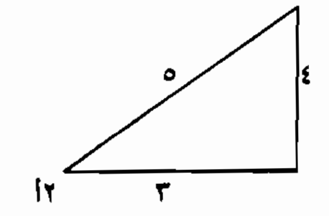
مثال: إذا كان جا أ + جتا أ = $\frac{٢}{٥}$

أوجد قيمة: جا٢أ ، جتا٢أ ، ظا٢أ ، جتا أ ، جا أ

الحـــــــل

∵ جا أ + جتا أ = $\frac{٢}{٥}$ بضرب الطرفين × ٢

∴ ٢جا أ + جتا أ = $\frac{٤}{٥}$ .. جا٢أ = $\frac{٤}{٥}$ (جا٢أ = ٢جا أ جتا أ)



جتا٢أ = $\frac{٣}{٥}$

∵ جتا٢أ = ١ - ٢جا^{٢}أ

$\therefore \frac{٣}{٥} = ١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{أ}$

$٢\text{جا}^{٢}\text{أ} = ١ - \frac{٣}{٥} \Leftarrow ٢\text{جا}^{٢}\text{أ} = \frac{٢}{٥} \Leftarrow \text{جا}^{٢}\text{أ} = \frac{١}{٥}$

$\therefore \text{جا أ} = \sqrt{\frac{١}{٥}}$

$\text{جتا}٢\text{أ} = ٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١$

$\frac{٣}{٥} = ٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١ \qquad \therefore ٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} = ١ + \frac{٣}{٥} = \frac{٨}{٥}$

$\therefore \text{جتا}^{٢}\text{أ} = \frac{٤}{٥} \Leftarrow \text{جتا أ} = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

التطبيق العكسي لقوانين ضعف الزاوية

نعلم أن: ١) $٢\text{جا أ جتا أ} = \text{جا}٢\text{أ}$ ٢) $\text{جتا}^{٢}\text{أ} - \text{جا}^{٢}\text{أ} = \text{جتا}٢\text{أ}$

٣) $٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١ = \text{جتا}٢\text{أ}$ ٤) $١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{أ} = \text{جتا}٢\text{أ}$

٥) $\frac{٢\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{أ}} = \text{ظا}٢\text{أ}$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة = $\frac{\text{جا}٣٥ \text{ جا}١٠ + \text{جتا}٣٥ \text{ جا}١٠}{٢\text{جا } 30' \; ٢٢° \text{ جتا } 30' \; ٢٢°}$

الحـــــــل

$\because$ المقدار على صورة $\frac{\text{جا}(٣٥ + ١٠)}{\text{جا}٢ \times 30' \; ٢٢°} = \frac{\text{جا}٤٥}{\text{جا}٤٥} = ١$

مثال: أوجد قيمة = $\frac{\text{جتا}٧٠ \text{ جتا}١٠ + \text{جا}٧٠ \text{ جا}١٠}{\text{جا}١٥ \text{ جتا}١٥}$ بدون استخدام الحاسبة

الحـــــل

نوضع المقدار على الصورة = $\frac{\text{٢[جتا٧٠ جتا١٠ + جا٧٠ جا١٠]}}{\text{٢جا١٥ جتا١٥}}$

= $\frac{\text{٢} \times \text{جتا(٧٠ - ١٠)}}{\text{جا٣٠}}$

= $\frac{\text{٢} \times \text{جتا٦٠}}{\text{جا٣٠}} = \frac{\text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{٢}$

مثال: بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

١) $\text{جتا}^{\text{٢}}\ \text{١٥} - \text{جا}^{\text{٢}}\ \text{١٥}$ ٣) $\text{٢جتا}\ \frac{\text{ط}}{\text{٨}} - \text{١}$

٢) $\text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{ط}}{\text{٨}}$ ٤) $\frac{\text{ظا } \text{٢٢}^\circ\ 30'}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\ \text{٢٢}^\circ\ 30'}$

الحـــــل

١) $\text{جتا}^{\text{٢}}\ \text{١٥} - \text{جا}^{\text{٢}}\ \text{١٥} = \text{جتا٢} \times \text{١٥}$

$= \text{جتا٣٠} = \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$

٢) $\text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{ط}}{\text{٨}} = \text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\ 30'\ \text{٢٢}^\circ$

$= \text{جتا ٢} \times 30'\ \text{٢٢}^\circ = \text{جتا٤٥} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

٣) $\text{٢جتا}^{\text{٢}}\ \frac{\text{ط}}{\text{٨}} - \text{١} = \text{٢جتا}^{\text{٢}}\ 30'\ \text{٢٢}^\circ - \text{١} = \text{جتا٤٥} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

٤) $\frac{\text{ظا } 30'\ \text{٢٢}^\circ}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\ 30'\ \text{٢٢}^\circ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \left(\frac{\text{٢ظا } 30'\ \text{٢٢}^\circ}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\ 30'\ \text{٢٢}^\circ} \right)$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{ظا٤٥} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{١} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

إثبات صحة بعض العلاقات

نعلم أن: ١ - ٢ جا^{٢}أ = جتا٢أ

٢جتا^{٢}أ - ١ = جتا٢أ

مثال: أثبت أن: $\frac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}}$ = ظتا جـ ومن ذلك أوجد قيمة ظتا ´30 ٥٢٢

الحـــــل

أولاً: $\frac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}} = \frac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{١ - [١ - ٢ جا}^{٢}\text{جـ]}}$

$= \frac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{١ - ١ + ٢ جا}^{٢}\text{جـ}} = \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}}$ = ظتا جـ

ثانياً: ظتا جـ = $\frac{\text{جا٢جـ}}{\text{١ - جتا٢جـ}}$

نضع جـ = ´30 ٥٢٢

∴ ظتا ´30 ٥٢٢ = $\frac{\text{جا٤٥}}{\text{١ - جتا٤٥}}$

$= \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}}}{١ - \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}}}{\frac{\sqrt{٢} - ١}{\sqrt{٢}}}$

$= \frac{١}{\sqrt{٢} - ١}$

مثال: برهن: $\frac{\text{٢جا جـ - جا٢أ}}{\text{٢جا}^{٣}\text{أ}} = \frac{١}{\text{١ + جتا أ}}$

الحـــــل

الأيمن = $\frac{\text{٢جا أ - ٢جا أ جتا أ}}{\text{٢جا}^{٣}\text{أ}} = \frac{\text{٢جا أ (١ - جتا أ)}}{\text{٢جا}^{٣}\text{أ}}$

$$= \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{جا}^{٢}\text{أ}} = \frac{\text{١ - جتا أ}}{\text{١ + جتا}^{٢}\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{١ - جتا أ}}{(\text{١ - جتا أ})\ (\text{١ + جتا أ})} = \frac{\text{١}}{\text{١ + جتا أ}} = \text{الأيسر}$$

<u>مثال:</u> برهن: $\frac{\text{٢جا}^{٢}\text{ أ - ١}}{\text{جا أ جتا أ}} = \text{ظا أ - ظتا أ}$

<u>الحـــــل</u>

الطرف الأيمن: البسط صورة - جتا٢أ

بينما المقام $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جا٢أ

$$= \frac{\text{- جتا٢أ}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢أ}} = \frac{\text{-٢ جتا٢أ}}{\text{جا٢أ}} = \text{-٢ ظتا٢أ}$$

$$= \text{-٢} \times \frac{\text{١}}{\text{ظا٢أ}} = \text{-٢} \frac{\text{١}}{\frac{\text{٢ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ أ}}} = \frac{\text{-(١ - ظا}^{٢}\text{أ)}}{\text{ظا أ}}$$

$$= \frac{\text{-١}}{\text{ظا أ}} + \frac{\text{ظا}^{٢}\text{أ}}{\text{ظا أ}} = \text{- ظتا أ + ظا} \qquad = \text{ظا أ - ظتا أ}$$

<u>مثال:</u> برهن أن: $\text{جا أ} = \frac{\text{٢ظا} \frac{\text{أ}}{\text{٢}}}{\text{١ + ظا}^{٢} \frac{\text{أ}}{\text{٢}}}$

الحـــــــل

$$= \frac{2 \times \dfrac{\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}}}{1 + \dfrac{\text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}{\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}} = \frac{2 \times \dfrac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}{\dfrac{\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2} + \text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}{\text{جتا}^2\,\frac{\text{أ}}{2}}}$$

$$= \frac{2\ \text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}}{\dfrac{1}{\text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}}} = 2\text{جا}\,\frac{\text{أ}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{أ}}{2}$$

= صورة جا٢أ

$$= \text{جا}2 \times \frac{\text{أ}}{2} = \text{جا أ} = \text{الأيسر}$$

<u>مثال:</u> برهن أن: $\dfrac{\text{جا جـ}}{1 + \text{جتا جـ}} = \text{ظا}\ \dfrac{\text{جـ}}{2}$

الحـــــــل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{2\ \text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{1 + (2\ \text{جتا}^2\,\frac{\text{جـ}}{2} - 1)} = \frac{2\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{2\ \text{جتا}^2\,\frac{\text{جـ}}{2}}$$

$$= \frac{\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}} = \text{ظا}\,\frac{\text{جـ}}{2} = \text{الأيسر}$$

مثال: اثبت أن: $\frac{\text{جا أ + جتا ٢ أ}}{\text{جتا}^{2}\text{ أ}} = \frac{\text{١ + ٢ جا أ}}{\text{١ + جا أ}}$

الحـــــل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا أ + (١ - ٢جا}^{2}\text{أ)}}{\text{١ - جتا}^{2}\text{ أ}} = \frac{\text{١ + جا أ - ٢جا}^{2}\text{ أ}}{\text{١ - جا}^{2}\text{ أ}}$

$= \frac{\text{(١ + ٢جا أ) (١ - جا أ)}}{\text{(١ + جا أ) (١ - جا أ)}} = \frac{\text{١ + ٢ جا أ}}{\text{١ + جا أ}}$

= الطرف الأيسر

مثال: اثبت أن: $\frac{\text{جا أ + جا ٣ أ + ٢ جا ٤ أ جتا أ}}{\text{جتا أ + جتا ٣ أ - ٢ جتا ٤ أ جتا أ}} = \text{ظتا أ}$

الحـــــل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{(جا ٣أ + جا أ) + (٢جا ٤أ جتا أ)}}{\text{(جتا ٣أ + جتا أ) - ٢جتا ٤أ جتا أ}}$

$= \frac{\text{٢ جا ٢أ جتا أ + ٢جا ٤أ جتا أ}}{\text{٢جتا ٢أ جتا أ - ٢جتا ٤أ جتا أ}}$

$= \frac{\text{جا ٢أ + جا ٤أ}}{\text{جتا٢أ جتا ٤أ}} = \frac{\text{٢جا ٣أ جتا أ}}{\text{٢جا ٣أ جا أ}}$

$= \frac{\text{جتا أ}}{\text{جا أ}}$ = ظتا أ = الأيسر

مثال: اثبت أن: $\frac{\text{جا ب + جا ٢أ ب}}{\text{١ + جتا ب + جتا ٢ب}} = \text{ظا ب}$

الحـــــل

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا ب + ٢جا ب جتا ب}}{\text{١ + جتا ب + (٢جتا}^{2}\text{ب - ١)}}$

$= \frac{\text{جا ب (١ + ٢جتا ب)}}{\text{جتا ب (١ + ٢ جتا ب)}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}$ = ظا ب = الأيسر

تمرين (١١)

١) أثبت أن: جا٣جـ = ٣ جا جـ - ٤ جا^{3} جـ

٢) ظا (٤٥ + س) - ظا٢س = قا٢س

٣) (١ - جتا٤س) = ٨ جا^{2}س جتا^{2}س

٤) قا^{2} ب ÷ (٢ - قا^{2} ب) = قا ٢ب

٥) $\frac{\text{١ + ٢جتا هـ}}{\text{١ + جتا هـ + جتا ٢هـ}}$ = قا هـ

٦) إذا كان جتا هـ - جا هـ = $\frac{1}{2}$ أوجد قيمة جا ٢هـ ، جتا ٤هـ

٧) $\frac{\text{١ - جتا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}}$ = ظا^{2} $\frac{\text{هـ}}{2}$

٨) (١ + جتا هـ) ظا $\frac{\text{جـ}}{2}$ = جا جـ

٩) إذا كانت س ∈] ٠ ، ٣٦٠ [أوجد مجموعة حل المعادلة:

١ - ٢جا^{2}س = جتا س

١٠) جتا (أ + ب) جتا (أ - ب) = جتا^{2} أ - جا^{2} ب

١١) ظا ($\frac{\text{ط}}{4}$ + س) = $\frac{\text{١ + ظا س}}{\text{١ - ظا س}}$

١٢) قتا س + ظتا س = ظتا $\frac{1}{2}$ س

١٣) $\frac{1}{2}$ (١ - جتا هـ) قا^{2} $\frac{\text{هـ}}{2}$ = $\frac{\text{٢جا هـ - جا ٢هـ}}{\text{٢جا هـ + جا ٢هـ}}$

١٤) $\frac{\text{١ + جتا أ + جتا ٢أ}}{\text{١ + ٢ جتا أ}}$ = جتا أ

١٥) أثبت أن: جا ٤أ - ٢جا ٢أ = -٨ جا^{3} أ جتا أ

١٦) جتا ٢أ - ٤ جتا أ = ٨ جا^{٤} ($\frac{١}{٢}$ أ)

١٧) جا ٢هـ (ظتاهـ - ظتا ٢هـ) = ١

١٨) $\frac{\text{جتا ٢هـ}}{\text{١ + جا ٢هـ}} = \frac{\text{١ - ظا هـ}}{\text{١ + ظا هـ}}$

١٩) (١ - جتا ٢أ) = ظا^{٢}أ (١ + جتا ٢أ)

٢٠) ١ + جتا ٢جـ + ٢ جا^{٢} جـ = ٢

٢١) (١ + جتا٢س) ظا س = جا٢س

٢٢) إذا كان: جا جـ جتا^{٣} جـ - جا^{٣} جـ جتا جـ = $\frac{١}{٤}$ أوجد قيمة جا ٤جـ

٢٣) $\frac{\text{جا ٢س}}{\text{جتا س}} + \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا س}}$ = قتا س

٢٤) $\frac{\text{١ + جتا جـ + جتا ٢جـ}}{\text{جا جـ + جا ٢جـ}}$ = ظتا جـ

٢٥) ١ - ٢ جا^{٢} ($\frac{\text{ط}}{٤}$ - $\frac{\text{٥س}}{٢}$) = جا ٥س

٢٦) $\frac{\text{جا (أ + ب) + جا (أ - ب)}}{\text{جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)}}$ = ظا أ

٢٧) $\frac{\text{جا ٣جـ}}{\text{جا جـ}} - \frac{\text{جتا ٣جـ}}{\text{جتا جـ}}$ = ٢

٢٨) جتا^{٢} ٢جـ + ٤ جتا^{٢} جـ = ١ + ٤جتا^{٤}جـ

٢٩) جتا^{٤} جـ - جا^{٤} جـ = جتا ٢جـ

٣٠) $\frac{\text{جتا هـ + جا هـ}}{\text{جتا هـ - جا هـ}} + \frac{\text{جا هـ - جتا هـ}}{\text{جتا هـ + جا هـ}}$ = ٢ ظا ٢هـ

ثانيا : الجبـــــــــــــــر

(١) : الدوال الحقيقية

الدالــــــــة :-

- مراجعة على الدوال الحقيقية
- المجال – المدى – الدالة الزوجية والدالة الفردية – التمثيل البياني في اطراد الدوال – الدالة الثابتة – الدالة الخطية – دالة المقياس – حل المعادلات – الدالة التربيعية – الدالة التكعيبية – الدالة الكسرية

تذكر أن

- مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) = { ١، ٢، ٣، .... ، ∞ }
- مجموعة الأعداد الصحيحة (ص) = {٠، ±١، ±٢، ±٣، ....، ±∞ }
- مجموعة الأعداد النسبية (ن) = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∋ ص , ب ≠ ٠ }
- مجموعة الأعداد الغير نسبية (ن'):هي التي لا يمكن وضعها على صورة $\frac{أ}{ب}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) = ن U ن' = ح₊ U { ٠ } U ح₋

تعريف الدالة

هي علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س وص مثلا بحيث أن كل عنصر من عناصر س يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

حيث س مجال الدالة ، ص مجال المقابل للدالة

الدوال الحقيقية

إذا كانت س ، ص مجموعتين جزئيتين من ح كانت الدالة حقيقية

مدى الدالة

هو مجموعة عناصر الصور في المجال المقابل والتي يكون لكل منها أصل في مجال الدالة

مثال

إذا كانت د(س) = ٤ س^{٢} + ٥س – ٧ فإن

د (٢) = ١٢ + ١٠ – ٧ = ١٥ د(-٣) = ٢٧ – ١٥ –٧ = ٥

د(-١) = ٣ – ٥ – ٧ = -٩ وهكذا ....

مجال الدالة = { ٢ , -٣ , -١ , ...}

مدى الدالة = { ١٥, ٥ , -٩ , ... }

<u>مجال الدالة</u> :- هو قيم س التي تجعل الدالة معرفه

ملاحظات

١) إذا لم يذكر مجال الدالة يكون مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة عندها معرفه

٢) يقال للدالة أنها حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

٣) مدى الدالة هو مجموعة جزئية من المجال المقابل .

٤) تتحدد الدالة تحديداً تاماً إذا علم :-

أ – المجال (س)

ب – المجال المقابل (ص)

ج – قاعدة الدالة

٥) الشكل البياني للدالة يكون على شكل مجموعة من النقط المنفصلة لا يجوز التوصيل إلا إذا كان مجال الدالة مجموعة وليست فترة .

٦) مدى الدالة يؤخذ من الرسم من محور الصادات من أسفل إلى أعلى

٧) مجال الدالة من الرسم من محور السينات من اليسار إلى اليمين .

مثال

إذا كان د = { -١، ٠ ، ١ ، ٣ }   [-٥ ، ٤]

وكان د(س) = ٢س-٣

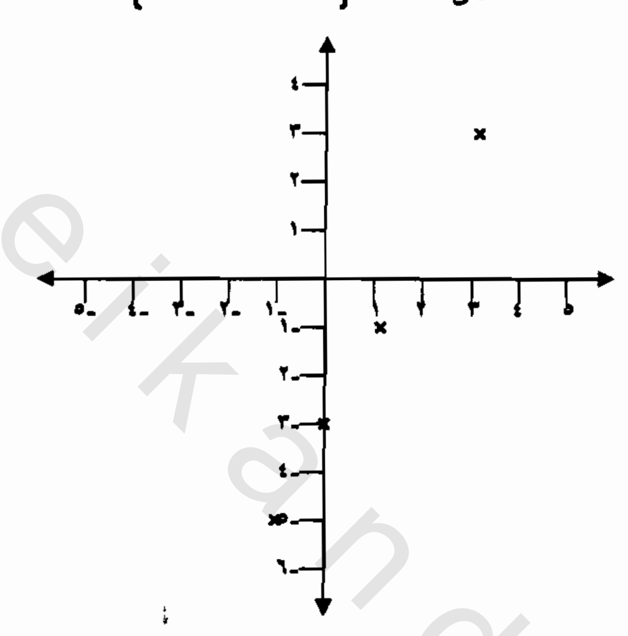
أوجد مدى هذه الدالة وأرسم الشكل البياني لها .

الحل

د(-١) = ٢ (-١) – ٣ = -٥   د(٠) = ٢ (٠) – ٣ = -٣

د(١) = ٢ (١) – ٣ = -١   د (٣) = ٢ (٣) – ٣ = ٣

مدى الدالة = { -٥، -٣ ، -١ ، ٣ }



ملاحظة

في المثال السابق يمكن كتابة د(س) على صورة أزواج مرتبة كما يلي

د = { (-١ ، -٥) ، (٠ ، -٣) ، (٣، ٣) ، (١ ،-١) }

مثال

إذا كان د : [-٣ ، -٥] ⟵ ح حيث د(س) = { ٢س+٣ ، -٣ ≤ س < ٠ ؛ ٤ – س ، ٠≤ س ≤ ٥ }

أوجد د(-٣) ، د(-١) ، د(٠) ، د(١) ، د(٥)

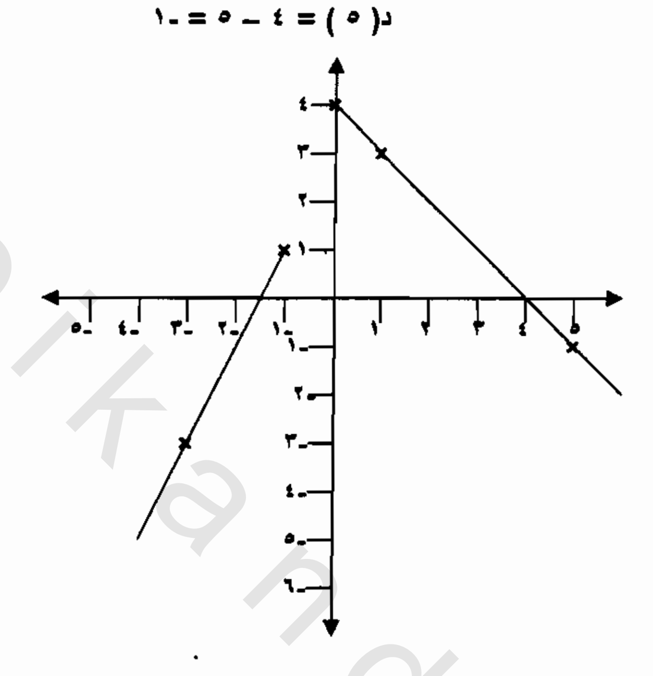
ثم ارسم الشكل البياني للدالة ومن الرسم استنتج مدى الدالة

الحل:-

د(-٣) = ٢ (-٣) + ٣ = -٣ د(-١) = ١

د(٠) = ٤ – ٠ = ٤ د(١) = ٤ – ١ = ٣

د(٥) = ٤ – ٥ = -١



من الرسم : المدى = [-٣ ، ٤]

لاحظ أن

-٣ أصغر قيمه صادية ، ٤ أكبر قيمه صادية

مثال

أرسم الشكل البياني للدوال الآتية في ح ومن الرسم استنتج مدى الدالة

د (س) = { -س +١ : س ≥ ١
 س – ١ : س < ١

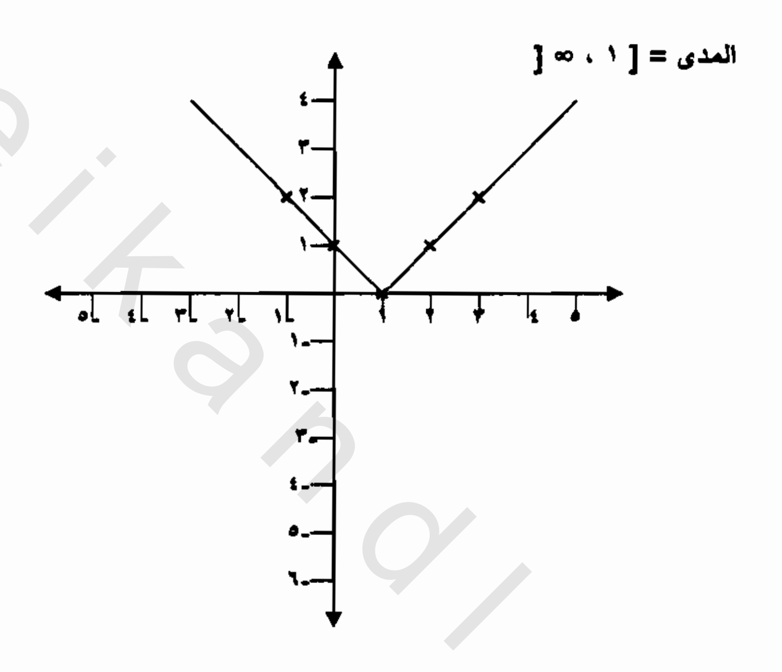
الحل

د (س) = - س + ١ | د (س) = س − ١

] - ∞ ، ١ [[١ ، ∞ [

س	١	٠	١-	١	٢	٣
ص	٠	١	٢	٠	١	٢

المدى = [١ ، ∞ [



قواعد إيجاد مجال بعض الدوال الحقيقية جبريا

أولا :- دوال كثيرة الحدود

وهي في صورة   د(س) = $أ_ن س^ن$ + $أ_{ن-١} س^{ن-١}$ + ... + أ س + أ

حيث ن عدد صحيح غير سالب

فمثلاً:   د(س) = $٧س^٣$ + $٥س^٤$ − ١٥ $س^٢$ + ١٦   دالة كثيرة الحدود

،   د(س) = $٣س^٣$ + $٤س^{-٣}$ + ٢س + ٨   ليست كثيرة الحدود

لأنها تحتوى على $٤س^{-٣}$

- جميع الدوال كثيرة الحدود مجالها ح (ما لم يذكر خلاف ذلك)

(أ) الدالة ثابتة ← ص = أ (عدد)

المجال ← ح ، المدى ← أ

(ب) الدالة الخطية ← ص = أ س + ب ص + جـ

المجال ← ح ، المدى ← ح

(ج) الدالة المحايدة ← ص = س

المجال ← ح ، المدى ← ح

(ء) الدالة التربيعية ← ص = أ $س^٢$ + جـ

المجال ← ح

والمدى يتوقف على أشارة أ

أشارة أ موجبة	أشارة أ سالبه
المدى { جـ ، ∞ }	المدى { - ∞ ، جـ }

(هـ) الدالة التكعيبية ← ص = أ $س^٣$ + ب

المجال ← ح ، المدى ← ح

ملاحظة

١. لأي دالة إذا عرف مجالها ...... عوض بقيمة المجال في الدالة لإيجاد المدى .

٢. <u>طريقة أخرى لإيجاد مدى الدالة الربيعية :-</u>

- نوجد س حيث س = $\frac{-ب}{أ}$
- ثم نعوض بقيمة س في الدالة ونوجد ص
- فإن كان معامل س موجب يكون المدى { ص ، ∞ }
- واذا كان معامل س سالب يكون المدى { -∞ ، ص }

مثال

اوجد مجال ومدى الدالة ص = ٣ ـ $س^٢$

<u>الحـــل</u>

∵ الدالة تربيعية ∴ المجال ⟵ ح

∵ معامل $س^٢$ سالب ∴ المدى ⟵] -∞ ، ٣]

ثانياً:- الدوال الكسرية (الدوال القياسية)

<u>وهي في صورة</u> $د(س) = \frac{ق(س)}{ك(س)}$

حيث ق (س) ، ك (س) دوال كثيرة الحدود

<u>مثل</u> $د (س) = \frac{٢س^٥ + ٤س^٢}{٣س^٢ + ٨}$

قاعدة

إذا كانت (الدالة كسرية) في صورة بسط ومقام ، فالمجال جميع قيم ح ماعدا التي تجعل المقام = صفر

مثال

<u>أوجد مجال الدوال الآتية :</u>

أ) $د (س) = \frac{جـ}{س + أ}$

ب) $د (س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٩}$

ج) $د (س) = \frac{س-٢}{٥س+٩}$

ء) $د (س) = \frac{١}{س (س-٢)}$

<u>الحـــل</u>

أ- المجال = ح – ما يجعل المقام = ٠

= ح – (- أ)

ب) ∵ ص = $\frac{س + ١}{س^{٢} - ٩}$ = $\frac{س+١}{(س-٣)(س+٣)}$

∴ المجال ⟵ ح - { ٣ ، - ٣ }

جـ) ∵ ص = $\frac{س-٢}{٥ س+٩}$ ∴ ٥ س + ٩ = ٠

∴ ٥ س = - ٩ ∴ س = $\frac{-٩}{٥}$

∴ المجال ⟵ ح - { $\frac{-٩}{٥}$ }

ء) ∵ ص = $\frac{١}{س (س-٢)}$

نجد أن عندما س (س - ٢) = ٠

فإنه إما س = ٠ او س – ٢ = ٠ ⟵ س = ٢

∴ المجال ح ماعدا { ٠ ، ٢ }

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

أ) د (س) = $\frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٣}$

ب) د (س) = $\frac{س}{س^{٢}+٥}$

جـ) ص = $\frac{٥ س -١}{س}$

الحـــل

أ) ∵ ص = $\frac{س+١}{س^{٢}+٢س+٣}$ ∵ المقام لا يحلل

∴ المجال = ح

ب) ص = $\frac{س}{س^{٢}+٥}$

عندما $س^2 + 5 = 0$ ∴ $س^2 = -5$

∵ لا يوجد عدد حقيقي مربعه − ٥ ∴ المجال ⟵ ح

ج) $ص = \frac{٥ س - ١}{س}$ ∴ المجال ⟵ ح − { صفر }

ثالثاً :- الدوال الغير قياسية (الدوال المشتملة على جذور)

أ) إذا كان ما تحت الجذر التربيعي من الدرجة الأولى : -

نجعل ما تحت الجذر ≥ صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

١) $ص = \sqrt{س - أ}$ ٢) $ص = \sqrt{أ - س}$

٣) $ص = \sqrt{٩ - س}$ ٣) $ص = \sqrt{س - ٣}$

الحـــل

١) ∵ $ص = \sqrt{س - أ}$ ∴ س − أ ≥ ٠

∴ س ≥ أ ∴ المجال = [أ ، ∞)

٢) ∵ $ص = \sqrt{أ - س}$ ∴ أ − س ≥ ٠

∴ أ ≥ س ∴ س ≤ أ ∴ المجال = (− ∞ ، أ]

٣) ∵ $ص = \sqrt{٩ - س}$ ∴ ٩ − س ≥ ٠

∴ ٩ ≥ س ∴ س ≤ ٩ ∴ المجال = (− ∞ ، ٩]

٤) ∵ $ص = \sqrt{س - ٣}$ ∴ س − ٣ ≥ ٠

∴ س ≥ ٣ ∴ المجال =[٣ ، ∞) فترة مغلقة من ناحية ٣

التحقيق :- ∞

−٥ −٤ −٣ −٢ −١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

$\sqrt{٦ - ٣} = \sqrt{٣}$ $\sqrt{٤ - ٣} = ١$ $\sqrt{٠ - ٣} = \sqrt{-٣}$ $\sqrt{-٥}$

غير معرف غير معرف

ملاحظة

إذا كان الجذور في المقام :-

نجعل ما تحت الجذور > صفر

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

١) $ص = \frac{١}{\sqrt{س-٣}}$

٢) $ص = \frac{١}{\sqrt{س+٢}}$

الحــــل

١) ∵ $ص = \frac{١}{\sqrt{س-٣}}$ ∴ س – ٣ >

∴ س > ٣ ∴ المجال = (٣ ، ∞)

اى إن العدد ٣ لا ينتمي إلى المجال ٠

٢) ∵ $ص = \frac{١}{\sqrt{س+٢}}$ ∴ س + ٢ > ٠

∴ س > - ٢ ∴ المجال = (-٢ ، ∞)

ب) إذا كان ما تحت الجذر التربيعى من الدرجة الثانية : -

١) إذا كان ما تحت الجذر التربيعى من الدرجة الثانية ولا يحلل :

∴ المجال = ح ، المدى (صفر ، ∞)

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

أ) $ص = \frac{١}{س^{٢}+٩}$

ب) $ص = \sqrt{س^{٢} + ٣}$

الحل

أ) ∵ ص = $\frac{1}{س^{2}+9}$ ∴ المجال = ح

∵ ص = $س^{2} + \sqrt{3}$ ∴ المجال = ح

ب) إذا كان ما تحت الجذر التربيعى من الدرجة الثانية ويحلل :

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية : -

أ) ص = $\sqrt{أ^{2} - س^{2}}$

ب) ص = $-\sqrt{أ^{2} - س^{2}}$

ج) ص = $\sqrt{س^{2} - أ^{2}}$

الحـــــل

أ) ∵ ص = $\sqrt{أ^{2} - س^{2}}$ حيث $أ^{2}$ = $(عدد)^{2}$

∴ $أ^{2}$ = س   ∴ $أ^{2} - س^{2} \leq$ صفر

∴ $أ^{2} \leq س^{2}$ ∴ $س^{2} \geq أ^{2}$

∴ س ≥ ± أ   ∴ المجال [- أ ، + أ]

ب) ص = $-\sqrt{أ^{2} - س^{2}}$

∴ المجال = [-أ ، أ]

ج) ص = $\sqrt{س^{2} - أ^{2}}$

∴ $س^{2} - أ^{2} = 0$ ∴ $س^{2} = أ^{2}$

∴ س = ± أ   ∴ المجال = ح −]-أ ، أ[

جـ) إذا كانت الجذور في البسط والمقام معاً

∴ المجال = مجال $د_1$ ∩ مجال $د_2$ − [أصفار المقام]

مثال

أوجد مجال الدوال ألآتية

أ) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س}}$

ب) ص = $\frac{\sqrt{س^٢+٤}}{س^٢-٤}$

الحـــــل

أ) ص = $\frac{\sqrt{س+١}}{\sqrt{س}}$

∵ مجال البسط س + ١ ≥ ٠ س ≥ -١

∴ المجال = [-١ ، ∞)

مجال المقام س > ٠ ∴ المجال] ٥ ، ∞)

∴ المجال = [-١ ، ∞) ∩] ٥ ، ∞) –ح

ب) ص = $\frac{\sqrt{س^٢+٤}}{س^٢-٤}$

∴ المجال ح ∩ ح – { ± ح }

ملاحظة

إذا كانت الدالة الغير قياسية تحتوى على جذور فردية للمتغير س فإن مجالاها جميعاً ح

مثال

أوجد مجال الدوال الآتية :-

١٤أ) ص = $\sqrt[٣]{س^٢-١}$

ب) ص = (س٢ – ٢س + ١) $^{\frac{٢}{٣}}$

جـ) ص = (س – ١) $^{\frac{١}{٢}}$

الحــل

أ) ∵ ص = $\sqrt[3]{س^2 - 1}$ ∴ المجال = ح

ب) ص = (س^2 - ٢ س + ١)$^{\frac{2}{3}}$

= $\sqrt[3]{(س^2 - ٢ س + ١)^2}$ ∴ المجال = ح

جـ) ص = (س _ ١)$^{\frac{1}{3}}$ = $\frac{1}{\sqrt[3]{س - ١}}$

∴ المجال = ح

رابعاً :- مجال الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة : -

هو اتحاد فترات تعريفها

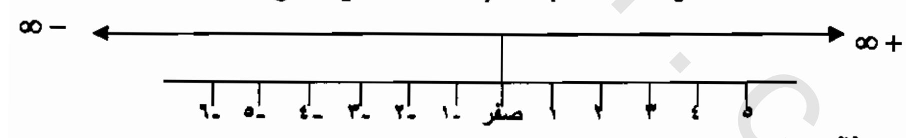
مثال

أوجد الدوال الآتية

د (س) = { س – ٢ عندما س ≤ ٠ ، - س – ٢ عندما س > ٠ }

الحــل

∴ المجال = [صفر ، ∞) U (- ∞ ، صفر] = ح



مثال

أوجد مجال الدالة

د(س) = { س + ٤ عندما س ∋ [-٤ ، ١] ، ٦ – س عندما س ∋] ١ ، ٦] }

الحل

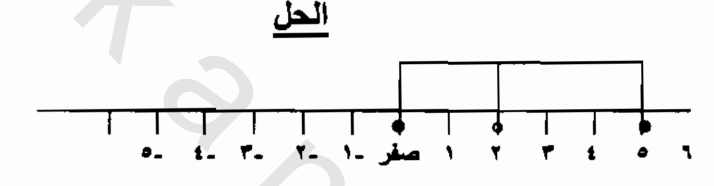
∴ المجال = [-٤ ، ١ [∪ [-٦ ، ٤] = [-٤ ، ٦ [

مثال

أوجد مجال الدالة

د(س) = { ٢ س^{٢} عندما س ∈ [٠ ، ٢ [؛ ٢س + ٤ عندما س ∈] ٢ ، ٥]

الحل



∴ المجال = [٠ ، ٢ [∪] ٢ ، ٥] = [٠ ، ٥] − { ٢ }

ملاحظة

١- عندما س < ٣ ، عندما س > ٣

∴ المجال ح − {٣}

٢- عندما س > صفر ، عندما س < صفر

∴ المجال ح − { صفر }

العمليات على الدوال

(أولا) الجمع والطرح : -

إذا كانت $د_{١}$ ، $د_{٢}$ دالتان مجالهما $م_{١}$ ، $م_{٢}$ على الترتيب .

فإن : ($د_{١}$ ± $د_{٢}$) (س) = $د_{١}$ (س) ± $د_{٢}$ (س)

ويكون مجالهما ($د_{١}$ ± $د_{٢}$) هو $م_{١}$ ∩ $م_{٢}$

ملاحظة

مجموع (او فرق) دالتين هو دالة جديدة

(ثانياً) الضرب والقسمة :-

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتان مجالهما $م_1$ ، $م_2$ على الترتيب .

١) فإن : ($د_1$. $د_2$) (س) = $د_1$ (س) × $د_2$ (س)

ويكون مجالهما ($د_1$. $د_2$) هو $م_1 \cap م_2$

٢) $\frac{د_1}{د_2}$ (س) = $\frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2$(س) ≠ صفر

حيث : مجال $\frac{د_1}{د_2}$ هو ($م_1 \cap م_2$) - [اصفار $د_2$ (س)]

ملاحظة

- حاصل ضرب او خارج قسمة دالتين هو دالة جديدة
- مجال الدالة $د_1$ ، $د_2$ هو المجال المشترك للدالتين اى $م_1 \cap م_2$

ومجال الدالة $د_1$ هو المجال المشترك للدالتين ونستبعد منه اصفار $د_2$

مثال

إذا كانت $د_1$:] -٢ ، صفر [← ح حيث $د_1$ (س) = ٣ - س

، $د_2$:] -١ ، ١ [← ح حيث $د_2$ (س) ٣ + س

فأوجد

أ) ($د_1$ + $د_2$) (س) ، ($د_2$ - $د_1$) (س) ، ($د_1$. $د_2$) (س) ، $\frac{د_1}{د_2}$ (س)

مجال كل من $د_1$ + $د_2$ ، $د_1$ - $د_2$ ، $د_1$ $د_2$ ، $\frac{د_2}{د_1}$

الحل

($د_1$ + $د_2$) (س) = ٣- س + ٣ + س = ٦

ومجالها $م_1 \cap م_2$ =] -٢ ، ٠ [∩] -١ ، ١ [

∴ المجال = $م_1 \cap م_2$ =] −١ ، صفر [

، ($د_2 - د_1$) (س) = ٣+ س −٣ + س = ٢س

والمجال المشترك] −١ ، صفر [

،($د_1 \cdot د_2$) (س) = (٣ − س) (٣ + س) = ٩ − $س^2$

والمجال] −١ ، صفر [

، $\frac{د_1}{د_2}$ (س) = $\frac{٣-س}{-٣س}$ $م_1 \cap م_2$ ماعدا أصفار المقام

∴ المجال] −١ ، صفر [-٣

مثال

إذا كانت

$د_1$ (س) = { س+١ عندما س ≤ ٠ ، س−١ عندما س > ٠ }

، ر(س) = س حيث س ∋ ح أوجد:-

(د + ر) (س) ، (د − ر) (س) ، (د × ر) (س) ، $\frac{د}{ر}$ (س) وعين المجال .

الحل

− ∞ س−١ | س+١ ∞

− ∞ س صفر س ∞

لإيجاد (د + ر) (س) =

= { د + ر عندما س ≤ ٠ ، د + ر عندما س > ٠ }

$$= \begin{cases} س + ١ + س \\ س - ١ + س \end{cases} = \begin{cases} ٢س + ١ & س \geq ٠ \\ ٢س - ١ & س < ٠ \end{cases}$$

نعين مجال (د + ر) (س) = مجال د $\cap$ مجال ر

= ح $\cap$ ح = ح

لإيجاد (د – ر) (س) = د(س) – ر (س)

$$= \begin{cases} س + ١ - س \\ س - ١ - س \end{cases} = \begin{cases} ١ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -١ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

والمجال (د – ر) (س) = ح (مثل الجمع)

لإيجاد (د × ر) (س) = د (س) × ر (س)

$$= \begin{cases} (س + ١)(س) \\ (س - ١)(س) \end{cases} = \begin{cases} س^٢ + س & \text{عندما } س \geq ٠ \\ س^٢ - س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

والمجال = مجال د $\cap$ مجال ر = ح

لإيجاد $\left(\frac{د}{ر}\right)$ س = $\frac{د(س)}{ر(س)}$

$$= \begin{cases} \frac{س + ١}{س} & \text{عندما } س \geq ٠ \\ \frac{س - ١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

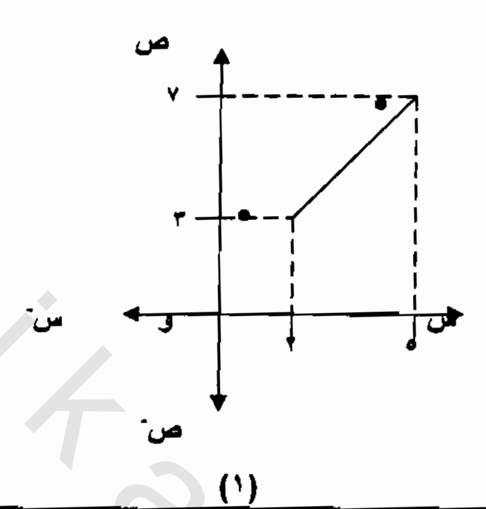
والمجال = مجال د $\cap$ مجال ر – { أصفار المقام }

= ح – { صفر }

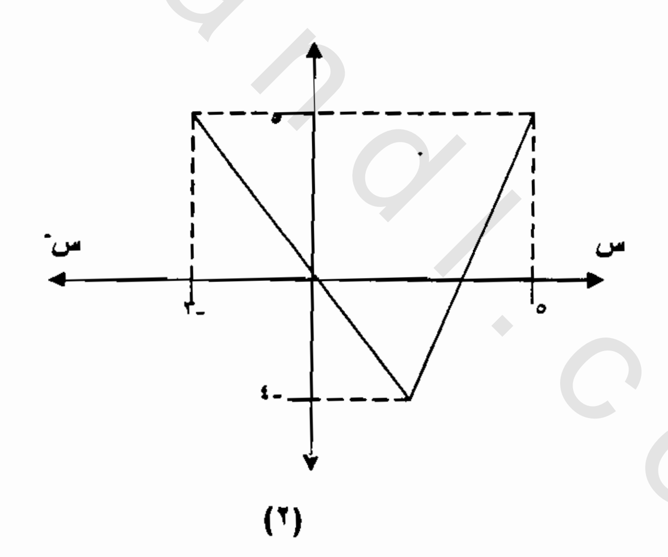
تمرين (١٢)

على مجال الدالة ومداها من الرسم والعمليات على الدوال

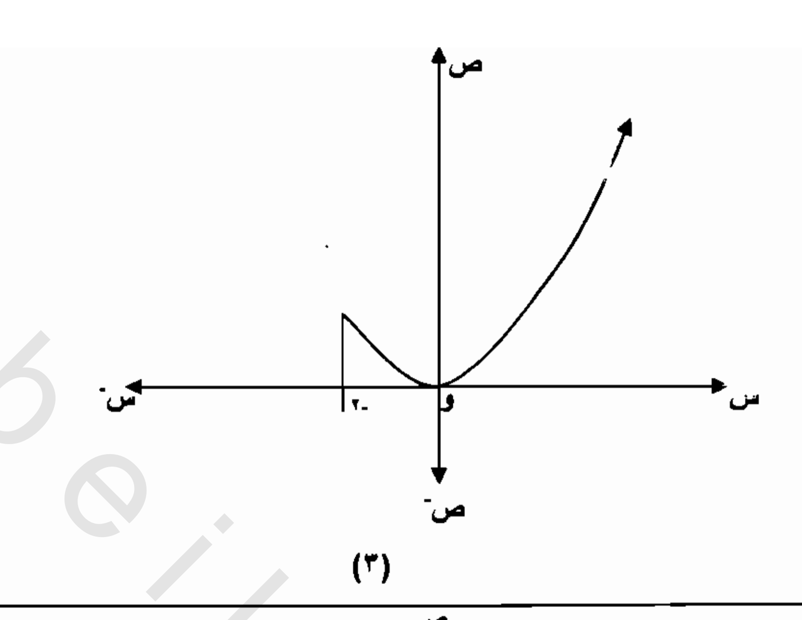
١) من الأشكال الآتية عين المجال والمدى .



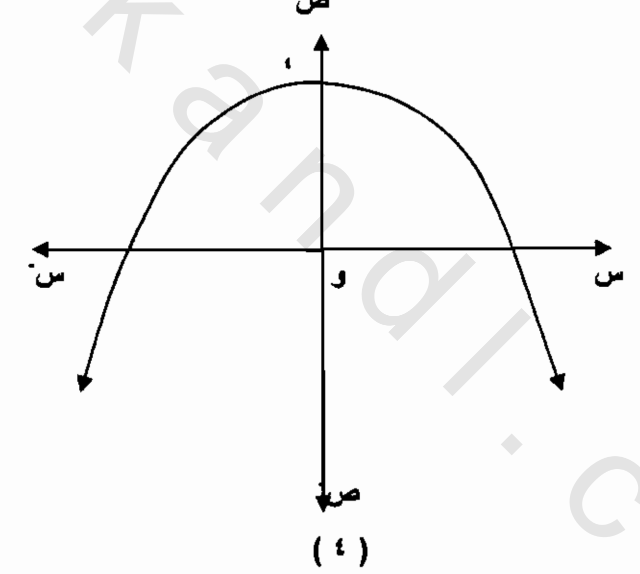
(١)



(٢)



(٣)



(٤)

٢) <u>أوجد المجال والمدى للدوال الآتية :-</u>

أ) د(س) = ١

ب) د(س) = -٣

ج) د(س) = ٢ عندما س [-٣ ، ٤]

د)

$$د(س) = \begin{cases} ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -٥ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

٣) <u>أرسم الدوال الآتية وأوجد من الرسم المجال والمدي</u>

أ) د(س) = ٢س+١ ب) د(س) = ٣-٤ س

ج) د(س) = { س+١ عندما س ≥ ٢
 { ٢ - س عندما س < ٢

٤) <u>أرسم الدوال الآتية ومن الرسم أوجد المجال والمدي</u>

أ) د(س) = س ب) د(س) = - س

٥) <u>أرسم الدوال الآتية وأوجد المجال والمدي</u>

أ) د(س) = س^{٢} ب) د(س) = -س^{٢}

ج) د(س) = س^{٢} – ٥ س + ٦

٦) إذا كانت د : {-٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فى ح [٢ ، ١١]

، د(س) = س^{٢} + ٢ اوجد مدى هذه الدالة وارسم الشكل البيانى

٧) إذا كانت د : [- ١ ، ٥] ⟵ ح

، د (س) = { ٤ – س عندما -١ ≤ س < ٢
 { س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥

اوجد كل من د (-١) ، د (٠) ، د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٥)

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم اوجد المدى

٨) إذا كانت

د (س) = { ٢س عندما س > ٢
 { س + ٢ عندما س < ٢

أوجد د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، د (١) ، د (٠) ، د (-١) د (-٤)

وارسم الشكل وأوجد المدى

٩) إذا كانت

د (س) = { س + ٢ عندما س > ٠
 { -١ عنما س < ٠

ارسم الشكل وأوجد المجال والمدى

١٠)ارسم منحنى الدالة

د (س) = { $س^٢$ عندما س ∋ [٠ ، ٢ [
 { س + ٢ عندما س ∋] ٢ ، ٥]

١١)ارسم الدالة

د (س) = { س عندما س ∋ [٠ ، ٣ [
 { ٣ عندما س ∋] ٣ ، ٦]
 { ٩ − س عندما س ∋ [٦ ، ٩]

ثم عين المجال والمدى

١٢)مثل بيانيا

د (س) = { ٢س + ٣ عندما س < -١
 { ٢ عندما س ≤ -١

وعين مداها ثم أوجد د (-٣) ، د (-٢) ، د (٠) ، د (١)

١٣)مثل بيانيا

د (س) = { س- ٢ عندما س> ٠
 { س + ٢ عندما س < ٠

وعين مداها

١٤)عين مجال د (ر) = $\sqrt{\text{س} - ٣ + ٥}$

١٥) عين مجال د (ر) = $\sqrt{٥ - \text{س}} - \sqrt[٣]{\text{س} + ١}$

عين مجال د (ر) = $\frac{\sqrt{\text{س} + ٢}}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$

١٧) إذا كانت

د (س) = { س - ١ عندما س > ١ ، - س + ١ عندما س < ١ }

، ر (س) = س ، س ∋ ح

أوجد :

١) (د + ر) (س)

٢) (د – ر) (س)

ومثلهما بيانياً وأوجد مداها ثم أوجد (د + ر) (٣) ، (د – ر) (-٥)

وأوجد (د × ر) (س) ، $\frac{د}{ر}$ (س) ، $\frac{ر}{د}$ (س)

ثم اوجد (د × ر) (-١) ، $\frac{د}{ر}$ (-٤) ، $\frac{ر}{د}$ (٥)

إطرا د الدوال

المقصود ببحث اطراد الدالة : -

إيجاد الفترات الجزئية من المجال (محور السينات) التي تكون فيها الدالة (متزايدة - متناقصة - ثابتة)

١) الدالة المتزايدة : -

(كلما زادت س زادت ص والعكس)

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∋ [أ ، ب]

إذا كانت $س_1$ > $س_2$ ← د ($س_1$) > د ($س_2$)

٢) الدالة المتناقصة:-

(كلما زادات س نقصت ص والعكس)

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∋ [أ ، ب]

إذا كانت $س_1$ > $س_2$ ← د ($س_1$) > د ($س_2$)

الدالة الثابتة :-

د (س) = جـ

لكل $س_1$ ، $س_2$ ∋ [أ،ب]

إذا كانت $س_1$ > $س_2$ ← د ($س_1$) > د ($س_2$)

الخلاصة :-

١) د(س) تزايدية إذا كانت قيمة الدالة تتزايد بزيادة قيمة س

٢) د(س) تناقصية إذا كانت قيمة الدالة تتناقص بازدياد قيمة س

٣) د(س) ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما زادت قيمة س

٤) الدالة الثابتة تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات

ملاحظات :-

١) د(س) = $س^2$

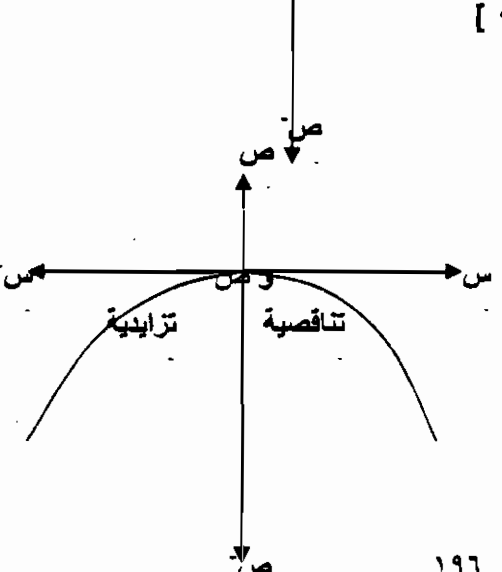
المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [

الاطراد :-

متناقصة عندما س ∋]- ∞ ، ٠]

متزايدة عندما س [٠ ، ∞ [



٢) د (س) = - $س^2$

المجال = ح

المدى =] - ∞ ، ٠]

الأطراد :-

متناقصة عندما س ∋ [٠ ، ∞ [

متزايدة عندما س ∋]- ∞ ، ٠]

مثال

مثل بيانيا :-

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢}(س + ٣) & \text{عندما } س ≥ ١- \\ س^{٢} & \text{عندما } س > ١- \end{cases}$$

وعين مداها وأبحث أطرادها

<u>الحل</u>

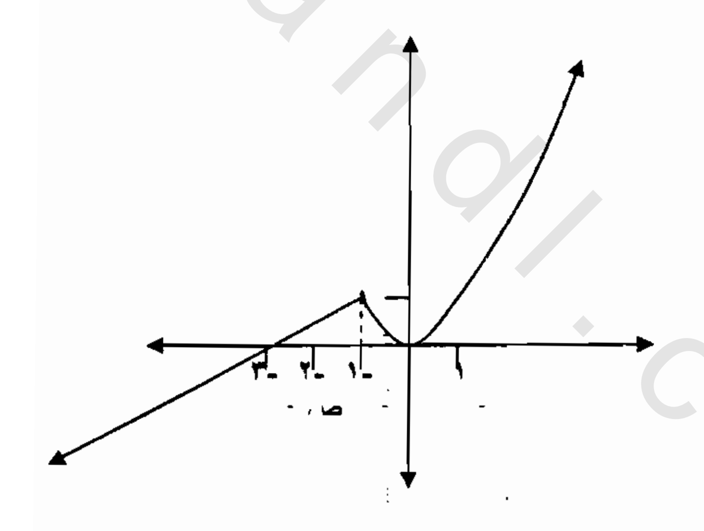
المجال = ح **المدى = ح**

الاطراد :-

متزايدة عندما س ∋ [٠ ، ∞ [

متناقصة عندما س ∋ [١- ، ٠]

متزايدة عندما س ∋]- ∞ ، ١-]



مثال

مثل بيانيا :-

د (س) = س^{٢} – ٣س

س ∋ [٣- ، ٢] وعين مداها وأبحث أطرادها

الحل

نوجد الرأس : ∴ س = $\frac{ب}{٢أ}$ = $\frac{٣}{٢}$

د($\frac{٣}{٢}$) = $\frac{٩}{٤}$ - $\frac{٩}{٢}$ = - $\frac{٩}{٤}$ ∴ رأس المنحنى = ($\frac{٣}{٢}$ ، -$\frac{٩}{٤}$)

التقاطع مع محور السينات نضع د (س) = ٠

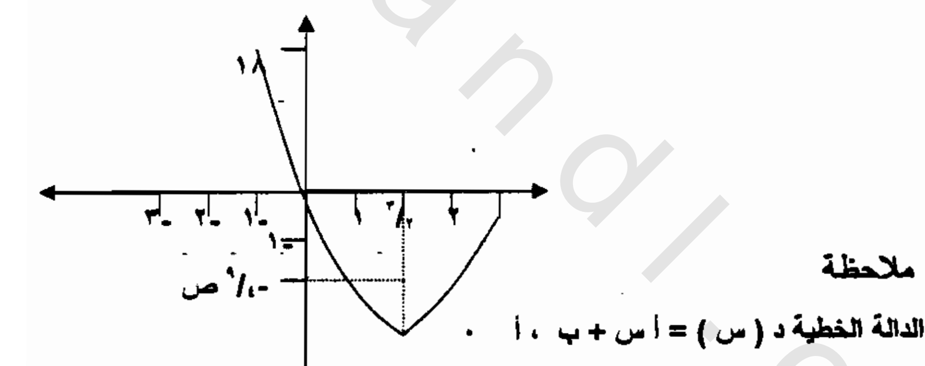
س^{٢} – ٣س = ٠ ← س (س – ٣) = ٠ ∴ س = ٠ ، ٣

المدى = [-$\frac{٩}{٤}$ ، ١٨]

الأطراد :-

متناقصة   عندما س ∋ [-٣ ، $\frac{٣}{٢}$]

متزايدة   عندما س ∋ [$\frac{٣}{٢}$ ، ٢]



ملاحظة

الدالة الخطية د (س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠

تمثل بخط مستقيم ميلة (أ) إذا كان :-

(أ)   أ > ٠ فإن الدالة متزايدة على مجالها

(ب)   أ < ٠ فإن الدالة متناقصة على مجالها

مثال

مثل بيانيا :-

د (س) = { س + ٢   عندما س ≥ ٢ ؛ - (س + ٢)   عندما س < ٢ }

وعين مداها وأبحث أطرادها .

الحل

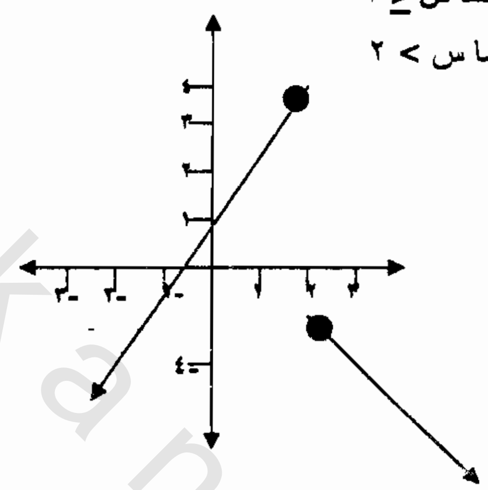
المجال =] - ∞ ، ٤]

المدى =] -∞ ، ٤]

الاطراد :-

الدالة تزايدية عندما س ≤ ٢

وتناقصية عندما س > ٢



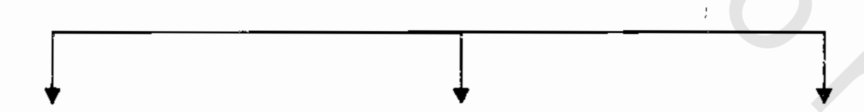
ملاحظة :-

لبحث أطراد الدالة في فترة ما س باستخدام التعريف:-

١) نفرض $س_١$ ، $س_٢$ ∋ س حيث $س_١$ < $س_٢$

∴ $س_٢$ − $س_١$ = صفر ⟵ ١

٢) نوجد د($س_٢$) − د($س_١$) فى ابسط صورة ومن (١) نستنتج أحد الحالات الآتية:-



د($س_٢$) − د($س_١$) > صفر ∴ الدالة تزايدية

د($س_٢$) − د($س_١$) < ٠ ∴ الدالة متناقصة

د($س_٢$) − د($س_١$) = ٠ ∴ الدالة ثابتة

مثال

اذا كانت د : ح ⟵ ح، حيث د (س) = ٢ س ــ١ إثبت ان الدالة تزايدية وحقق ذلك من التمثيل البيانى

الحــل

نفرض ان $س_١$ ، $س_٢$ ∈ ح ، $س_٢$ > $س_١$ فإن $س_٢$ - $س_١$ > ٠

د ($س_٢$) = ٢ $س_٢$ ــ ١ ، د ($س_١$) = ٢ $س_١$ ــ١

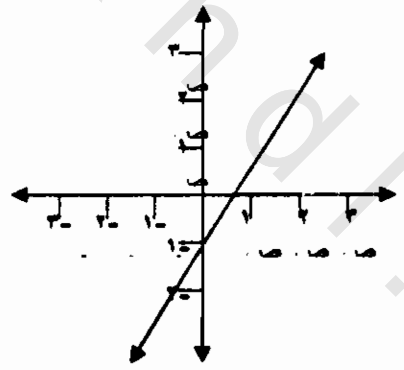
د($س_٢$) ــ د($س_١$)= ٢ $س_٢$ - ١ ــ (٢ $س_١$ - ١) =٢ $س_٢$ - ١ - ٢ $س_١$ +١

= ٢ $س_٢$ - ٢ $س_١$ = ٢ ($س_٢$ - $س_١$)> ٠ [نلاحظ ان الناتج موجب]

∴ د($س_٢$) > د($س_١$) الدالة تزايدية

س	٠	١	٢
د(س)	-١	١	٣

من الرسم يتضح ان الدالة د (س) تزايدية [كما زادت س زادت د (س)]



مثال

ابحث اطراد الدالة : د (س) = ٤ ــ ٣س

الحــل

د ($س_٢$) = ٤ ــ ٣$س_٢$ .... (١)

د ($س_١$) = -٤ ± ٣ $س_١$ ....(٢) بطرح (١) ــ (٢) نجد ان

د ($س_٢$) ــ د ($س_١$) = -٣ $س_٢$ + ٣ $س_١$ = - ٣ (س ــ س) < ٠ [سالبة]

∴ د (س) دالة تناقصية

مثال :

ابحث اطراد الدالة : د (س) = ٢ س + ٣

الحـــل

نفرض ان $س_١$ ، $س_٢$ ∋ ح & $س_٢$ > $س_١$

د ($س_٢$) = ٢ $س_٢$ + ٣ .... (١)

د ($س_١$)= ٢ $س_١$ + ٣ .... (٢) بطرح (١) - (٢) نجد ان

د (س) – د (س) = ٢$س_٢$ – ٢$س_١$ = ٢ ($س_٢$ – $س_١$) > ٠ [موجبة]

.: د (س) دالة تزايدية

مثال

ابحث اطراد الدالة :-

د (س) = { س : س ≥ ٠ ، ٠ : س < ٠ } ، ر (س) = س

الحـــل

هـ (س) = (د × ر) (س) = { $س^٢$: س ≥ ٠ ، ٠ : س < ٠ }

مجال هـ (س) = ح

هـ (س) $س^٢$ فى [٠ ، ∞ [

$س_١$ ، $س_٢$ ∋ [٠ ، ∞ [

$س_٢$ > $س_١$

هـ ($س_٢$) – هـ ($س_١$) = $س_٢^٢$ - $س_١^٢$ > ٠

.: هـ (س) تزايدية فى [٠ ، ∞ [

هـ (س) =٠ في]-∞ ، ٠ [

وهي دالة ثابتة

أي ليست تزايدية ولا تناقصية

مثال

د : $ح^*$ ← ح حيث $ح^*$ = ح - { ٠ }

$$د(س) = \begin{cases} س + \frac{١}{س} & : س > ٠ \\ \frac{١}{س} & : س < ٠ \end{cases}$$

ر : ح ← ح حيث ر (س) = س

عين مجال (د × ر) (س) وأرسم الشكل البيانى لها وأدرس أطرادها

<u>**الحل**</u>

$$هـ(س) = (د × ر)(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & : س > ٠ \\ س & : س < ٠ \end{cases}$$

هـ (س) = $س^٢$ + ١ فى] ٠ ، ∞ [هـ (س) = ١ فى] - ∞ ، ٠ [

س	(٠)	١	٢	٣	٠	١-
هـ (س)	(١)	٢	٥	١٠	١	١

$س_١$ ، $س_٢$ ∋] ٠ ، ∞ [& $س_٢$ > $س_١$

هـ ($س_٢$) − هـ ($س_١$) = $\frac{س^٢_٢}{٢}$ + ١ - $\frac{س^٢_١}{١}$ - ١

= $\frac{س^٢_٢}{٢}$ − $\frac{س^٢_١}{١}$ > ٠

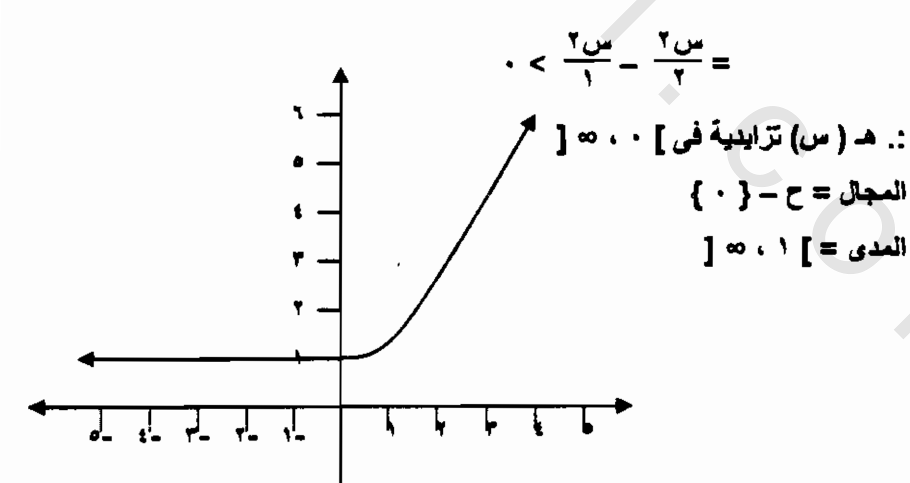
∴ هـ (س) تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

هـ(س) = ١ دالة ثابتة

ليست تزايدية ولا تناقصية

المجال = ح − { ٠ }

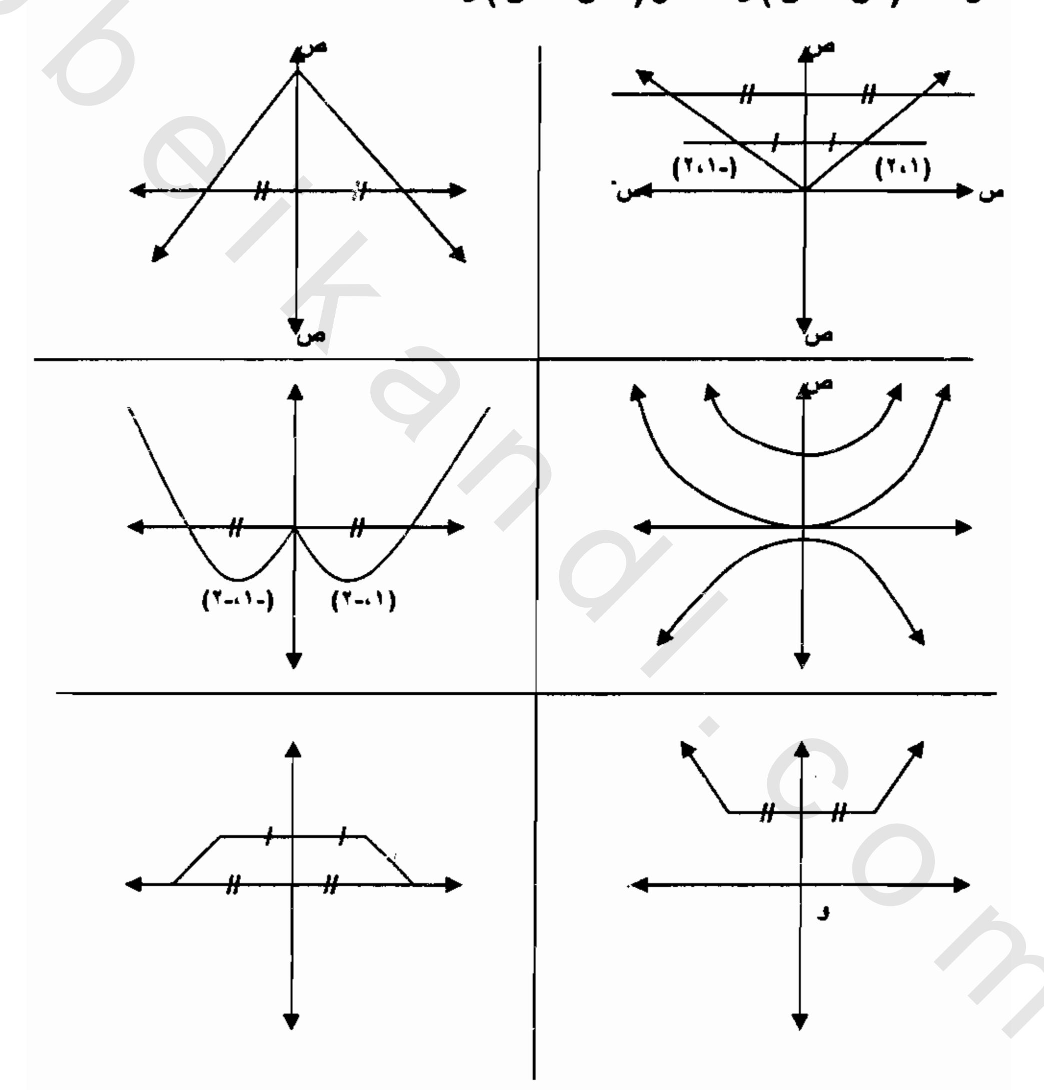
المدى =] ١ ، ∞ [



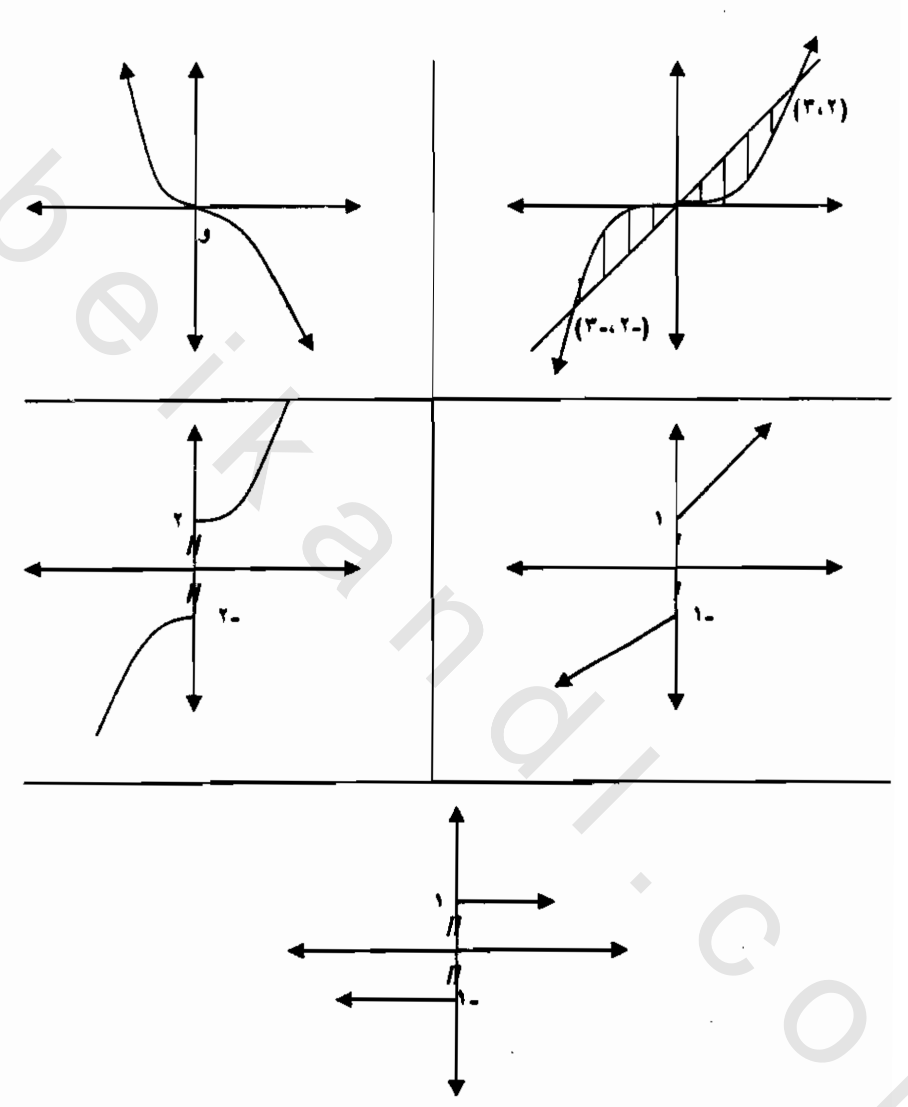
الدوال الزوجية والدوال الفردية

أولاً .... بيانياً

يقال للدالة انها زوجية إذا كان الشكل البيانى للدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادرات اى كل نقطة (س ، ص) ∈ د تناظر (- س ، ص) ∈ د



ويقال للدالة انها فردية اذا كان الشكل البيانى متماثل بالنسبة لنقطة الأصل (و) اى كل نقطة (س، ص) تناظر (-س ، -ص) ∋ د



ملاحظة هامة

ليس من الضروري ان تكون الدالة فردية او زوجية فمعظم الدوال ليست فردية وليست زوجية

مثال

مثل بيانياً

د (س) = { ٣س عندما س $\geq$ ٠
  { -٣ س عندما س < ٠

وعين مداها وابحث اطردها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية

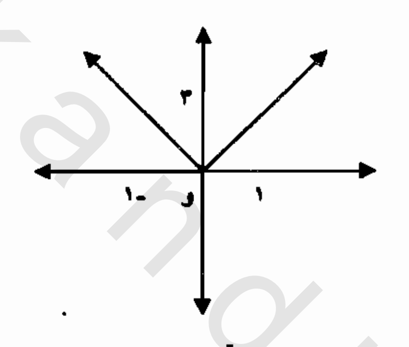
<u>الحل</u>

المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

ألاطراد :- متناقصة عندما س ∈] - ∞ ، ٠]

وتزايدية عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية من التماثل بالنسبة لمحور الصادات



مثال

مثل بيانياً

د (س) = { س^2 عندما س $\geq$ ٠
  { س^2 عندما س < ٠

<u>الحل</u>

المجال = ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية

الأطراد : متناقصة عندما س ∈] -∞ ، ٠]

وتزايدية عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

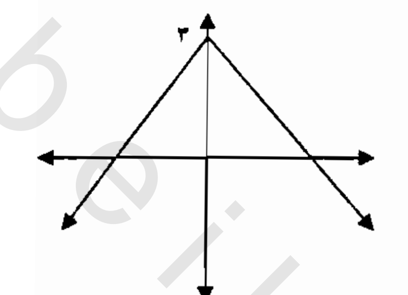


مثال

مثل بيانيا

د (س) = { س + ٣ عندما س > ٠ ، - س + ٣ عنما س ≤ ٠

<u>الحــل</u>



المجال = ح

المدى =]- ∞ ، ٣]

النوع : زوجية

الأطراد : متذايدة عندما

س ∈]-∞ ، ٠]

ومتناقصة عندما س ∈ [٠ ، ∞ [

مثال

مثل بيانياً

د (س) = { ١- ٢ س عندما س < -٣ ، ٣ عندما -٣ ≤ س ≤ ٢ ، $\frac{١}{٢}$ (س + ٤) عندما س > ٢

<u>الحــل</u>

المجال = ح   المدى = [٣ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

ألأطراد :

متناقصة عندما س ∈] - ∞ ، -٣]

وثابتة عندما س ∈ [-٣ ، ٢]

ومتزايدة عندما س ∈ [٢ ، ∞ [

مثال

مثل بيانياً واوجد المدى والمجال ونوع الدالة

د (س) = { $س^{٢}$ = ١ عندما س > ٠ ، - $س^{٢}$ – ١ عندما س <٠

الحل

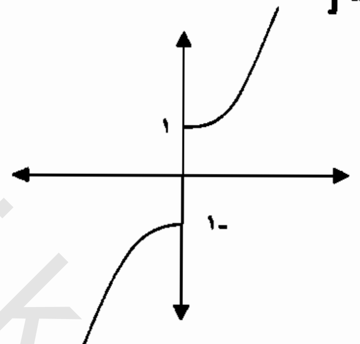
المجال = ح – { ٠ }　　　　　　　المدى = ح –] -١ ، ١ [

الأطراد :

متزايدة عندما س ∋] - ∞ ، ٠ [

ومتزايدة عندما س∋ ٠ ، ∞ [

النوع : فردية



مثال

مثل بيانيا وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة

د (س) = { ٣ عندما س >٠ ، -٣ عندما س <٠ }

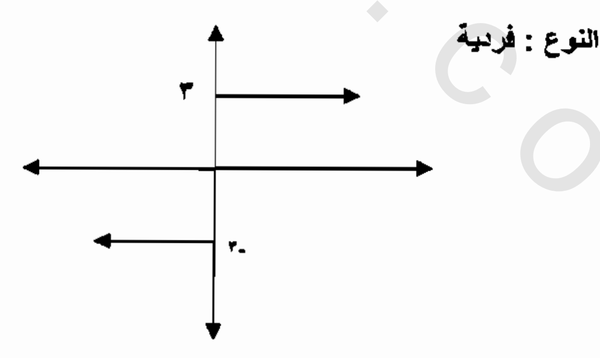
الحــــل

المجال = ح *　　　　　　　المدى = { -٣ ، ٣ }

الأطراد :

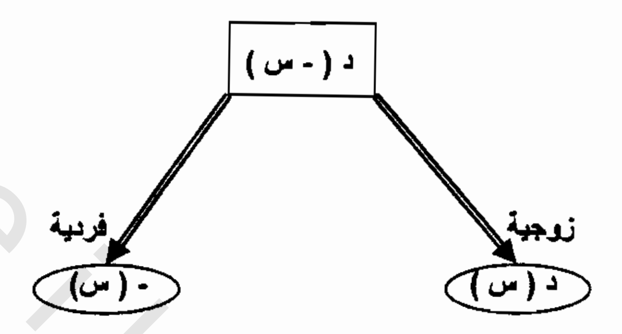
ثابتة عندما س > ٠　　　　　　وثابتة عندما س < ٠

النوع : فردية



الدالة الزوجية والدالة الفردية

ثانيا : ..... جبرياً



إذا كانت : د (- س) = د (س) ⟵ .: الدالة زوجية

إذا كانت : د (-س) = - د (س) ⟵ .: الدالة فردية

إذا كانت : د (- س) ≠ ± د (س) ⟵ .: الدالة زوجية وليست فردية

ملاحظة

حا (- س) = - حا(س) ، حتا (- س) = حتا س ، طا (- س) = - طا س

ملاحظة

إذا رمزنا للدالة الزوجية بالرمز + والفردية بالرمز -

أ) حاصل ضرب دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية

ب) حاصل ضرب دالتين فرديتين يكون دالة زوجية

ج) حاص ضرب دالتين احدهما زوجية والأخرى فردية يكون دالة فردية

د) حاصل جمع دالتين زوجيتين يكون دالة زوجية

هـ) حاصل جمع دالتين فرديتين يكون دالة فردية

و) حاصل جمع دالتين احدهما فردية والأخرى زوجية يكون دالة ليست زوجية وليست فردية

الخلاصة

الدالة الزوجية	الدالة الفردية
بيانياً يكون الشكل متماثل بالنسبة لمحور الصادات	بيانياً يكون الشكل متماثل بالنسبة لنقطه الأصل (و)
جبرياً د (س) = د (س)	جبرياً : د (‑س) < ‑ د(س)

استنتاج هام

١- $\sqrt[\text{فردي}]{\text{دالة فردية}}$ = دالة فردية

٢- $\sqrt[\text{زوجي}]{\text{دالة فردية}}$ = ليست فردية ولا زوجية

٣- $\sqrt[\text{فردي أو زوجي}]{\text{دالة زوجية}}$ = دالة زوجية

٤- من الدوال الزوجية

حتا س ، قا س ، ا س ا ، س^{ن} حيث ن زوجي والدالة الثابتة

مثال

بين نوع الدالة

ص = $\sqrt[٧]{س^{٢} + حتا ٥ س + ٩}$

الحل

∵ ما تحت الجذر دالة زوجية ، الجذر فردي

∴ الدالة زوجية

مثال

بين نوع الدالة

ص = $\sqrt[٦]{- ٥س^{٣} - س}$

الحل

∵ ما تحت الجذر دالة فردية ، الجذر زوجية

∴ الدالة ليست فردية ولا زوجية

مثال

بين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية

١) د(س) = ٧

الحل

∵ د (- س) = ٧

∴ د (- س) = د (س) **زوجي**

٢) د(س) = س^{٦} + س^{٢} + ١

الحل

د(س) = (- س)^{٦} + (- س)^{٢} + ١

= س^{٦} + س^{٢} +١

= د(س) **زوجية**

د (س) = هـ^{س} + هـ$^{-س}$

٣)

الحل

د(- س) = هـ$^{-س}$ + هـ^{س}

∵ عملية الجمع عملية تبادلية

∴ د (- س) = د (س) **زوجي**

٤) د(س) = $\frac{٣}{٣^{س}}$ + ٣ × ٣^{س}

الحل

د(س) = ٣ × ٣$^{-س}$ + ٣ × ٣^{س}

د(س) = ٣ × ٣^{س} + ٣ × ٣$^{-س}$

∴ الدالة **زوجية**

٥) د(س) = س حا س

الحل

د(- س) = (- س) × حا (- س)

= - س × - حا س

= س حا س = د (س)

∴ الدالة **زوجية**

٦) د (س) = $\frac{\text{س}^3 \text{طاس}}{\text{قاس} + 1}$

الحل

د(- س) = $\frac{(-\text{س})^3 \times \text{طا}(-\text{س})}{\text{قا}(-\text{س}) + 1}$

د(- س) = $\frac{\text{س}^3 \text{X} - \text{طاس}}{\text{قاس}+1}$

د(-س) = $\frac{\text{س}^3 \text{طاس}}{\text{قاس}+1}$

= د(س) الدالة زوجية

٧) د(س) = (حا٢س – حا ٥ س)^2

الحل

د(-س) = (- حا ٢ س + حا ٥ س)^2

= (- ١)^2 [حا ٢ س – حا ٥ س = د(س) الدالة زوجية

٨) د(س) = ٣ س (س - $\frac{1}{\text{س}}$)^5

الحل

د(- س) = - ٣ س (- س + $\frac{1}{\text{س}}$)^5

= - ٣ س ×(-١)^5 [- س + $\frac{1}{\text{س}}$]^5

= د(س) الدالة زوجية

د(س) = (س^{۳} ــ ۲ س ــ ۱) (س^{۳} ــ ۲ س + ۱)

الحل

د(- س)= (- س^{۳} +۲ س ــ ۱) (- س^{۳} + ۲ س + ۱)

د(- س)= (-۱) (س^{۳} ــ ۲ س ــ ۱) × (-۱) (س^{۳} ــ ۲ س - ۱)

= (س^{۳} ــ ۲ س ــ ۱) (س^{۳} ــ ۲ س - ۱)

∵ عملية الضرب عملية تبادلية

د(س) الدالة زوجية

۹) د(س) = س حتا س

الحل

د(- س) = - س حتا(- س)

= - س حتا س

= -(س حتا س)

= - د (س)

الدالة فردية

۹) د(س) = س^{۳} ــ ٥ س

الحل

د(- س) = - س^{۳} + ٥ س

= - (س^{۳} ــ ٥ س)

= - د (س)

الدالة فردية

۱۰)د (س) = $\frac{\text{س X جتاس}}{\text{س۲+۱}}$

الحل

د (- س) = $\frac{\text{-س X جتاس}}{\text{س۲ +۱}}$

$= -\left(\frac{س \times جتا\, س}{س^{٢} + ١}\right)$ = - د(س) فردية

١١) د(س) = $٧^{س} - ٧^{-س}$

<u>الحل</u>

د(- س) = $٧^{-س} - ٧^{س}$

$= -(٧^{س} - ٧^{-س})$

= - د(س)

الدالة فردية

١٢)د(س) = $\frac{\sqrt[٣]{س}\, طاس}{س^{٣}}$

<u>الحل</u>

د(- س) = $\frac{\sqrt[٣]{-س}\, طا(-س)}{(-س)^{٣}}$

$= \frac{-(\sqrt[٣]{س} + طاس)}{-س^{٣}}$

= د (س) زوجية

د (س) = $\left(\frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^{٣}}\right)^{٣}$

<u>الحل</u>

د(- س) = $\left(\frac{-٢}{س} + \frac{٥}{-س^{٣}}\right)^{٣}$

$= (-١)^{٣}\left(\frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^{٣}}\right)^{٣}$

$= -\left(\frac{٢}{س} + \frac{٥}{س^{٣}}\right)^{٣}$

= - د(س) فردية

١٣)د (س) = س^{٢} + س

الحل

د (- س) = س^{٢} - س

= - (- س^{٢} + س)

≠ ± د (س)   ليست فردية أو زوجية

١٤)د(س) = س قتا س + س^{٥}

الحل

د(- س) = - س × - قتا س - س^{٥}

= س قتا س - س^{٥}

= - (- س قتا س + س^{٥})

≠ ± د (س)   ليست فردية أو زوجية

تمرين (١٣)

على اطراد الدوال والدوال الزوجية والفردية

١) مثل بيانيا منحنى

د (س) = { ٢ س − ٣ ، س ≤ ٠
            { ٢ س − ٣ ، س > ٠

ومن الرسم عين نوع الدالة من حيث الزوجية والفردية

٢) ارسم الشكل البيانى للدالة

د (س) = { ٣ - س ، س > ٣
            { س − ٣ ، س ≥ ٣

ومن الرسم استنتج

الأطراد والمدى ونوع الدالة من حيث الزوجية والفردية

٣) مثل بيانياً الدالة الآتية ثم وضح نوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية وأطرادها

د (س) = { -٣ ، س ≥ ٠
          { س − ٣ ، س < ٠

٤) مثل بيانياً الدالة واوجد المجال والمدى وابحث أطرادها وبين نوع الدالة

د (س) = { ٢س - ٣ ، س ≤ ٠
          { - ٢ س − ٣ ؛ س <٠

٥) مثل بيانياً واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

د (س) = { ٢ ، -١ < س < ١
          { ٢س ، س ≤ ١

٦) ارسم بيانياً واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث اطرادها

د (س) = { س^{٢} ، س ≤ ٠
          { - س^{٢} ، س <٠

٧) ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث اطرادها

د (س) = { ٢ ، س ≥ -٢
          { - س ، -٢ < س < ٢
          { -٢ ، س ≥ ٢

٨) اذا كانت د : ح ــ ح حيث ٣ د (- س) + د (س) = ٤ س^{٣} + ٢ س

اثبت ان د: فردية

٩) ارسم الدالة وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة زابحث أطرادها

د (س) = { س − ٢ س ≤ ١
          { س + ٢ س ≥ -١

١٠)ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١٢}{س+٢} & ،\ ٠ \le س \\ \frac{١٢}{س-٢} & ،\ ٠ \ge س \end{cases}$$

١١)ارسم واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٣س + ١ & ،\ ٠ \le س \\ -س^{٢} - ٣س + ١ & ،\ ٠ > س \end{cases}$$

ابحث نوع كلا من الدوال الأتية من حيث كونها زوجية او فردية او غير ذلك

١٢) $د(س) = ٢س^{٤} + س^{٢} - ١$

١٣) $د(س) = ٣$

١٤) $د(س) = \frac{س^{٢}+٩}{س^{٤}-٣}$

١٥) $د(س) = س^{١٧} + ٧س^{٥} + س$

١٦) $د(س) = (٣ - س)^{٢}$

١٧) $د(س) = س^{٣} - حا ٣س$

١٨) $د(س) = \frac{\sqrt[٣]{س} - حاس}{س}$

١٩) $د(س) = \frac{٥}{٥\ س} + ٥ \times ٥^{س}$

٢٠) $د(س) = \frac{١}{س^{٢}+١}$

٢١) $د(س) = \frac{١}{س^{٣} + س}$

٢٢) $د(س) = \frac{س}{س^{٣} + س}$

٢٣) $د(س) = \frac{س}{س^{٢} - ٩}$

٢٤) $د(س) = \frac{١}{س + ٣} + \frac{١}{س - ٣}$

٢٥) $د(س) = \frac{س^{٢} \text{ حتا} ٣س}{س^{٢} + ٥}$

٢٦) $د(س) = \frac{س \text{ حتا} ٣س}{س^{٢} + ٥}$

٢٧) $د(س) = ه^{س} - ه^{-س}$

٢٨) $د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{عندما } س < ٠ \\ س + ١ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

٢٩) $د(س) = س^{٢} + \text{طا } س$

٣٠) $د(س) = ٤ س^{٢} + \text{حا}^{٢} س$

الدوال كثيرات الحدود والتمثيل البيانى لها

◆ **الصورة العامة للدوال كثيرة الحدود :**

د (س) = $أ_٠$ + $أ_١$ $س^١$ + $أ_٢$ $س^٢$ + ...+ $أ_ن$ $س^ن$ حيث $أ_ن$ ≠ ٠

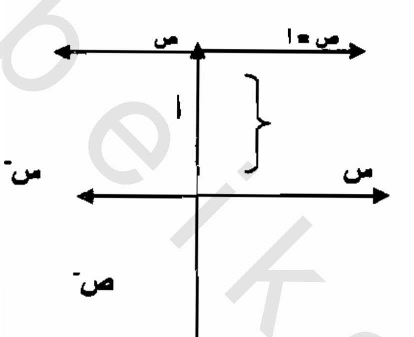
◆ كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية من ح .... لذلك فهى دالة حقيقية

اولاً : الدالة الثابتة

الصورة العامة : د (س) = أ

لكل س ∈ ح . حيث أ عدد ثابت

- المجال ـــــ ح ، المدى ـــــ { أ }
- وهى دالة كثيرة حدود من الدرجة صفر



التمثيل البياني للدالة الثابتة :

تمثل بخط مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ)

ملاحظة : -

معادلة المحور السينى ص = صفر

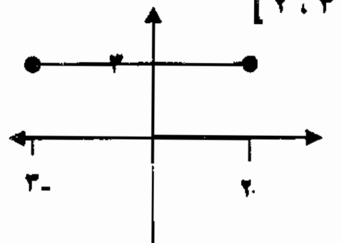
، معادلة المحور الصادى س = صفر

مثال :

مثل بيانياً د (س) = ٣ عندما س [- ٣ ، ٢]

الحـل

المجال = [-٣ ، ٢] ، المدى = { ٣ }



ملاحظة :

اذا كان المجال فترة محدودة [ ]

فإن الشكل البيانى يكون عبارة عن قطعة مستقيمة .

مثال :

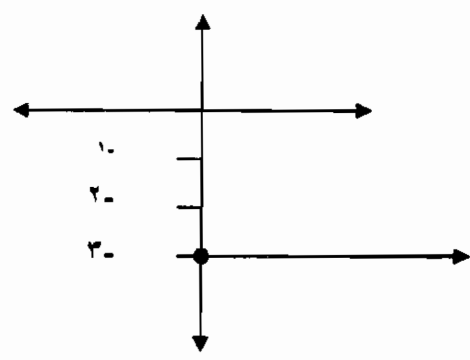
مثل بيانياً د (س) = -٣ عندما س ≤ صفر

الحــل

∴ المجال س ≥ صفر ← [٠ ، ∞ [

، المدى ← { -٣}

د (٠) = -٣ ، د (١) = -٣ ، د (٢) = -٣



ملاحظة :

اذا كان مجال الدالة متباينة (> أو <)

فإنه الشكل البيانى سيكون عبارة عن شعاع

مثال

ارسم الدالة الآتية وأوجد المجال والمدى وابحث الأطراد

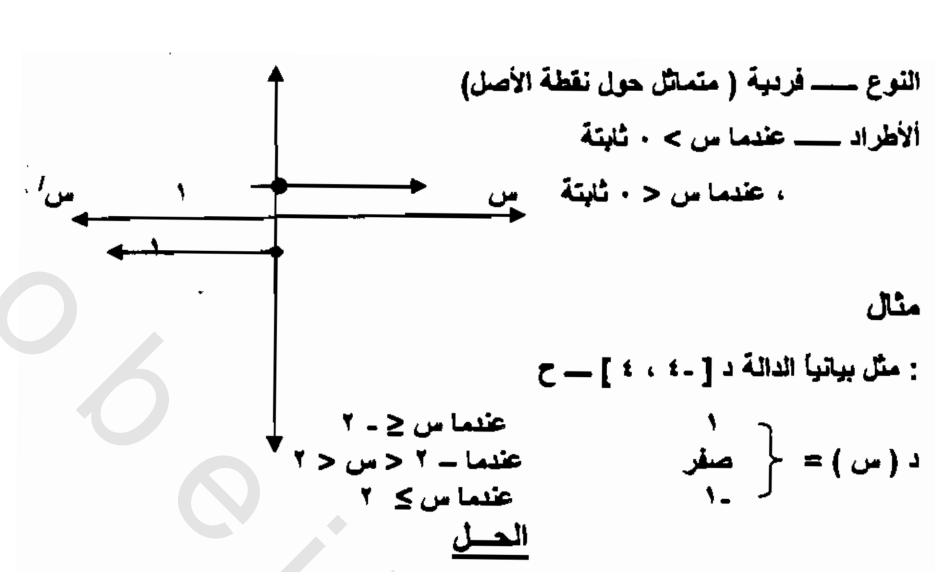
ونوع الدالة .

$$د (س) = \begin{cases} ١ & \text{عندما } س > ٠ \\ ١- & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

الحــل

المجال ← ح – { صفر } ، المدى – { -١ ، ١ }

عندما س > صفر	عندما س < صفر
د (٠) = ١	د (٠) = ١-
د (١) = ١	د (-١) = ١-
د (٢) = ١	د (-٢) = ١-



النوع ـــــ فردية (متماثل حول نقطة الأصل)

الأطراد ـــــ عندما س > ٠ ثابتة

، عندما س < ٠ ثابتة

مثال

: مثل بيانياً الدالة د [-٤ ، ٤] ـــ ح

د (س) = { ١ عندما س ≤ - ٢ ، صفر عندما - ٢ < س < ٢ ، -١ عندما س ≥ ٢

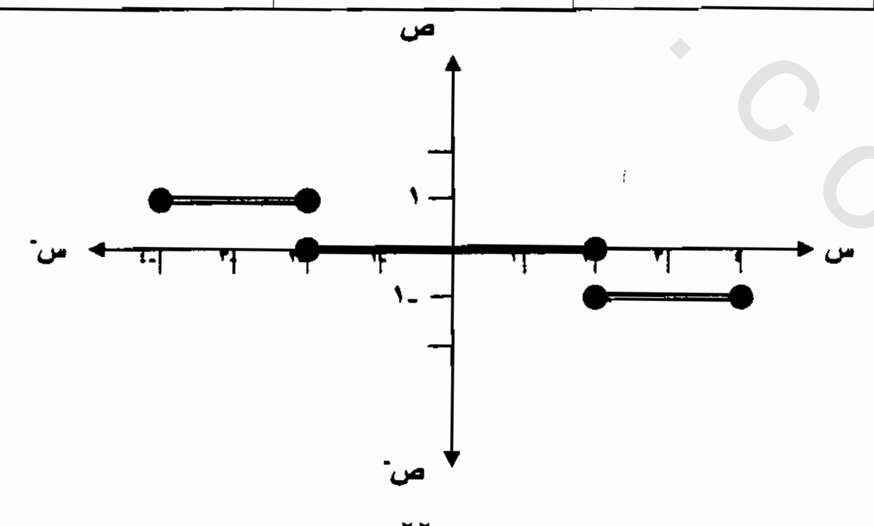
الحـــل

-٤ | -٣ | -٢ | -١ | صفر | ١ | ٢ | ٢ | ٤

مجال القاعدة الأولى — مجال القاعدة الثانية — مجال القاعدة الثالثة

.: المجال = [- ٤ ، ٤] ، المدى = { ١ ، صفر ، -١ }

عندما س ≤ - ٢	عندما -٢ < س < ٢	عندما س ≥ ٢
المجال [-٤ ، -٢]	المجال =] -٢ ، ٢ [	المجال = [٢ ، ٤]
د (-٢) = ١	د (-٢) = صفر	د (٢) = -١
د (-٤) = ١	د (٢) = صفر	د (٤) = -١



∴ المدى ← { ١ ، صفر ، -١ }

نوع الدالة ← ∴ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل ∴ فردية

الاطراد ← [-٤ ، -٢] ثابتة ،] -٢ ، ٢ [، [٢ ، ٤] ثابتة

ثانياً : الدالـــــة الخطيـــــة

• الصورة العامة : د (س) = أ س + ب ، أ ≠ ٠

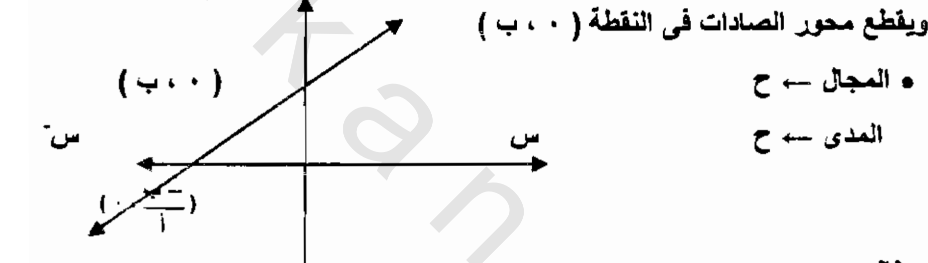
• التمثيل البياني للدالة الخطية :

تمثل بيانياً بخط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة ($\frac{-ب}{أ}$ ، ٠)

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب)

• المجال ← ح

المدى ← ح



مثال

مثل بيانياً د (س) = ٢ س + ٣ ، س ∈ ح

وأوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث الاطراد

الحـــل

∵ الدالة خطية ∴ المجال ← ح ، المدى ← ح

∴ ص = ٢ س + ٣

∴ تقطع محور السينات فى $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ($\frac{-٣}{٢}$ ، ٠)

وتقطع محور الصادات فى (٠ ، ب) ← (٠ ، ٣)

الاطراد : متزايدة على مجالها (لأن أ > ٠)

النوع : ليست زوجية ولا فردية

ملاحظة :

١) الدالة الخطية د (س) = أ س + ب إذا كان :-

أ) أ > ٠ ← تكون الدالة تزايدية

ب) أ < ٠ ← تكزن الدالة تناقصية

٢) الدالة الخطية الخالية من الحد المطلق اى التى على الصورة د (س) = أ س هى دالة فردية

مثال

: - مثل بيانيا ٢ – ٣ س ، س≤ ٠

واوجد المجال والمدى ونوع الدالة وابحث أطرادها

الحـــل

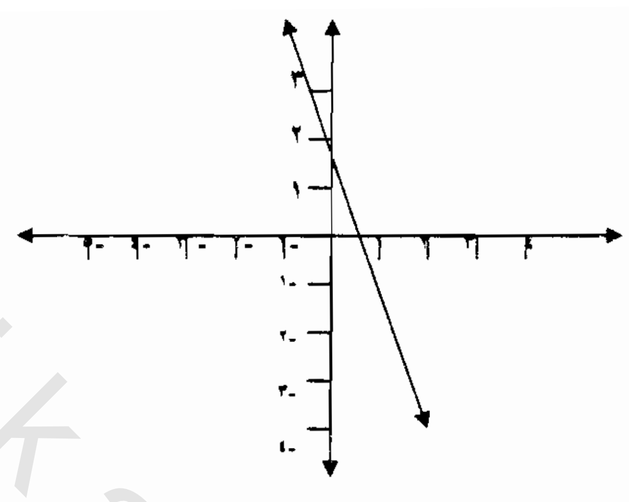
س	٠	١	٢
ص	٢	- ١	- ٤

المجال ← [٠ ، ∞ [

المدى ←] -∞ ، ٢]

نوع الدالة ← ليست زوجية ولا فردية

أطراد الزاوية ← معامل س سالب ∴ الدالة متناقصة



مثال

مثل بيانيا :-

د (س)= { س+٢ حيث ∋ س [-٢ ، ٣] ، ٨- س حيث ∋ س] ٣ ، ٧] }

وعين المجال والمدى وأبحث الأطراد ونوع الدالة

الحل

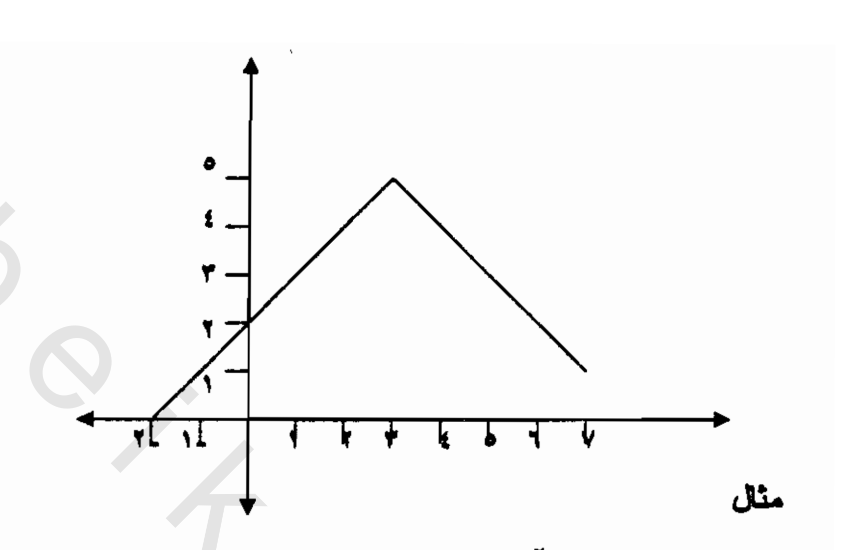
د (س) = س+٢ ، س ∋ [-٢ ، ٣]	د (س) = ٨ – س ، س∋] ٣، ٧]
د (-٢) = -٢ + ٢ = ٠ د (٣) = ٣ + ٢ = ٥	د (٣) = ٨ – ٣ = ٥ د (٧) = ٨ – ٧ = ١

المجال (من رأس المسألة) [-٢ ، ٧]

المدى (من الرسم) [٠ ، ٥]

الأطراد : متزايدة فى [-٢ ، ٣] لأن معامل س موجب

متناقصة فى] ٣ ، ٧] لأن معامل س سالب



مثال

:- أذا كان د (س) = $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$ أرسم الدالة

وأوجد المجال والمدى وأبحث أطرادها ونوعها .

<u>الحل</u>

:. د(س) = $\frac{س^{٢}-١}{س-١}$ = $\frac{(س-١)(س+١)}{س-١}$ = س+١

ولكن المجال = ح – { ١ }

المدى = ح – { ٢ }

:.معامل س موجب فهي متزايدة

ونوعها : ليست فردية ولا زوجية

مثال

أرسم الدالة

د (س) =
- س+٥ ، س ∈ [-٥ ، -٢]
- ٣ ، س ∈] -٢ ، ٢ [
- ٥ – س ، س ∈ [٢ ، ٥]

وعين المجال والمدى وأبحث نوعها و أطرادها

الحل

القاعدة الأولى			القاعدة الثانية			القاعدة الثالثة		
ص=س+٥،س∈[-٥،-٢]			ص=٣ ، س∈]-٢،٢[			ص= ٥- س،س∈ [٢ ، ٥]		
س	-٥	-٢	س	-٢	٢	س	٢	٥
ص	صفر	٣	ص	٣	٣	ص	٣	صفر

المدى (من الرسم) [٠ ، ٣]

المجال [-٥ ، ٥]

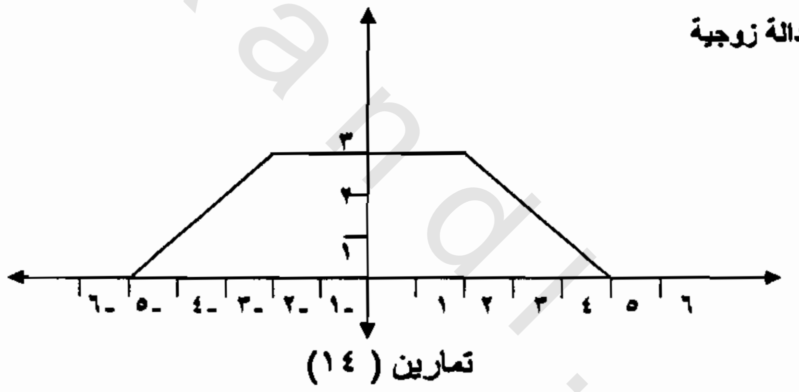
الأطراد : متزايدة فى [-٥ ، -٢]

ثابتة فى] -٢ ، ٢ [

ومتناقصة فى [٢ ، ٥]

النوع : حيث انها متماثلة حول محور الصادات

∴ الدالة زوجية



تمارين (١٤)

مثل بيانياً الدوال الآتية

١) د (س) = { -١ : س < ٠ ؛ ٢ : س ≤ ٠ }

٢) د (س) = { ٢ : -٣ < س < ١ ؛ -٢ : ١ < س < ٤ }

٣) د (س) =

٤ : س < ٢

٢- س : س > ٢

٤) د (س) =

٤ س < ٠

س + ٤ س > ٠

٥) د (س) =

س – ٢ : س < ٢

٢ _ س : س > ٢

٦) د (س) =

س : س > ١

٣ س – ٢ : س < ١

٧) ٢ د (س) =

س-١ : س > ٣

٥ : س < ٣

٨) اذا كانت د : [-٢ ، ٤] – ح

حيث د (س) =

٢ + س–٢ > س >٢

٢س ٢ > س > ٤

٩) د (س) =

٤ – ٢ س : س < ٠

٤ + ٢س : س > ٠

١٠) د (س) =

س+ ٢ : س > ٠

٣ : ٠> س > ٢

٢س –١ : س < ٢

١١) د (س) =

٢ –س٢ : س > صفر

- ٣ س + ٢ : س < ٠

ثالثا... دالـــة المقيـــاس

تعريف مقياس العدد الحقيقي (القيمة المطلقة) -

يرمز لها |س| ويقرأ مقياس العدد الحقيقي ومعناه اكبر العددين (س، - س)

.: مقياس (العدد) = { نفس العدد اذا كان موجباً او = ٠ ، -العدد اذا كان العدد سالباً }

اى ان |س| = { س : س ≥ ٠ ، - س : س < ٠ }

.: |-٥| = ٥ ، |٥|=٥ ، |٢,٤| = ٢,٤ ، |-١,٥|=١,٥ ، |٠,٧|=٠,٧ ، |٠|=٠

ملاحظة

|س| = [س] عندما س ∈ ط ={ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... }

خواص مقياس العدد الحقيقى

١) |س| > ٠ ، |س| = ٠ ↔ س= ٠

.: مقياس العدد هو عد غير سالب

مثال

أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية : -

أ) |س| = -٢

ب) |س+١|+ ٥ = -

الحـــل

أ) |س| = -٢ مرفوض لأن |س| ≥ ٠

ب) |س+١| + ٥ = -١ .: |س+١| = -٥ -١ .: |س+١| = -٦ مرفوض

مثال

عين مجال د (س) = $\frac{س}{|س+1|}$

الحـــل

:. المجال = ح _ { اصفار المقام }

:. |س+1| = ٠ :. س + ١ = ٠ :. س = -١

:. المجال = ح _ {-١}

٢) |س| = |- س|

مثلاً : |٦| = |-٦| = ٦

|س-٣| = |٣-س| ، |س-أ| = |أ - س|

مثال

عين نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية او فردية

١) د (س) = س ^٤^ + $\frac{|س|}{س^{٢}}$

٢) د (س) = $\frac{حا^{٢} س}{|س|-٦}$

الحـــل

د (س) = س ^٤^ + $\frac{|س|}{س^{٢}}$

:. د(- س) = س ^٤^ + $\frac{|س|}{س^{٢}}$ = س ^٤^ + $\frac{|س|}{س^{٢}}$

= د (س) :. الدالة زوجية

٢) د (س) = $\frac{حا^{٢} س}{|س|-٦}$ د (- س) = $\frac{حا^{٢} س}{|س|-٦}$ = د(س) الدالة زوجية

٣) إذا كان |س| = أ ⟵ س = ± أ

مثال

حل المعادلات الآتية : -

١) |س| = ٣   ٢) |س+١| = ٥

الحـــل

١) |س| = ٣ ⟵ س = ±٣

٢) |س+١| = ٥

∴ س + ١ = ± ٥

∴ س + ١ = ٥ ⟵ س = ٤

أ، س + ١ = -٥ ⟵ س = -٦

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، -٦ }

٤) إذا كان |س| = |ص| فان س = ± ص

مثال : حل المعادلة |س-١| = |س+٣|

الحـل

∴ س - ١ = ± (س + ٣)

∴ س - ١ = س + ٣	س - ١ = - س - ٣
∴ -١ = ٣ مرفوض	٢ س = -١ ∴ س = -١

∴ مجموعة الحـــل = { -١ }

٥) |س| × |ص| = |س.ص|

مثلاً : |٣| × |-٤| = |-١٢| = ١٢

|-٨س| = |-٨| × |س| = ٨ |س|

٦) |س + ص| ≥ |س| + |ص|

ويحدث التساوى فى حالة س ، ص لهما نفس الأشارة

|١+٦|= |١| + |٦| ، |-٤-٣|= |-٤|+ |-٣|

، |٧-٤| > |٧| + |-٤|

٧) √(س^{٢}) = |س|

√(٧^{٢}) = |٧| = ٧ ، √(س^{٦}) = س^{٣}

٨) |س|^{٢} = س^{٢}

مثلا : |س^{٢}| = |س|^{٢} = س^{٢}

مثال

<u>حل المعادلات الآتية : -</u>

١) س^{٢} - ٤ |س| + ٣ = ٠

٢) |س| + ٢ س^{٢} = ٣

٣) (|س-١|)^{٢} + |س-١| = ١٢

٤) |س| (|س|-٥) = ٢٤

<u>الحل</u>

١) (|س|)^{٢} - ٤ |س| + ٣ = ٠

∴ (|س| - ٣)(|س| - ١) = ٠

|س| = ٣ ← س=±٣ ، |س| = ١ س=±١

مجموعة الحل = {-١، ١ ، -٣ ، ٣ }

٢) |س| + ٢ س^{٢} = ٣ نعيد الترتيب

|س|^{٢} + |س| -٣ =٠ (٢ |س| +٣)(|س| -١)=٠

٢ |س| = -٣ وهذا مرفوض

أ. |س| = ١   س= ±١

مجموعة الحل = { ١ ، -١ }

٣) (|س-١|)^{٢} + |س-١| = ١٢

(|س-١|+٤)(|س-١|-٣)=٠

|س-١| = -٤   *مرفوض*

|س-١|=±٣   س= -٤

|س-١|=-٣   س=٢

مجموعة الحل = { -٢ ، ٤ }

٤) |س| (|س|-٥) = ٢٤

باستخدام خاصية التوزيع   (| س |)^{٢} – ٥| س | – ٢٤ =٠

(|س|-٨) (|س| + ٣) = ٠

|س| = ٨ |س| = ± ٨

مجموعة الحل = { -٨ ، ٨ }

تعريف

|س| = { س   عندما س ≥ ٠
         - س   عندما س < ٠

<u>مثلا</u>

|س^{٢}| = { س^{٢} عندما س ≥ ٠
         - س^{٢} عندما س < ٠

<u>بينما</u> | س^{٢} | = س^{٢} ، | س^{٤} | = س^{٤} ، ....

تعريف

إذا كان أ ∋ ح$^{+}$ ، ب ∋ ح فإن

|أ.س + ب| =
- أس + ب عندما س ≤ -ب/أ
- -أس - ب عندما س < -ب/أ

فمثلا :

|س + ٣| =
- س+٣ عندما س ≤ -٣
- -س-٣ عندما س < -٣

|٣س-٧| =
- ٣ س-٧ عندما س ≤ ٧/٣
- -٣س+٧ عندما س < ٧/٣

|٧-٣س| = |٣س-٧| =
- ٣ س-٧ عندما س ≤ ٧/٣
- -٣س+٧ عندما س < ٧/٣

ملاحظات

(١) عند إعادة تعريف المقياس يجب أن يكون معامل س موجباً
(٢) يعاد التعريف في حالة وجود س خارج المقياس

مثال

<u>**حل المعادلة**</u>

|س + ٤| + ٢س + ٥ = ٠

<u>**الحل**</u>

الايمن =
- س+٤+٢س+٥ عندما س ≤ -٤
- -س-٤ +٢س+٥ عندما س < -٤

= { ٣ س +٩ عندما س ≤ -٤
 س+١ عندما س > -٤ }

عندما س ≤ -٤

٣ س +٩

٣ س = -٩

س = -٣ > -٤

مقبول

عندما س > -٤

س+١=٠

- س = -١ ≯ -٤

مرفوض

مثال

<u>حل المعادلة</u>

٣|س-١|=١٣-٤س

<u>الحل</u>

٣|س-١|+٤س-١٣=٠

الايمن = { ٣س - ١ + ٤س -١٣ عندما س ≥ $\frac{١}{٣}$
 - ٣ س + ١ + ٤ س - ١٣ عندما س < $\frac{١}{٣}$ }

= { ٧س -١٤ عندما س ≥ $\frac{١}{٣}$
 س- ١٢ عندما س < $\frac{١}{٣}$ }

٧س -١٤ =٠

٧ س = ١٤

س= ٢ > $\frac{١}{٣}$

مقبول

س - ١٢ = ٠

س = ١٢ > $\frac{١}{٣}$

مرفوض

مجموعة الحل = { ٢ }

مثال

حل المعادلة ٢س |س-٢| -٣ س +٦=٠

الحل

٢س |س-٢| -٣ س +٦=٠

الايمن =
- ٢س^{٢} – ٤س – ٣ س + ٦ عندما س ≤ ٢
- - ٢س^{٢} + ٤س – ٣ س + ٦ عندما س > ٢

=
- ٢س^{٢} – ٧ س + ٦ عندما س ≤ ٢
- - ٢س^{٢} + س + ٦ عندما س> ٢

عندما س ≤ ٢

٢ س^{٢} – ٧ س + ٦ = ٠

(٢س – ٣) (س – ٢) =٠

س= $\frac{٣}{٢}$ مرفوضة س = ٢

عندما س > ٢

- ٢س^{٢} + س + ٦

(٢س + ٣) (س – ٢) =٠

س= $\frac{-٣}{٢}$ مرفوضة س = ٢

مجموعة الحل = { ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ }

مثال

حل المعادلة ٥ – ٣ |س- ٢| = ٠

الحل

الايمن =
- ٥ – ٣ (س – ٢) عندما س ≤ ٢
- ٥ – ٣ (- س + ٢) عندما س > ٢

=
- ٥ – ٣ س + ٦ عندما س ≤ ٢
- ٥ + ٣ س – ٦ عندما س> ٢

=
- ١١- ٣ س عندما س ≤ ٢
- ٣ س – ١ عندما س> ٢

عندما س ≤ ٢

١١ – ٣ س = ٠

١١ = ٣ س

س = $\frac{١١}{٣}$ < ٢

مقبول

عندما س <٢

٣ – ١ = ٠

٣ س = ١

س = $\frac{١}{٣}$ > ٢

مقبول

مجموعة الحل = { $\frac{١١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ }

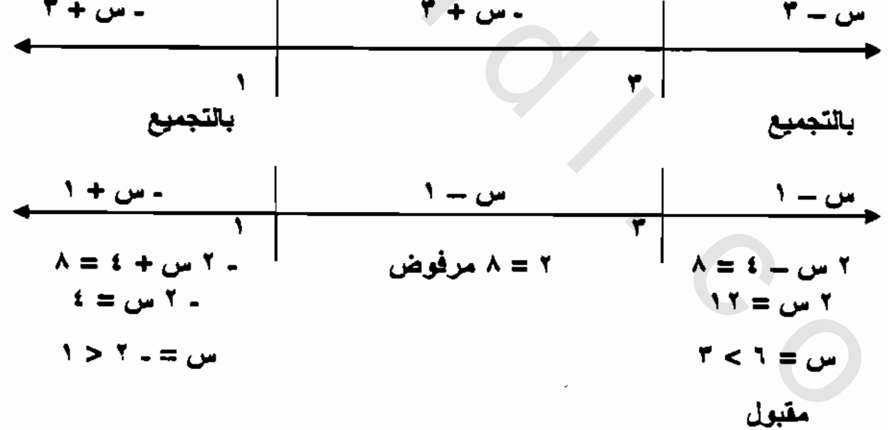
مثال

حل المعادلة

|٣- س| + |س-١| = ٨

الحل

|٣- س| + |س-١| = ٨



مجموعة الحل = { ٦ ، -٢ }

نتيجة :-

إذا كان |س| < أ فإن – أ < س < أ

<u>فمثلا</u> |س| < ٣ ، -٣ < س < ٣

|س| ≤ ٥ ، ٥ ≥ س≥٥

نتيجة :-

إذا كان |س| > أ فإن س> أ أ، س < -أ

<u>فمثلا</u> |س| > ١ ، س > ١ أ ، س < -١

|س| ≤ ٣ ، س ≤ ٣ أ، س ≥ -٣

س ∋ ح –]- ٣ ، ٣ [

مثال

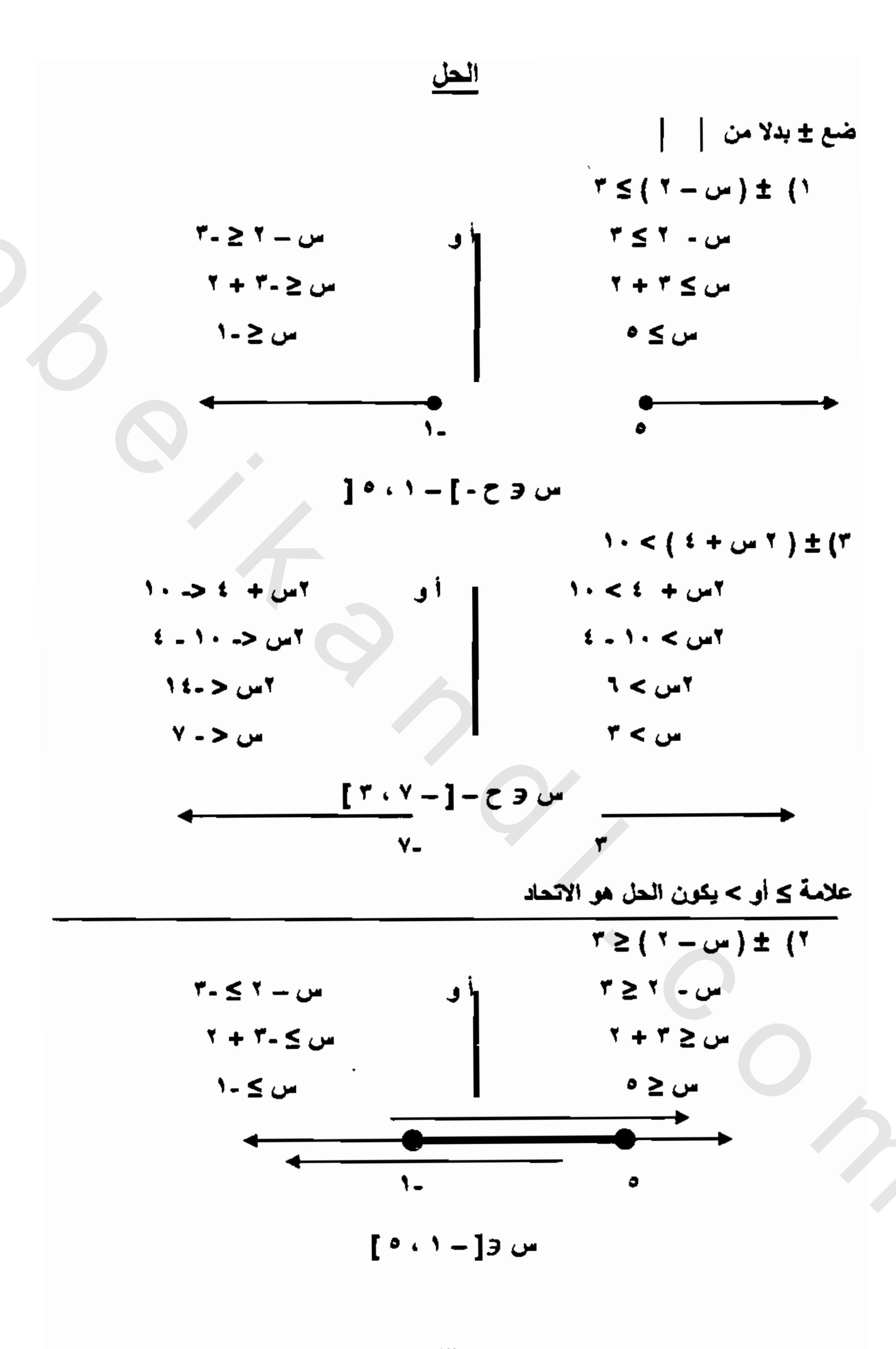
<u>حل المتباينات الآتية</u>

١) |س-١٢| ≤ ٣

٢) |س-١٢| ≥ ٣

٣) |٢س+١٤| > ١٠

٤) |٢س+١٤| < ١٠



الحل

ضع ± بدلا من | |

٣ ≤ (٢ – س) ± (١

٣- ≥ ٢ – س	أو	٣ ≤ ٢ - س
٢ + ٣- ≥ س		٢ + ٣ ≤ س
١- ≥ س		٥ ≤ س

١-   ٥

] ٥ ، ١ – [- ح ∋ س

١٠ < (٤ + س ٢) ± (٣

١٠ -> ٤ + ٢س	أو	١٠ < ٤ + ٢س
٤ - ١٠ -> ٢س		٤ - ١٠ < ٢س
١٤- > ٢س		٦ < ٢س
٧ - > س		٣ < س

[٣ ، ٧ –] – ح ∋ س

٧-   ٣

علامة ≤ أو > يكون الحل هو الاتحاد

---

٣ ≥ (٢ – س) ± (٢

٣- ≤ ٢ – س	أو	٣ ≥ ٢ - س
٢ + ٣- ≤ س		٢ + ٣ ≥ س
١- ≤ س		٥ ≥ س

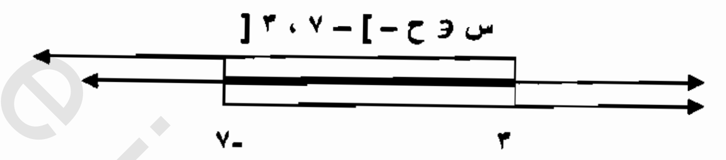
١-   ٥

[٥ ، ١ –]∋ س

± (٢ س + ٤) < ١٠

٢س + ٤ < ١٠ | أو | ٢س + ٤ > -١٠
٢س < ١٠ - ٤ | | ٢س > -١٠ - ٤
٢س < ٦ | | ٢س > -١٤
س < ٣ | | س > -٧

س ∈ ح −] −٧ ، ٣ [



علامة ≤أو < يكون الحل هو المشترك او التقاطع

التمثيل البياني لدالة المقياس

الحالة الأولى :

ارسم الشكل البياني للدالة د (س) = |س|

الحـــل

د (س) = { س : س ≥ ٠ ، - س : س < ٠

س	٠	١	٠	-١
د(س)	٠	١	٠	١

المجال — ح ، المدى — [٠ ، ∞ [

الاطراد : تزايدية فى [٠ ، ∞[، تناقصية فى] - ∞ ، ٠]

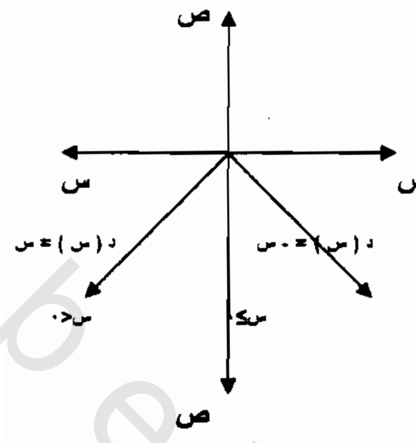
النوع : زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

بداية الشعاعين : (صفر ، صفر)

د (س) = س ، س ≥ ٠
د (س) = - س ، س < ٠

الحالة الثانية :

ارسم الشكل البيانى لدالة د (س) = - |س|



الحل

د (س) = { - س ، س ≥ ٠ ؛ س ، س < ٠ }

المجال : ح

المدي =] ∞ ، ٠]

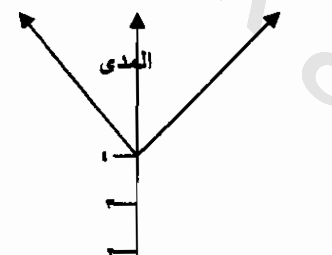
الأطراد : متزايدة عندما س ∋] -∞ ، ٠]   تناقصية عندما س ∋ [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية   بداية الشعاعين (صفر ، صفر)

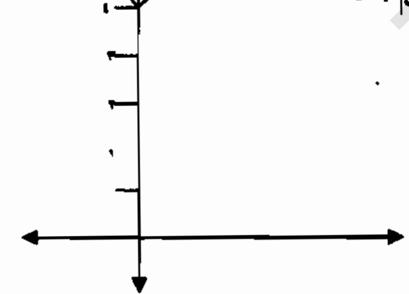
الحالة الثالثة :

|س| + ب (الإزاحة الصادية)

ارسم الشكل البياني للدالة : د (س) = |س| + ٤



الحل



س	٠	١	٢	٠	-١	-٢
د (س)	٤	٥	٦	٤	٥	٦

|س| = { س + ٤ : ≥ ٠ ؛ - س + ٤ : س < ٠ }

المجال = ح   المدي = [٤ ، ∞ [

الدالة : زوجية - بداية الشعاعين (٠ ، ب) = (٠ ، ٤)

الدالة تزايدية في [٠ ، ∞ [ن تناقصية في] -∞ ، ٠]

الحالة الرابعة : -

- |س| + ب (الإزاحة الصادية)

ارسم الدالة د (س) = ٥ ــ ٢|س | ثم أوجد المدى والمجال

والأطراد ونوع الدالة

الحـــل

٥ - ٢س

س	٠	١
ص	٥	٣

٥ + ٢س

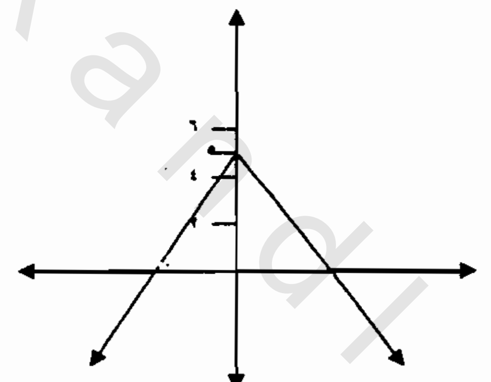
س	٠	-١
ص	٥	٣

المجال ـ س ح

المدي :] - ∞ ، ٥]

الأطراد : تزايدية س] -∞ ، ٠ [وتناقصية س [٠ ، ∞ [

النوع ك زوجية :. بدية الشعاعين (٠ ، ٥)



الحالة الخامسة

د (س) =| أ س + ب |

مثل بيانيا د (س) = | ٢س - ٣ |

الحـــل

د (س) = { ٢س ــ٣ عندما س ≥ ٣/٢ ؛ - ٢ س + ٣ عندما س < ٣/٢ }

بداية الشعاعين : ($\frac{ب}{أ}$ ، ٠)

الشكل متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته س= $\frac{ب}{أ}$

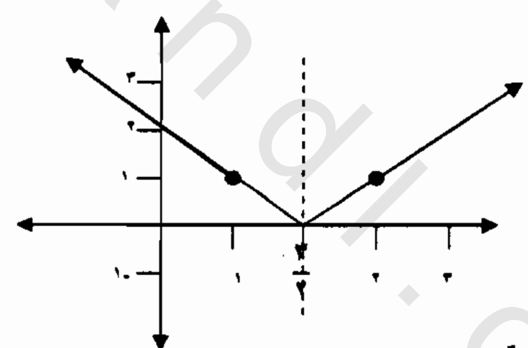
س	٢	١	٠
ص	١	١-	٣-

المجال = ح ، **المدي** = [٠ ، ∞ [

الأطراد : تناقصية عندما س ∈] - ∞ ، $\frac{٣}{٢}$] تزايدية عندما ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

الشكل : متماثل بالنسبة للمستقيم الذي معادلته س = $\frac{٣}{٢}$



الحالة السادسة :

د (س) = | ا س + ب |

مثل بيانيا الدالة د (س) = | س + ٢ |

الحـل

س	١-	٢-	٣-
ص	١	٠	١

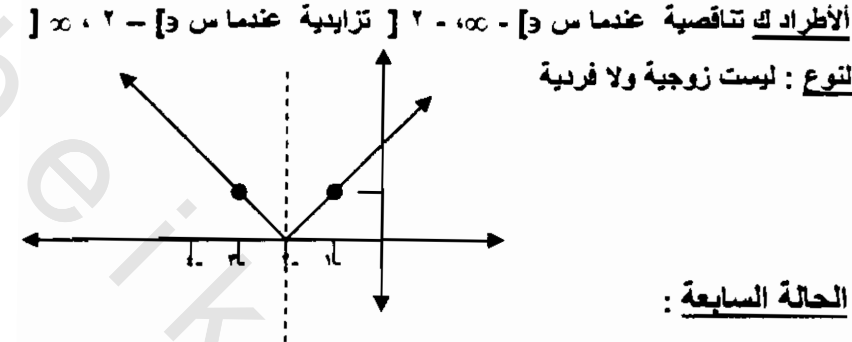
$$د(س) = \begin{cases} س + ٢ \\ -س + ٢ \end{cases}$$

رأس الشعاعين $(\frac{ب}{أ} ، ٠) - (-٢ ، ٠)$

المجال = ح ، **المدي** = [٠ ، ∞ [

الأطراد ك تناقصية عندما س ∈] -∞، -٢] تزايدية عندما س ∈] -٢ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية ولا فردية



الحالة السابعة :

الإزاحة في اتجاه المحورين

د (س) = ا أس + ب ا + جـ حيث بداية الشعاعين

$(\frac{-ب}{أ} ، جـ)$ والشكل متماثل بالنسبة للمستقيم الذى معادلته س = $\frac{ب}{أ}$

مثال **مثل بيانيا :** -

د (س) = ا ٢ س -٥ ا + ١ وعين مداها وابحث أطرادها

الحـل

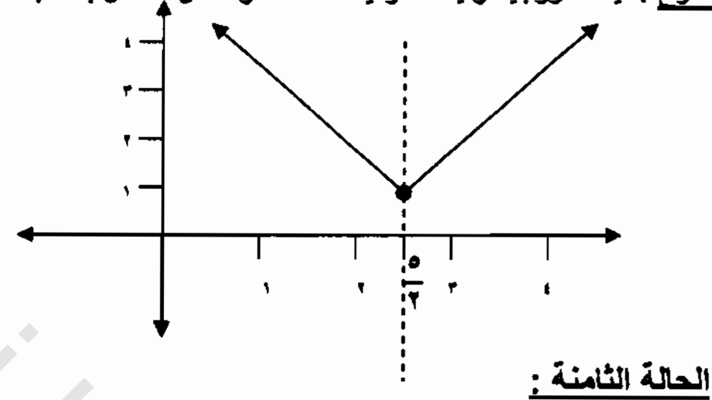
$$د(س) = \begin{cases} ٢س - ٥ + ١ \quad عندما\ س \geq \frac{٥}{٢} \\ -٢س + ٥ + ١ \quad عندما\ س < \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ٢س - ٤ \quad : س \geq \frac{٥}{٢} \\ -٢س + ٦ \quad س < \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

المجال = ح **المدى** [١ ، ∞ [

الأطراد : متناقصة عندما س∋] - ∞ ، $\frac{٥}{٢}$ [متزايدة عندما س ∋ [$\frac{٥}{٢}$ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية   والشكل متماثل بالنسبة للمستقيم س = $\frac{٥}{٢}$



الحالة الثامنة :

د (س) = |س + ب|

مثال

ارسم الدالة د (س) = - | س + ٢ |

ثم استنتج   المجال : المدى ، وابحث الاطراد ونوع الدالة .

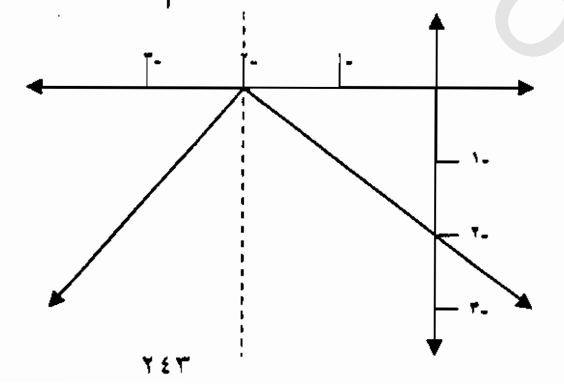
الحـــل

المجال = ح   المدى =] - ∞ ، ٠]

الأطراد : تزايدية فى] - ∞ ، ٢]   تناقصية فى [-٢ ، - ∞ [

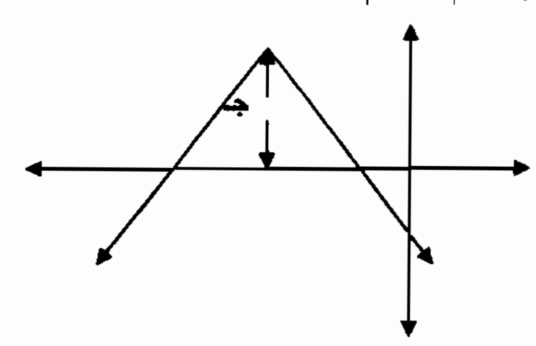
النوع : ليست زوجية وليست فردية

بداية الشعاعين (-٢ ، ٠) حيث س = $\frac{- ب}{أ}$ = $\frac{-٢}{١}$ = -٢



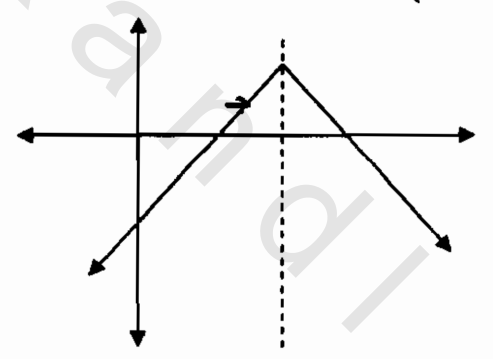
الحالة التاسعة :

د (س) = - |س + ب| + جـ



الحالة العاشرة :

د (س) = |س – ب | + جـ



حل معادلات المقياس بيانياً

الحل البياني معناه إيجاد ألأحداثى السيني لنقط تقاطع المنحنيات :

مثال

حل المعادلات الأتية : بيانياً : -

١) | س – ١٢ | = ٣

٢) | س – ١١ | = | س + ١٢ |

٣) | س – ١٢ | + ٦ – ٢س = ٠

الحل رقم (١)

ا س ــ ٢ ا = ٣

نضع د (س) = ا س ــ ٢ ا ، د٢ (س) = ٣

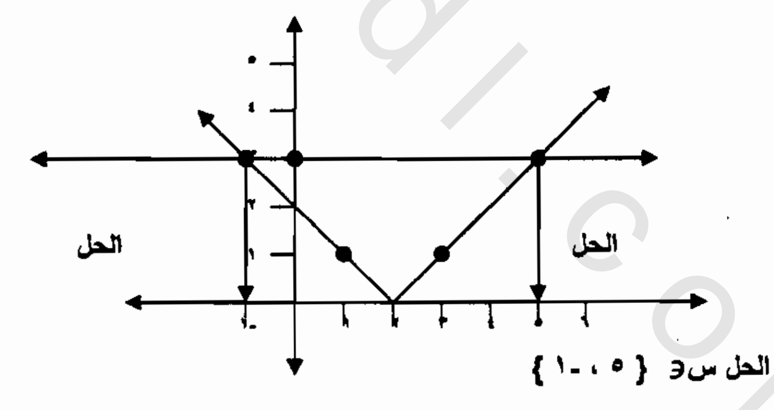
د ١ (س) = { س ــ ٢ س ≥ ٢ ؛ - س + س < ٢ }

س	٢	٣
ص	٠	١

ص=س-٢ ص=س+٢

س	٢	١
ص	٠	١

بالنسبة الى د (س) = ٣ نرسم خط مستقيم ص = ٣ يوازى محور السينات



الحل س∋ { ٥ ، -١ }

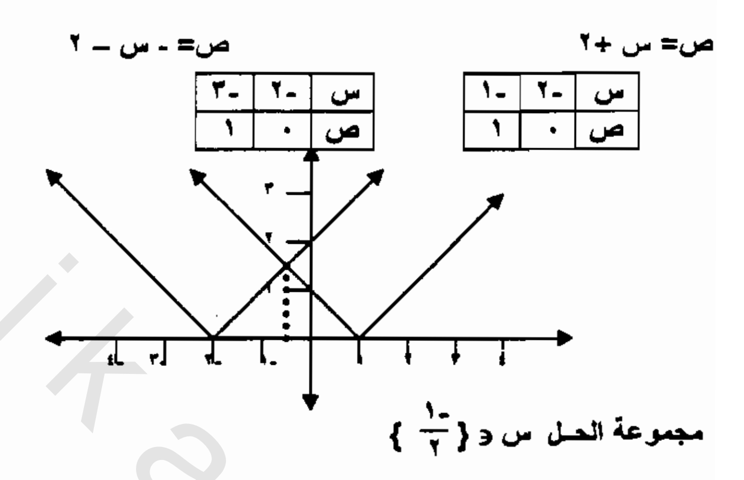
الحـل رقم (٢)

ا س ــ ١ ا = ا س + ٢ ا

نضع د١ (س) = ا س ــ ١ ا = { س- ١ س ≥ ١ ؛ - س + ١ س <١ }

ص= س ــ ١ ص= - س +١

نضع د ٢(س) = | س + ٢ | =
{ س + ٢ س ≥- ٢
{ - س ــ ٢ س < -٢



ص= س +٢ ص= - س ــ ٢

س	-٢	-١
ص	٠	١

س	-٢	-٣
ص	٠	١

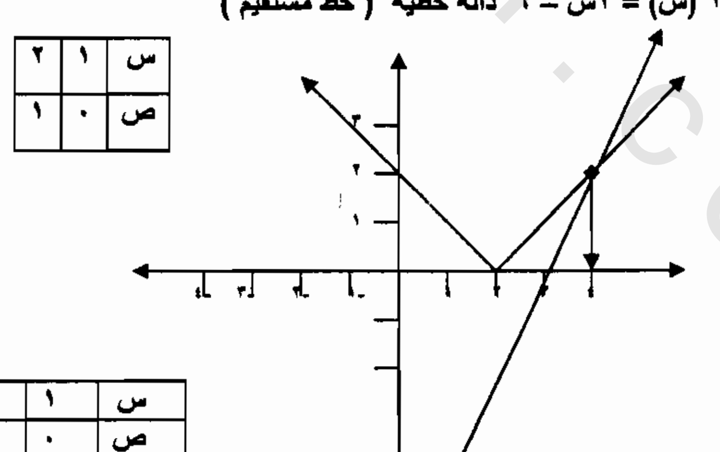
مجموعة الحـل س د { $\frac{-١}{٢}$ }

حل رقم (٣)

| س ــ٢ | + ٦ ــ ٢ س = ٠ | س ــ٢ | = ٢س ــ٦

د١ (س) = | س ــ ٢ | =
{ س ــ ٢ س ≥
{ - س + ٢ س < ٢

٢) د ٢ (س) = ٢س ــ ٦ دالة خطية (خط مستقيم)



س	١	٢
ص	٠	١

س	١	٠
ص	٠	١

الحل س = ٤

تمرين (١٥)

حل المعادلات الآتية جبرياً

١) | س – ٢ | = ٣

٢) | ٢س –٣ | = -٩

٣) | ٢س + ٤ | = | –١٥

٤) | ٣س – ٤ | + ٧ = ٠

٥) | س – ٣ | = | س – ١٧

٦) | ٢ س – ٣ | = | س + ١٢

٧) | ٢ س – ٥ | + ٣ س – ٧ = ٠

٨) | ٣ س + ٤ | + ٩ – ٢ س = ٠

٩) س٢ – ٧ | س | + ١٢ = ٠

١٠) س٢ – ٥ | س | – ١٤ = ٠

١١) س٢ – ٥ | س | – ١٤ = ٠

١٢) س٢ + ٨ | س | – ٢٠ = ٠

١٣) س٢ – | س | = ٠

١٤) س٢ | س | + ٣ س = ٠

ارسم الدوال الآتية واكتب المجال ، والمدى ، الطراد والنوع

١٥) د (س) = | ٢س – ٦ | + ٤

١٦) د (س) = | ٢س – ٣ | – ٤س + ٢

١٧) د (س) = | س | + س

١٨) د (س) = | ٢س – ٨ | + ٢س – ٧

١٩) د (س) = | ٣ س – ١ | + س- ٣

٢٠) د (س) = | ٢ س + ١ | + س + ٢

٢١) د (س) = ٣- | ٢ – س |

٢٢) د (س) = | ٣ س – ٤ |

٢٣) د(س) = س | س – ٢ |

٢٤) د (س) = س | س |

د (س) = $\frac{|س|}{س}$

<u>اوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية بيانيا</u>

٢٦) د (س) | س – ٦ | = ٣

٢٧) د (س) = | س + ١ | = ٣س – ٩

الدالـــــة التربيعيـــة

الصورة العامة

د (س) = ا $س^٢$ + ب س + حـ ، ا ≠ ٠ وهى في متغير واحد

التمثيل البياني

تمثل بيانياً بمنحنى (قطع مكافئ) محوره يوازى محور الصادات

ونقطة رأسه ($\frac{-ب}{٢ا}$ ، د $\frac{-ب}{٢ا}$)

حيث ا معامل $س^٢$ ، ب معامل س

حالات خاصة للدالة التربيعية

الحالة الأولى :-

١) الدالة د(س) = $س^٢$

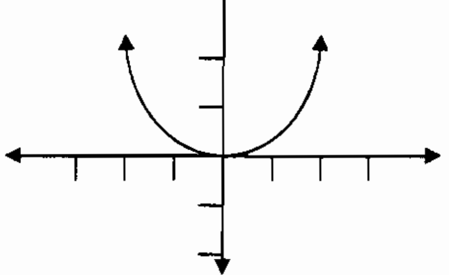
الخصائص

أ) المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

ب) راسي المنحنى (٠ ، ٠)

ج) مدى الدالة [٠ ، ∞ [

د) الدالة تناقصية في] - ∞ ، ٠] وتزايديه في [٠ ، ∞ [



الحالة الثانية:-

٢) الدالة د (س) = - س^{٢}

الخصائص

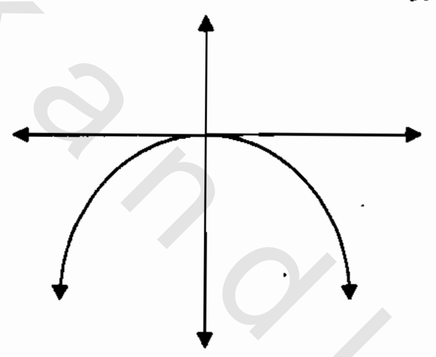
المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

راس المنحنى (٠،٠)

ج) مدى الدالة] - ∞ ، ٠]

د) الدالة تزايدية في] - ∞ ، ٠] وتناقصية في [٠ ، ∞ [

هـ) الدالة زوجية



الحالة الثالثة :-

٢) الدالة د (س) = أ س^{٢}

الخصائص

أ) المنحنى متماثل بالنسبة لمحور الصادات

ب) رأس المنحنى (٠ ، ٠)

ت) المنحنى مفتوح إلى أعلى (إذا كانت أ > ٠) وفى هذه الحالة يكون المدى

[٠ ، ∞ [وتكون الدالة تناقصية في] - ∞ ، ٠] وتزايدية في [٠ ،∞ [

د) المنحنى مفتوح إلى أسفل (إذا كانت أ < ٠) وفى هذه الحالة يكون المدى

] - ∞ ، ٠] وتكون الدالة تزايدية في] - ∞ ، ٠] وتناقصية في[٠ ، ∞ [

هـ) الدالة زوجية

ص

س/ و س

ص/

الحالة الرابعة : -

٤) الدالة د (س) = (س – م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص : -

(أ) رأس المنحنى (م ، ٠)

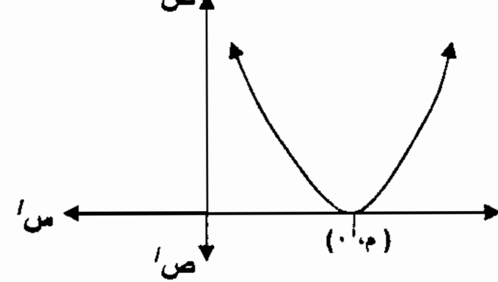
(ب) المدى [٠ ، ∞ [

(ج) الدالة تناقصية في] - ∞ ، م] وتزايديه في [م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجية ولا فرديه

(هـ) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة ص = س^{٢} بإزاحة قدرها م في الاتجاه الموجبة لمحور السينات

(و) المنحنى متماثل حول المستقيم س = م



الحالة الخامسة: -

(٥) الدالة د (س) = (س + م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص : -

(أ) رأس المنحنى (- م ، ٠)

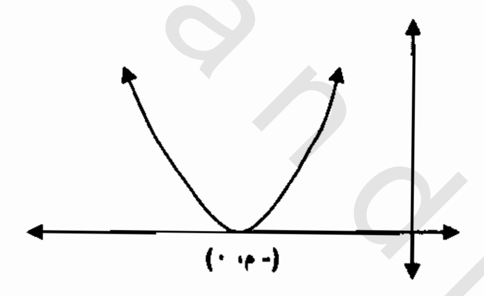
(ب) المدى [٠ ، ∞ [

(ج) الدالة تناقصية في] - ∞ ، - م] وتزايديه في [- م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجيه ولا فرديه

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم س = - م

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة ص = س^{٢} بإزاحة قدرها م في الاتجاه السالب لمحور السينات



الحالة السادسة : -

(٦) الدالة د (س) = - (س - م)^{٢} ، م > ٠

الخصائص :-

(أ) رأس المنحنى (م ، ٠)

(ب) المدى] -∞ ، ٠]

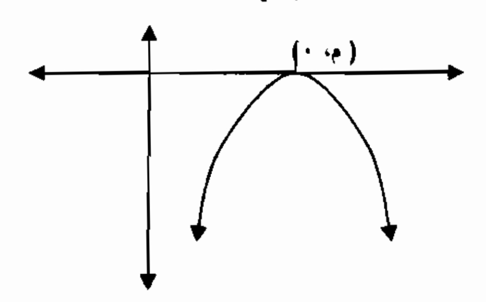
(ج) الدالة تزايديه في] -∞ ، م] وتناقصية في [م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجيه ولا فرديه

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم س = م

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة

ص = ـ س٢ بإزاحة قدرها م في الاتجاه الموجبة لمحور السينات



الحالة السابعة:ــ

(٧) الدالة د (س) = ـ (س + م)٢ ، م > ٠

الخصائص: ـ

(أ) رأس المنحنى (ـ م ، ٠)

(ب) المدى] ـ∞ ، ٠]

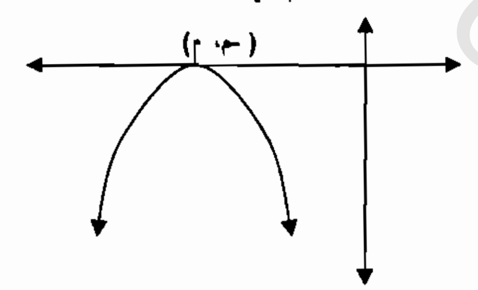
(ج) الدالة تزايديه في] ـ ∞ ، ـ م] وتناقصية في [ـ م ، ∞ [

(د) الدالة ليست زوجيه ولا فرديه

(هـ) المنحنى متماثل حول المستقيم س = ـ م

(و) يمكن اعتبار أن الشكل البياني لهذه الدالة هو صوره لمنحنى الدالة

ص = ـ س٢ بإزاحة قدرها م في الاتجاه السالب لمحور السينات



الحالة الثامنة : -

الداله $د (س) = أ (س - ل)^٢$ ، $أ \neq ٠$

لها الخواص الآتية : -

أ – رأس المنحنى الذى يمثلها (ل ، ٠)

ب – المنحنى متماثل حول المستقيم س = ل

ج – إذا كانت أ > ٠ فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أعلى وتكون الداله تناقصيه فى] -∞ ، ل] وتزايديه فى [ل ، ∞ [ومدى الداله [٠ ، ∞ [

د – إذا كانت أ < ٠ فإن المنحنى يكون مفتوحاً إلى أسفل وتكون الداله تزايديه فى] -∞ ، ل] وتناقصيه فى [ل ، ∞ [

هـ - الداله ليست زوجيه ولا فرديه إلا إذا كانت ل = ٠ فإن الداله تكون زوجيه

الحالة التاسعة :-

(٩) الداله $د (س) = أ (س - ل)^٢ + ن$ ، $أ \neq ٠$

نجد أن خواص الشكل البيانى :

أولا : إذا كانت أ > ٠ ، ل > ٠ ، ن >٠

١- رأس المنحنى (ل ، ن)

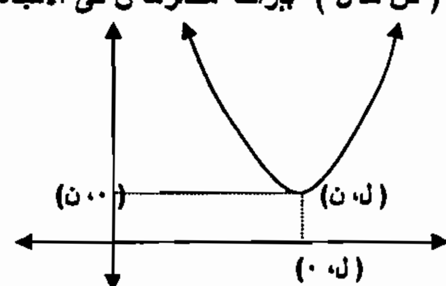
٢- المدى [ن ، ∞ [

٣- الداله تناقصيه فى] -∞ ، ل] وتزايديه فى [ل ، ∞ [

٤- المنحنى متماثل حل المستقيم س = ل

٥- يمكن اعتبار ان الشكل البيانى لهذه الداله هو صوره لمنحنى الداله

$د (س) = أ (س - ل)^٢$ بإزاحة مقدارها ن فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات .



ثانيا : إذا كانت أ < ٠ ، ل > ٠ ، ن > ٠

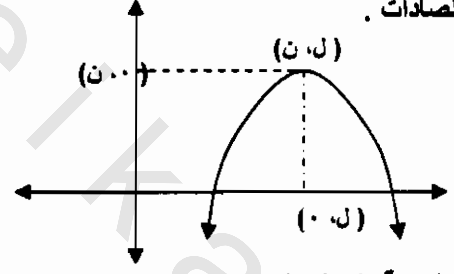
١- رأس المنحنى (ل ، ن)

٢- المدى] -∞ ، ن]

٣- الداله تزايديه فى] -∞ ، ل]   وتناقصيه فى [ل ، ∞ [

٤- المنحنى متماثل حول المستقيم س = ل

٥- الشكل البيانى هو صوره لمنحنى الداله د (س) = أ (س - ل)^{٢} بإزاحة مقدارها ن فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات .



الحالة العاشرة :-

(١٠) الداله   د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠

ملاحظات :

(١) يمكن رسم الشكل البيانى بإيجاد رأس المنحنى حيث س $\frac{-ب}{٢أ}$ ثم نكون جدولاً
لبعض قيم س وقيم د (س) المناظره على أن يتضمن الجدول نقط تقاطع المنحنى مع
محور السينات حيث (ص = ٠)

(٢) يمكن أيضا رسم الشكل البيانى بطريقة أخرى وذلك بعد أن نجعل د (س) على الصوره د (س) = أ (س - ل)^{٢} + ن ، أ ≠ ٠   ثم نكون جدولاً كما فى (١)

(٣) بعد رسم المنحنى يمكن إيجاد المدى وكذلك بحث الداله من حيث كونها زوجيه أو فرديه .

(٤) إذا كان Δ = ب^{٢} - ٤ أ جـ > ٠ فإن المنحنى يقطع محور السينات فى نقطتين
أما إذا كان Δ = ب^{٢} - ٤ أ جـ = ٠ فإن المنحنى يمس محور السينات عند رأس المنحنى

.وفى الحالـه التى فيها $ب^٢ - ٤ أ جـ < ٠$ فإن المنحنى لا يقطع محور السينات فى أى نقطه .

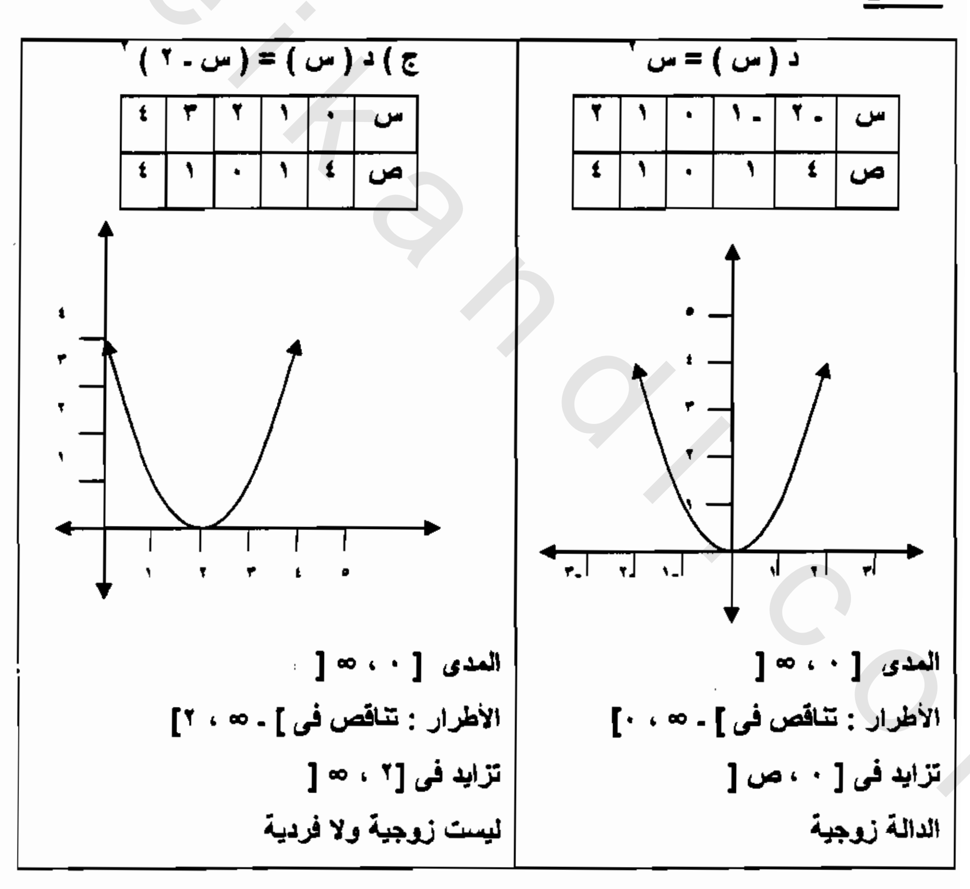
مثال :

ارسم منحنى الدوال الآتية موضحاعلى الرسم الأطراد والمدى ونوعها من حيث الزوجية والفردية .

أ) د (س) = $س^٢$ ب) د (س) = - $س^٢$

جـ) د (س) = $(س - ٢)^٢$ ء) د (س) = $س^٢ - ٣$

<u>*الحـــل*</u>



د (س) = $س^٢$

س	-٢	-١	٠	١	٢
ص	٤	١	٠	١	٤

المدى [٠ ، ∞ [

الأطرار : تناقص فى] - ∞ ، ٠]

تزايد فى [٠ ، ص [

الدالة زوجية

ج) د (س) = $(س - ٢)^٢$

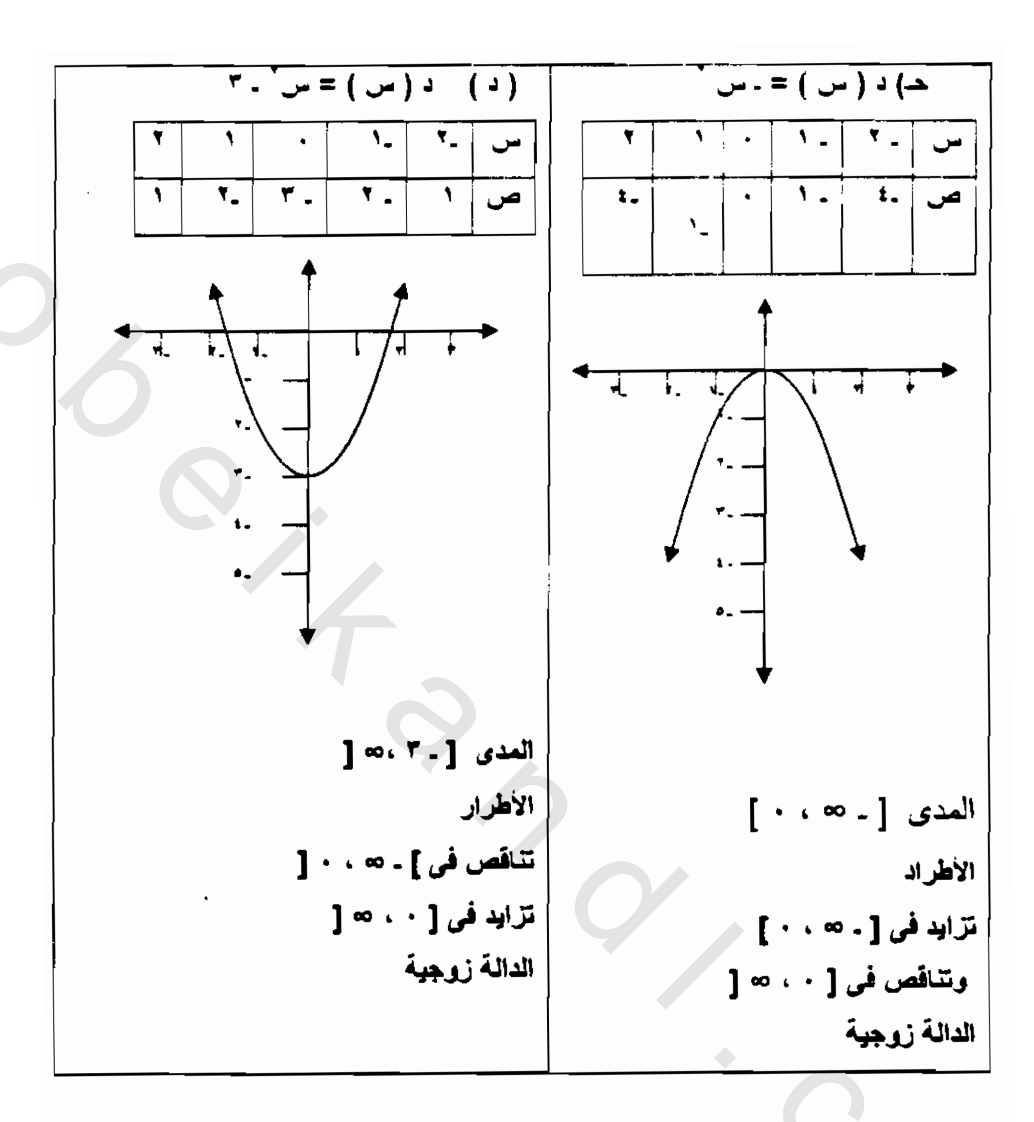
س	٠	١	٢	٣	٤
ص	٤	١	٠	١	٤

المدى [٠ ، ∞ [

الأطرار : تناقص فى] - ∞ ، ٢]

تزايد فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجية ولا فردية



هـ) د (س) = ـ س^{٢}

س	ـ ٢	ـ ١	٠	١	٢
ص	ـ٤	ـ ١	٠	ـ١	ـ٤

المدى] ـ ∞ ، ٠]

الأطراد

تزايد فى] ـ ∞ ، ٠]

وتناقص فى [٠ ، ∞ [

الدالة زوجية

(د) د (س) = س^{٢} ـ ٣

س	ـ٢	ـ١	٠	١	٢
ص	١	ـ ٢	ـ ٣	ـ٢	١

المدى [ـ ٣، ∞ [

الأطرار

تناقص فى] ـ ∞ ، ٠]

تزايد فى [٠ ، ∞ [

الدالة زوجية

مثال

اسم الدوال الأتية ومن الرسم اوجد المدى وناقش الأطراد ونوع الدالة

أ) د (س) = س^{٢} ، س ∈ [ـ ٢ ، ٣]

ب) د (س) = س^{٢} ـ ٥ ، س ≥ ٠

ج) د (س) = (س ـ ٢)^{٢} ، ≥ ٠

الحـل

أ) د (س) = س ^{٢} ، س ∈ [ـ ٢ ، ٣]

راس المنحنى = (٠ ، ٠)

د (ـ ٢) = ٤ د (٣) = ٩

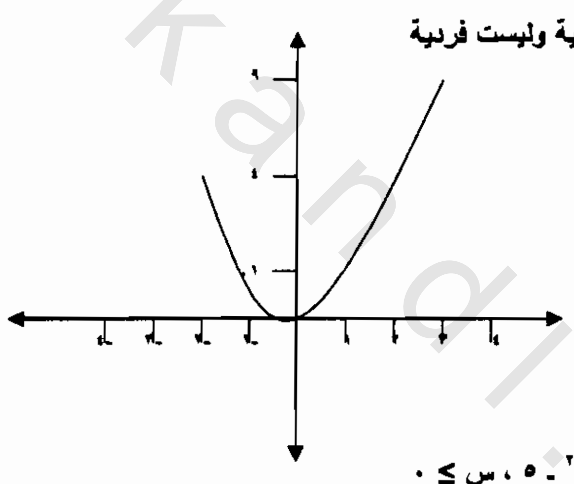
البداية رأس المنحنى النهاية

س	ـ ٢	٠	٣
ص	٤	٠	٩

المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : تناقصية فى [ـ ٢ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ٣]

ليست زوجية وليست فردية



ب) د (س) = س^{٢} ـ ٥ ، س ≤ ٠

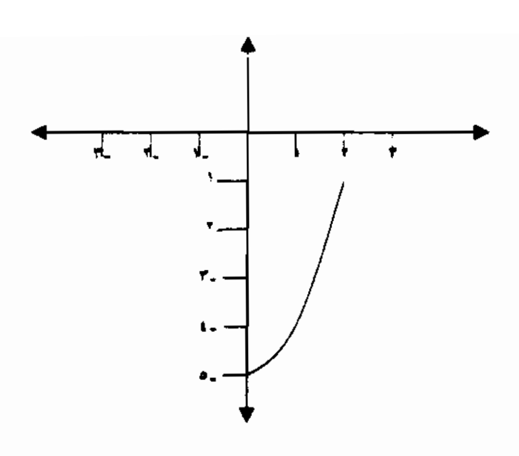
رأس المنحنى = (٠ ، ـ ٥)

د (٠) = ـ ٥ د (١) = ـ ٤ د(٢) = ـ ١

س	٠	ـ ١	ـ ٢
ص	ـ ٥	٠	١

المدى = [ـ ٥ ، ∞[

الأطراد تزايدية فى [. ، ∞[ليست زوجية وليست فردية



ج) د (س) = (س ـ ٢)^{٢} ، س ≤ ٠

رأس المنحنى = (٢ ، ٠)

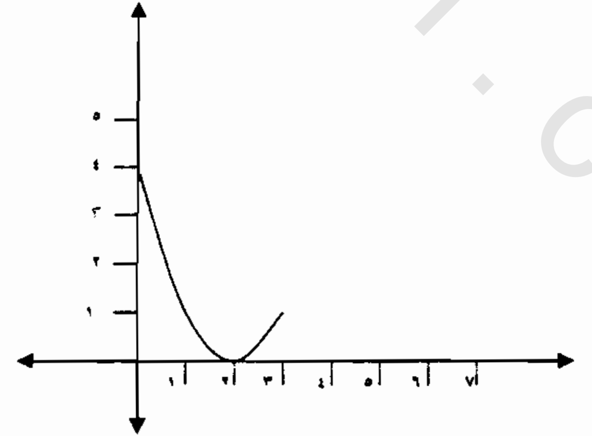
د (٠) = ٤   د (١) = ١   د (٢) = ٠   د (٣) = ١

س	٠	١	٢	٣
ص	٤	١	٠	١

المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد تناقصية فى [٠ ، ٢]   وتزايدية فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجية وليست فردية



مثال

ارسم الدوال الآتية ومن الرسم اوجد المدى وناقش ألأطراد ونوع الدالة

أ) د (س) = س | س - ١| + ٣

ب) د (س) = (س - ٢) ^{٢} - ٢ اس – ٢ ا+ ١

ج) د (س) = $\frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{اس - ١ا}$ س ≠ ١

الحـــــل

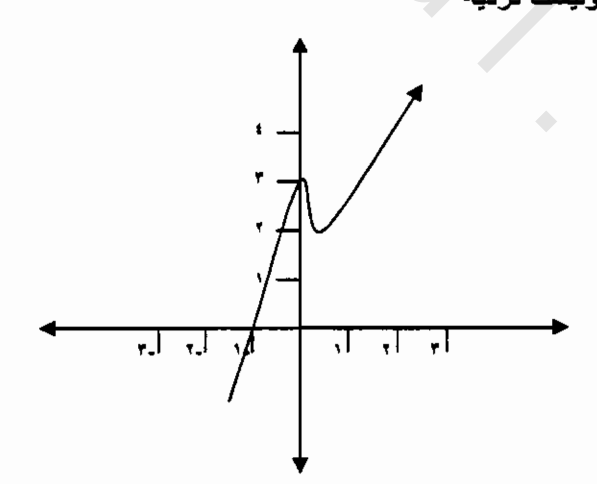
د (س) = س | س - ١| + ٣

$$د (س) = \begin{cases} (س - ١)^{٢} + \frac{١١}{٤} & س \geq ١ \\ \frac{١٣}{٤} - (س - \frac{١}{٢})^{٢} & س < ١ \end{cases}$$

المدى ح الدالة تزايدية فى الفترة]- ∞ ، ٠] وفي [$\frac{١}{٢}$ ، ∞ [

الدالة تناقصية فى الفترة [٠ ، $\frac{١}{٢}$]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



د (س) = (س - ٢)^{٢} - ٢ |س-٢|+ ١

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س} - ٢)^{٢} - ٢(\text{س} - ٢) + ١ & \text{س} \geq ٢ \\ (\text{س} - ٢)^{٢} + ٢(\text{س} - ٢) + ١ & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

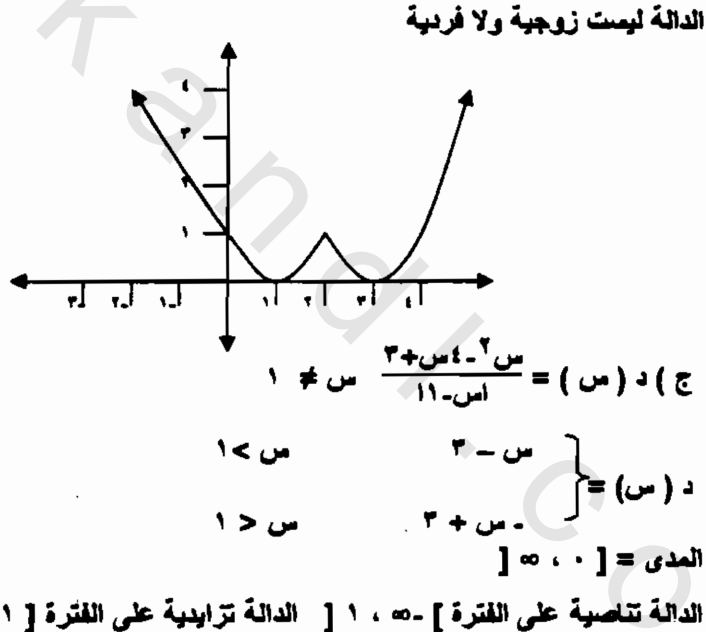
$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س} - ٣)^{٢} & \text{س} \geq ٢ \\ (\text{س} - ١)^{٢} & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

المدى = [٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على الفترة] -∞ ، ١ [، في] ٢ ، ٣ [

الدالة تزايدية على الفترة [١ ، ٢] وفي الفترة [٣ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولا فردية



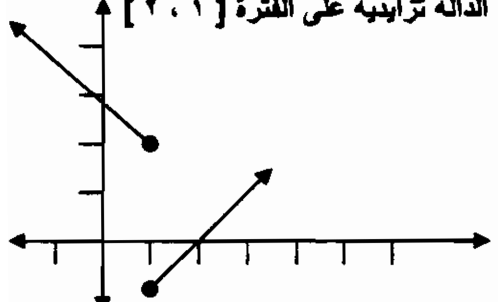
ج) د (س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}{|\text{س} - ١|}$ ، س ≠ ١

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٣ & \text{س} > ١ \\ -\text{س} + ٣ & \text{س} < ١ \end{cases}$$

المدى = [٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على الفترة] -∞ ، ١ [الدالة تزايدية على الفترة [١ ، ٢]

الدالة ليست زوجية ولا فردية



تمرين (١٦)

١) ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وبين مداها واستنتج اطرادها

أ) ص = $س^{٢}$ ب) ص = $(س - ١)^{٢}$ ج) ص $(س + ٢)^{٢}$

٢) ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وبين مداها واستنتج اطرادها

أ) ص = $- س^{٢}$ ب) ص = $- (س - ٢)^{٢}$ ء) ص = $- (س + ٣)^{٢}$

٢) ارسم منحنى الدالة د (س) = $س^{٢}$ + ٦ س + ٩

وبين رأس المنحنى ، والمدى ، اطراد الدالة ثم بين كيف يمكن الحصول على منحنى د (س) = $س^{٢}$

٤) ارسم منحنى الدالة د (س) = $س^{٢}$ - ٤ س + ٣ واوجد نقط تقاطعه مع محورى اثم بين المدى والأطراد ومعادلة خط تماثل المنحنى

٥) مثل بيانياً د (س) = $س^{٢}$ - ٣ س عندما س [- ٣ ، ٢] وبين مداها وابحث اطرادها

٦) ارسم منحنى الدالة واستنتج مداها

د (س) = { ٤ - $س^{٢}$ س ≤ ٢
٢ س - ٤ س > ٢

٧) ارسم الدالة وبين مداها

ص = س |س|

٨) ارسم منحنى الدالة ص = س |س-٢| - ١

٩) ارسم منحنى الدالة ص = (س + ١) |س| + ٢

١٠) ارسم منحنى الدالة

ص = { $(س - ١)^{٢}$ + ٢ عندما س ≤ ٠
٣ - $س^{٢}$ عندما س > ٠

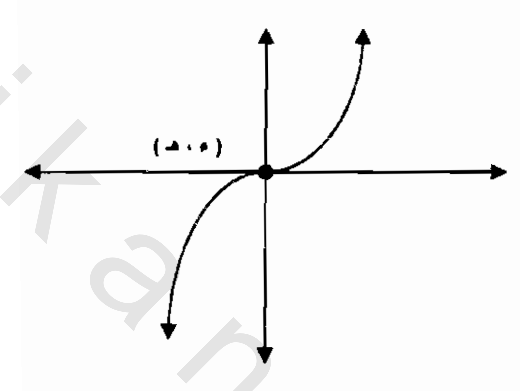
الدالـــــة التكعيبيـــــة

<u>قاعدة الدالة</u> $د (س) = ك (س - ء)^{٣} + هـ$ حيث ك ≠ ٠

تسمى (ء ، هـ) نقطة تماثل للمنحنى

<u>الشكل البياني للدالة :</u>

١) اذا كانت ك > ٠ (موجب)



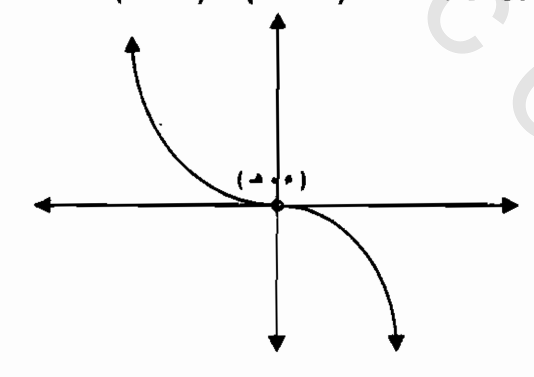
٢) اذا كانت ك < ٠ (سالب)

<u>الخواص</u>

المجال س ∈ ح والمدى ص ∈ ح

الأطراد : تزايد ك > ٠ ومتناقصة من ك < ٠

النوع : تكون فردية عندما (ء ، هـ) = (٠ ، ٠) فقط



مثال

ارسم الدوال الآتية ثم اكت المحال والمدى وألأطراد ونوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية

١) د (س) = س ٣

٢) د (س) =-٢س ٣

٣) د (س) =س ٣ + ٢

٤) د (س) = - س ٣ + ٢

٥) د (س) =(س – ٢) ٣

٦) د (س) = - (س + ٢) ٣

٧) د (س) = - (س – ١) ٣ + ٢

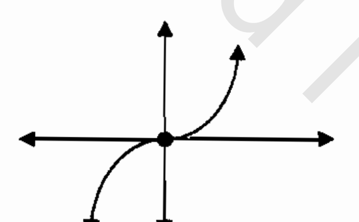
٨) د (س) = - (س – ٢)٣ + ٣

الحل

١) د (س) = س ٣ د(س) = (س-٠)٣+٠

نقطة التماثل (٠ ، ٠) صاعد

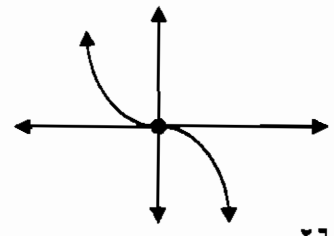
المجال س ∋ ح المدي ص ∋ ح النوع فردية الاطراد متزايد



٢) د (س) =-٢س ٣

نقطة التماثل (٠ ، ٠) هابط

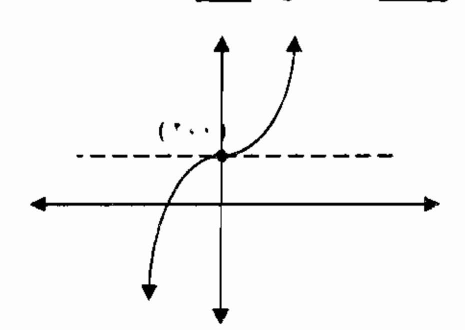
المجال س ∋ ح المدي ص ∋ ح النوع فردية الاطراد متناقصة



٣) د (س) =س ^{٣}+ ٢

نقطة التماثل (٠ ، ٢) صاعد

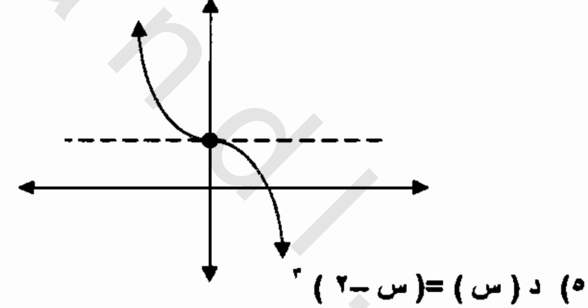
<u>المجال</u> س ∋ ح <u>المدى</u> ص ∋ ح <u>النوع</u> ليست فردية ولا زوجية <u>الاطراد</u> متزايد



٤) د (س) = - س ^{٣} + ٢

نقطة التماثل (٠ ، ٢) هابط

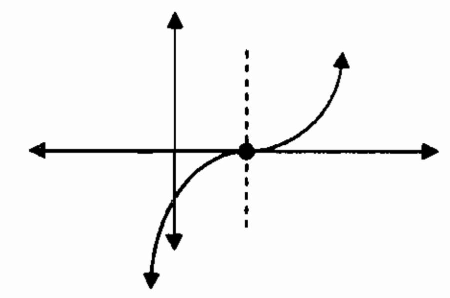
<u>المجال</u> س ∋ ح <u>المدي</u> ص ∋ ح <u>النوع</u> ليست فردية ولا زوجية <u>الاطراد</u> متناقصة



٥) د (س) =(س ــ ٢) ^{٣}

نقطة التماثل (٢ ، ٠) صاعد

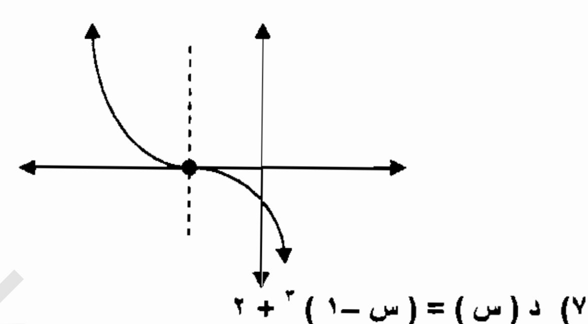
<u>المجال</u> س ∋ ح <u>المدي</u> ص ∋ ح <u>النوع</u> ليست فردية ولا زوجية



٦) د (س) = - (س + ٢) ^٣^

نقطة التماثل (-٢، ٠) هابط

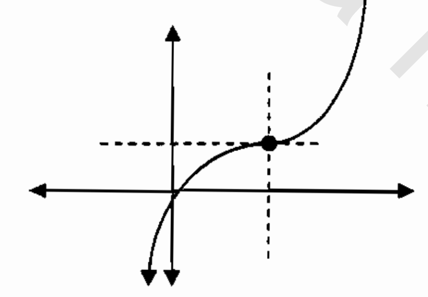
المجال س ∋ ح   **المدي** ص ∋ ح   **النوع** ليست فردية ولا زوجية   **الاطراد** متناقصة



٧) د (س) = (س – ١) ^٣^ + ٢

نقطة التماثل (١ ، ٢) صاعد

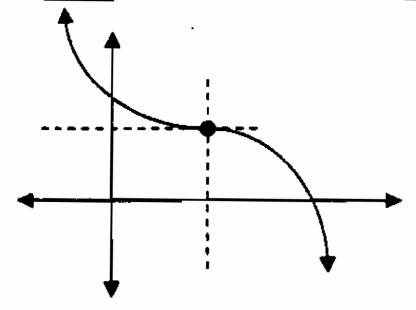
المجال س ∋ ح   **المدى** ص ∋ ح   **النوع** ليست فردية ولا زوجية   **الاطراد** متزايد



٨) د (س) = -(س – ٢)^٣^ + ٣

نقطة التماثل (٢، ٣) هابط

المجال س ∋ ح   **المدي** ص ∋ ح   **النوع** ليست فردية ولا زوجية   **الاطراد** متزايد



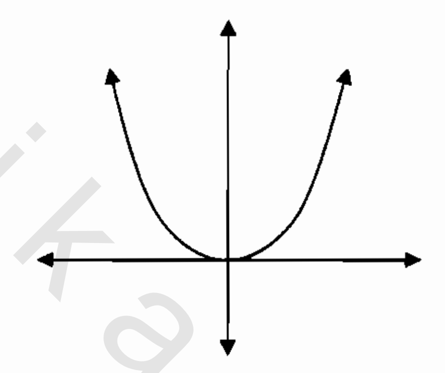
الدالـــة التكعيبيـــة مع المقيـاس

القاعدة د (س) = ك | س − ء |^{٣} + هـ

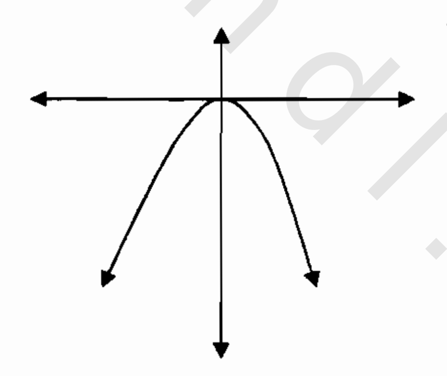
فى هذه الحالة (ء ، هـ) تعتبر راسى للمنحنى

وتعطى شكل الدالة الربيعية تماماً

اى ك > ٠ يكون الشكل



ك < ٠ يكون الشكل



مثال

ك ارسم الدوال الآتية ثم اكتب المدى والأطراد ونوع الدالة من حيث كونها زوجية او فردية

١) د (س) = | س |^{٣}

٢) د (س) = − | س |^{٣}

٣) د (س) = | س^{٣} | + ٢

٤) د (س) = ا س – ١ ا ^{٣} +٢

٥) د (س) = $\frac{\text{س}^{٤} - ٣\ \text{س}}{|\text{س}|}$

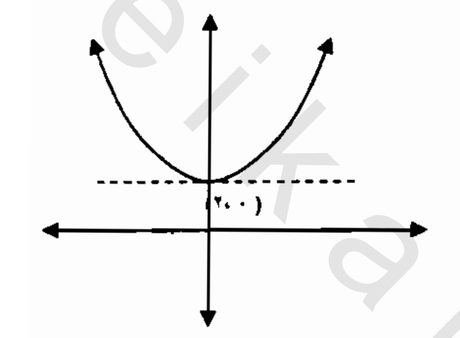
الحل

د (س) = ا س^{٣} ا + ٢

الرأس (٠ ، ٢)   المدى ص د [٢ ، ∞ [

الأطراد   س > ٠ متزايدة

س < ٠متناقصة



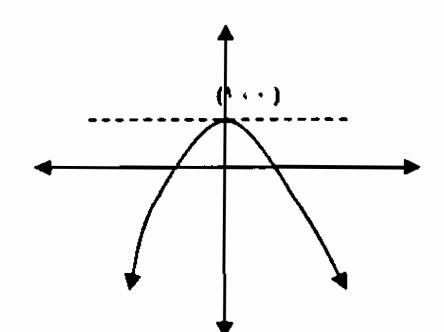
د (س) = - ا س ا + ١

الرأس (٠ ، ١) هابط   المدى ص د] ص ، ١]   النوع رفض

الاطراد

س > ٠ متناقصه

س < ٠ متزايدة

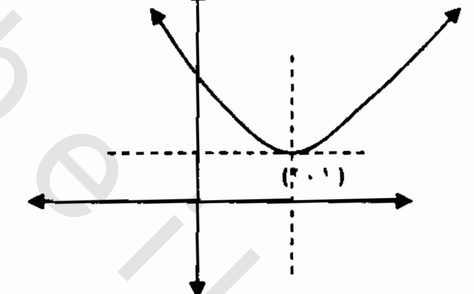


د (س) = | س - ١ |^{٢} + ٢

الرأس (١ ، ٢) ص ن   المدى ص و [٢ ، ∞ [النوع ليست زوجيه ولا فرديه

الاطراد س> ١ متزايد

س< ١ متناقص



د(س) = $\frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}}{|\text{س}|}$

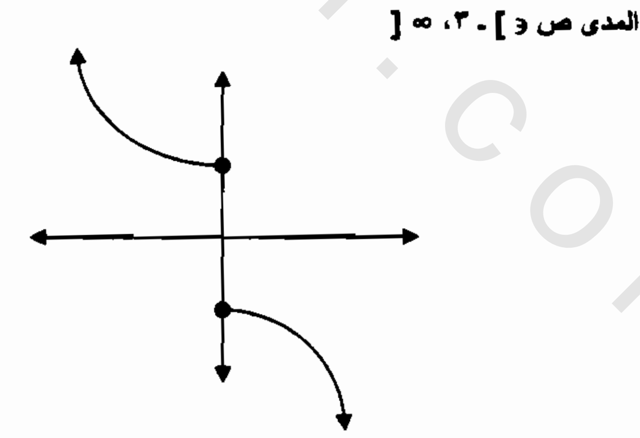
= { $\frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}}{\text{س}}$ س > ٠

  { $\frac{\text{س}^{٤} - ٣\text{س}}{-\text{س}}$ س< ٠

= { س^{٣} - ٣   س> ٠

  { - س + ٣   س< ٠

المدى ص و] - ٣، ∞ [



مثال

أرسم الدوال الآتيه وعين المجال والمدى وناقش الاطراد ونوع الداله.

١

د(س) =
- - س^{٣} عندما س ≤ ٠
- س^{٣} عندما س < ٠

٢-

- د(س) =
- س^{٢} + ٢ عندما س ≤ ٠
- - س^{٢} + ٢ عندما س < ٠

٣- د (س) = (س - ٢)^{٢} + ٣ ، س ≠ ٢

<u>**الحـــل**</u>

١

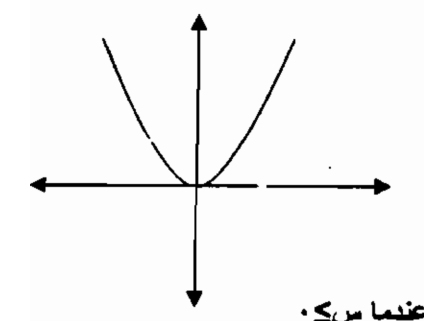
د(س) =
- - س^{٣} عندما س ≤ ٠
- س^{٣} عندما س < ٠

المجال = ح ، المدى =] - ∞ ، ٠]

الاطراد: متزايدة فى] -∞ ، ٠]

متناقصه فى [٠ ، ∞ [

النوع : زوجيه من التماثل حول محور الصادات



٢ -

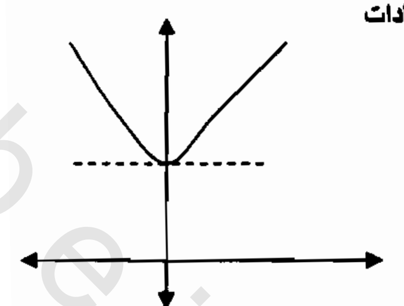
د(س) =
- س^{٢} + ٢ عندما س ≤ ٠
- - س^{٢} + ٢ عندما س < ٠

المدى =] ٢ ، ∞ [

الاطراد : متناقصه فى] -∞ ، ٠]

ومتزايدة فى [٠ ، ∞ [

النوع : زوجية من التماثل حول محور الصادات



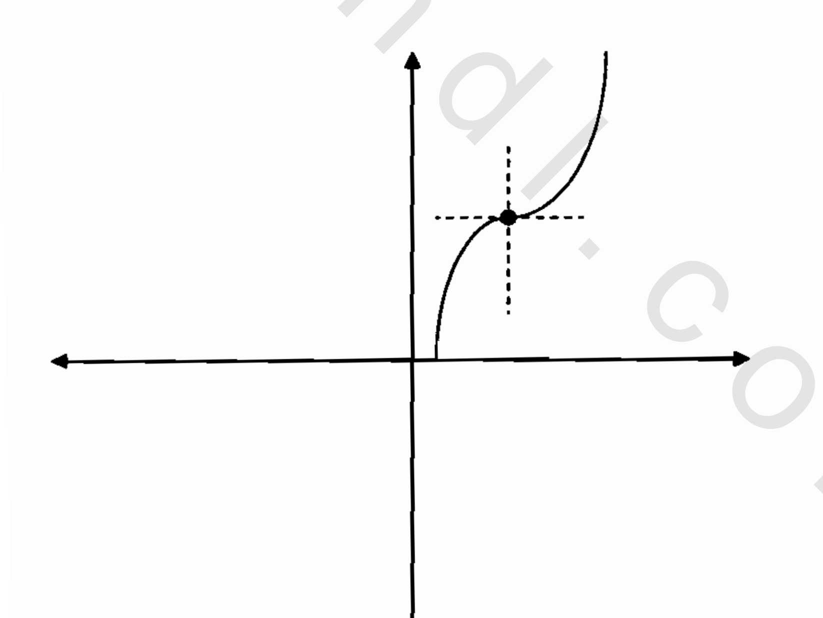
٣-د(س) = (س - ٢)^٣ + ٣ ، س ≠ ٢

نقطة التماثل (٢ ، ٣)

المجال = ح - { ٢ } ، المدى =ح - { ٣ }

الاطراد : متزايدة على مجالها

النوع : ليست زوجية وليست فردية



تمرين (١٧)

ارسم الدوال الآتيه واستنتج المدي وناقش الاطراد ونوع الداله

١) ص = (س + ٢)^{٣}

٢) ص = ٣ ـ (س + ١)^{٣}

٣) ص = ا س^{٣} ا

٤) ص = ٢ ـ س^{٢} ا س ا

٥) ص = ٢ ـ ا (س ـ ١)^{٣} ا

٦) ص = ٢ ـ (س ـ ١)^{٢}

ص = (س٤ ـ ٣س) / (ا س ا)

٨) د (س) =
- ٤ ـ س^{٢} عندما س < ٠
- ٤ ـ ٢ س عندما س ≤ ٠

٩) د (س) =
- س^{٢} ـ ١ عندما س ≥ ١
- (س ـ ١)^{٣} عندما س > ١

١٠) د (س) = ـ ا س^{٣} ا ـ ٤

الدالـــــة الكســريـــــة

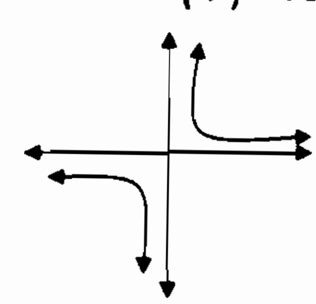
قاعدة الدالة:- د(س) = $\frac{ك}{س - ء}$ + هـ حيث ك ≠ صفر

وتسمى (د ، هـ) نقطة تماثل للمنحنى

الشكل البياني للدالة



ك > ٠ (+)



الخواص :

المجال س ∈ ح - { د }

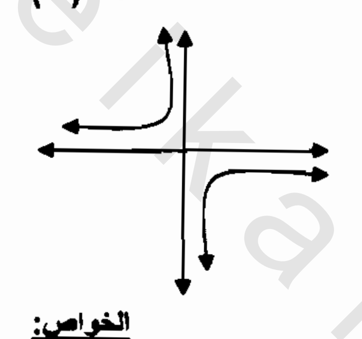
المدى ص ∈ ح - { هـ }

الاطراد متناقصة فى كل من

الفترتين] - ∞ ، ٠ [،

] ٠ ، ∞ [

ك < ٠ (-)



الخواص:

المجال س ∈ ح - { د }

المدى ص ∈ ح - { هـ }

الاطراد متزايدة فى كل من

الفترتين] - ∞ ، ٠ [

] ٠ ، ∞ [

النوع : فــردية فقــط عندما (د ، هـ) = (٠ ، ٠)

أشكال الدالة الكسرية

(النوع الأول)

١) **الحالة الأولى** :-

مثال:-

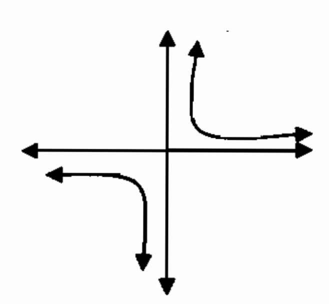
أرسم الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ ثم عين المجال والمدى والاطراد ونوع الدالة

∴ د(س) = $\frac{1}{س}$ ، ل = ١

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (٠ ، ٠) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٠ }

الدالة فردية ومتناقصة فى] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [



٢) **الحالة الثانية :-**

مثال :-

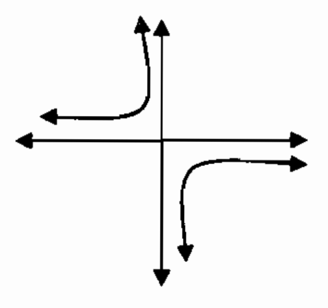
أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٢}{س}$

ل = -٢

∴ الدالة تقع فى الربع الثانى والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ٠) المجال= ح - { ٠ } ، المدى = ح - { ٠ }

وهى دالة متزايدة فى] - ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [النوع : فردية



٣) الحالة الثالثة:-

مثال :-

أرسم الدالة د(س) = $\frac{٣}{س+١}$

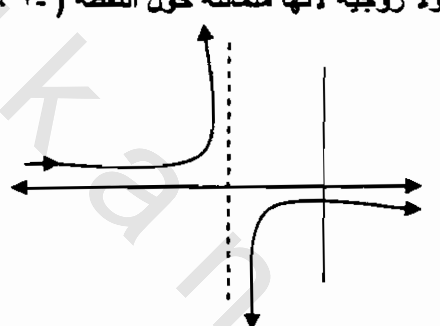
ك= ٣

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (-١ ، ٠) المجال = ح - {-١} المدى = ح - {-١}

الأطراد: متناقصة فى]- ∞ ، -١[،]-١ ، ∞[

النوع: ليست فردية ولا زوجية لأنها متماثلة حول النقطة (-١ ، ٠)



٤) الحالة الرابعة :-

مثال

أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٣}{س+١}$

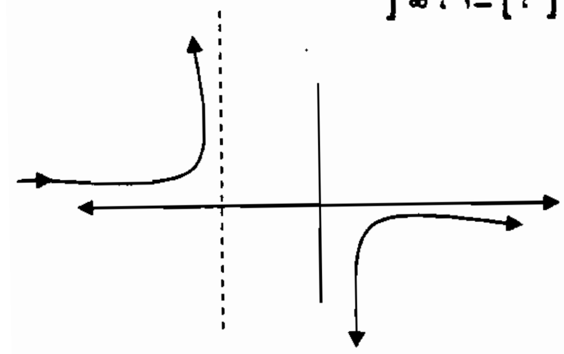
ك = -٣

∴ الدالة تقع فى الربع الثانى والرابع

نقطة التماثل (-١ ، ٠) المجال = ح - {-١} المدى = ح - {٠}

الأطراد : متزايدة فى]- ∞ ، -١[،]-١ ، ∞[

النوع: ليست فردية ولا زوجية



٥) الحالة الخامسة :

مثال

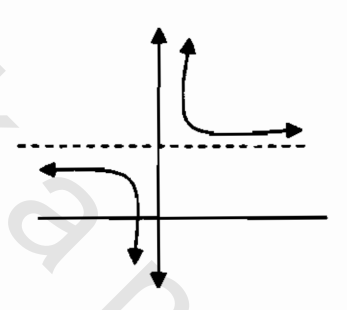
أرسم الدالة د(س) = $\frac{٢}{س}$ +٣

ك = ٢

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ٣) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ٣ }

الأطراد : تناقصية فى] - ∞ ، ٠[،] ٠ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية



٦) الحالة السادسة :-

مثال

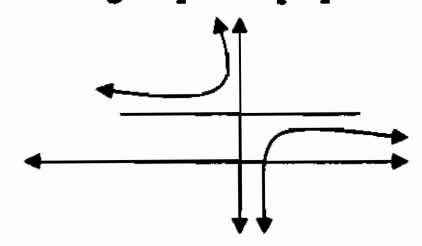
أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٢}{س}$ +١

ك = -٢

∴ الدالة تقع فى الرع الثانى والرابع

نقطة التماثل (٠ ، ١) المجال = ح - { ٠ } المدى = ح - { ١ }

الأطراد: متزايدة فى] - ∞ ، ٠[،] ٠ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية



٧) الحالة السابعة :-

مثال

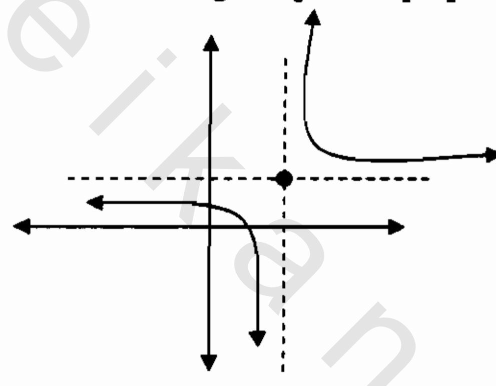
أرسم الدالة د(س) = $\frac{٣}{س-٢}$ +١

ك = ٣

∴ الدالة تقع فى الربع الأول والثالث

نقطة التماثل (٢ ، ١)   المجال = ح - { ٢ }   المدى = ح - { ١ }

الأطراد : تناقصية فى] - ∞ ، ٢[،] ٢ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية



٨) الحالة الثامنة :-

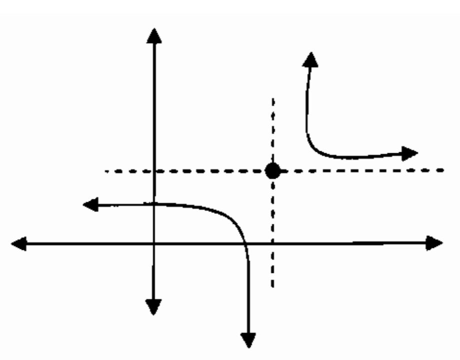
مثال

أرسم الدالة د (س) = $\frac{٣س+١}{س-١}$

∴ د (س) = $\frac{٤}{س-١}$ +٣

٣ س + ١	س - ١
٣ س – ٣	٣ ، هـ
٤	ك

الدالة تقع فى الربع الأول والثالث   نقطة التماثل (١ ، ٣)



ملاحظة :

لاحظ فى الحالة رقم (٨)

كل من البسط ، والمقام دالة خطية

(النوع الثانى)

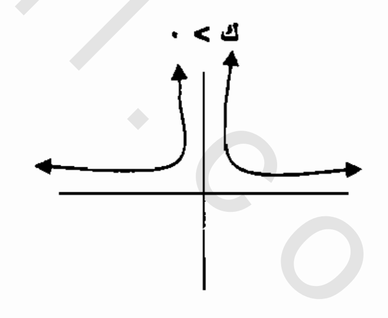
من أشكال الدالة الكسرية هو دالة مقياس مع دالة كسرية

القاعدة : $د(س) = \frac{ك}{|س - ء|} + هـ$

وتسمى (د ، هـ) نقطة البداية

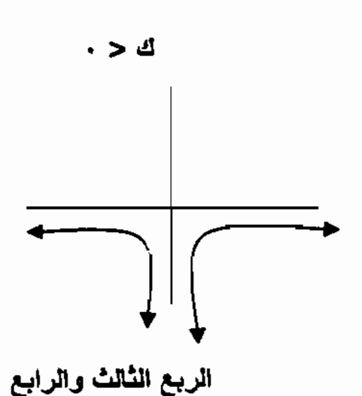
الشكل البيانى :-

ك > ٠



الربع الأول والثانى

ك < ٠



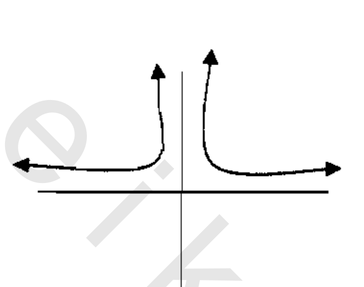
الربع الثالث والرابع

١) الحالة الأولى:-

مثال

أرسم الدالة د (س) = $\frac{١}{|س|}$

$$\therefore د(س) = \frac{١}{|س|} = \begin{cases} \frac{١}{س} & س > ٠ \\ \frac{١}{-س} & س < ٠ \end{cases}$$



نقطة البداية (٠ ، ٠)

الدالة تقع فى الربع الأول و الثانى   المجال س ∈ ح - { ٠ }

المدى ص ∈] ٠ ، ∞ [النوع : زوجية

الأطراف : س > ٠ متناقصة وعند س < ٠ متزايدة

ملاحظة

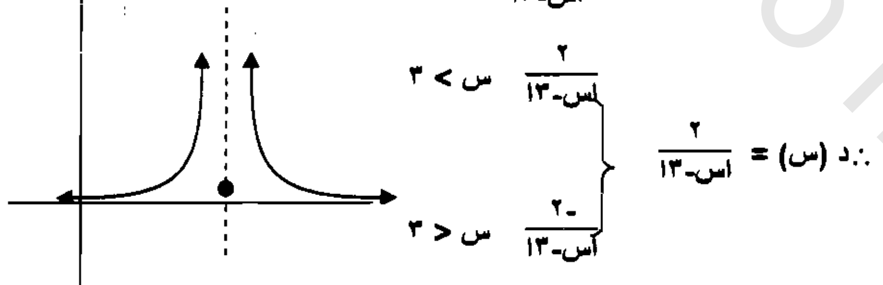
الدوال الآتية لها نفس الشكل البياني للدالة ص = $\frac{١}{|س|}$

د(س) = $\frac{|س|}{س^{٢}}$ ، د (س) = $\frac{س^{٢}}{|س|^{٣}}$ ، د (س) = $\frac{|س|^{٣}}{س^{٤}}$

٢) الحالة الثانية :-

مثال ارسم الدالة د(س) = $\frac{٢}{|س-٣|}$

$$\therefore د(س) = \frac{٢}{|س-٣|} = \begin{cases} \frac{٢}{س-٣} & س > ٣ \\ \frac{-٢}{س-٣} & س < ٣ \end{cases}$$



نقطة البداية (٣ ، ٠)

الدالة تقع فى الربع الأول و الثاني

المجال ح - { ٢ } المدى ص د] ٠ ، ∞ [

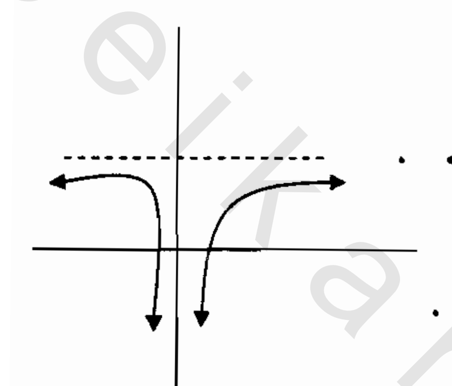
النوع : ليست زوجية ولا فردية

الاطراد : س > ٣ متناقصة وعند س < ٣ متزايدة

٣) **الحالة الثالثة :-**

مثال

أرسم الدالة د (س) = $\frac{-٣}{|س|}$ +٢



∴ د (س) = $\frac{-٣}{|س|}$ { $\frac{-٣}{|س|}$ + ٢ س > ٠ ، $\frac{-٣}{|س|}$ +٢ س < ٠

ك = -٣ (الثالث و الرابع)

نقطة البداية (٠ ، ٢)

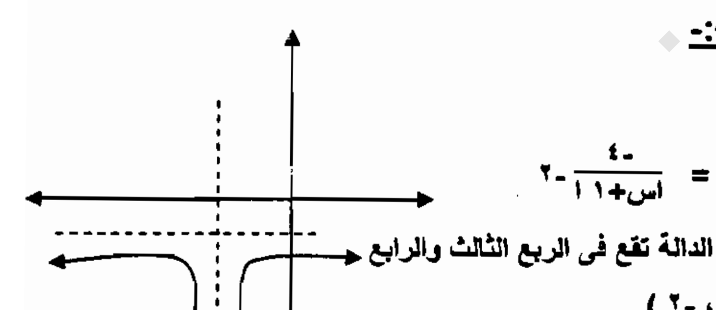
الدالة تقع فى الربع الثالث والرابع المدى ص د] - ∞ ، ٢ [

النوع : زوجية الأطراد : س > ٠ متزايدة وعند س < ٠ متناقصة

٤) **الحالة الرابعة:-**

مثال

أرسم الدالة د(س) = $\frac{-٤}{|س+١|}$ -٢



ك = -٤ الدالة تقع فى الربع الثالث والرابع

نقطة البداية (-١ ، -٢)

٥) الحالة الخامسة :-

مثال

أرسم الدالة $د(س) = \frac{(س-٢)^{٢}}{|س-٢س|^{٢}} + ١$

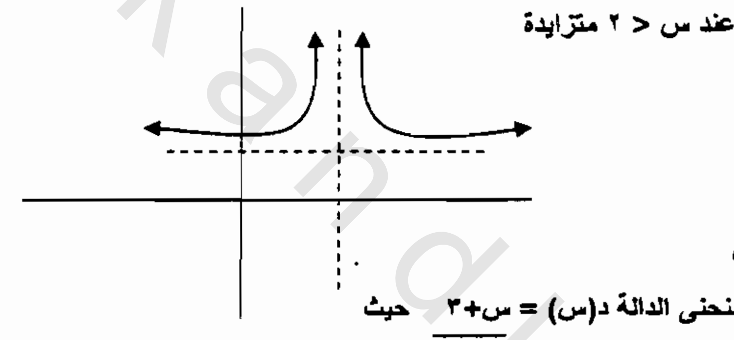
$د(س) = \frac{(س-٢)^{٢}}{|س-٢س|^{٢}} + ١ \quad = \frac{١}{|س-٢|} + ١$

ك = ١ نقطة البداية (٢ ، ١)

الدالة تقع فى الربع الأول والثانى المدى ص د] ١ ، ∞ [

الأطراد عند س > ٢ متناقصة

عند س < ٢ متزايدة



مثال

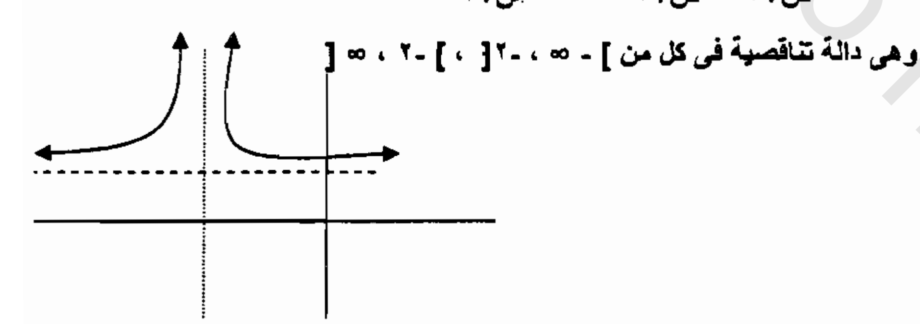
أرسم منحنى الدالة $د(س) = \frac{س+٣}{س+٢}$ حيث

س ≠ ٢ ثم عين مجال ومدى هذه الدالة وأبحث أطرادها

الحل

$د(س) = \frac{س+٢}{س+٢} + \frac{١}{س+٢} = ١ + \frac{١}{س+٢}$

وهى دالة تناقصية فى كل من] - ∞ ، -٢[،] -٢ ، ∞ [



تمرين (١٨)

أرسم الدوال الآتيه وأستنتج المدى والأطراد

١) $د(س) = \frac{٢س+٤}{س-٣}$

٢) $د(س) = \frac{٢س+١}{س-٣}$

٣) $د(س) = \frac{(س-١)^{٢}}{|(س-١)^{٣}|}$

٤) $د(س) = \frac{س+٤}{|س^{٢}-١٦|}$ $س \neq \pm ٤$

٥) $د(س) = \frac{١}{|س-٣|}$

٦) $د(س) = \frac{١}{|س+١|}$

٧) $د(س) = \frac{-١}{|س-٢|}$

٨) $د(س) = \frac{١}{|س-٣|} + ١$

٩) $د(س) = \frac{س^{٢}}{|س|^{٣}} + ١$

١٠) $د(س) = \frac{١٢}{|س|+٢}$

(٢) : الأسس واللوغاريتمات

- قوانين الاسس الصحيحة
- الأسس الكسرية
- الدالــــــة الاسية
- اللوغاريتمات والدالة اللوغاريتمية
- قوانين اللوغاريتمات
- استخدام حاسبة الجيب

الأســـس

النوع الأول من المسائل:-

قوانين الأسس الصحيحة

قوانين الأسس :-

١- إذا كان أ ∈ ح ، م، ن ∈ ص$^{+}$ ، أ ≠ صفر فان:-

$\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$ ويسمى قانون الضرب

∴ إذا ضربت كميات متساوية إلي أسس فلإيجاد حاصل الضرب نجمع الأسس

مثلا: $٢^{٣} \times ٢^{٣} = ٢^{٣+٣} = ٢^{٦}$

$$(١,٠٤)^{٢} \times (١,٠٤)^{\frac{١}{٣}} = (١,٠٤)^{٢+\frac{١}{٣}} = (١,٠٤)^{٢\frac{١}{٣}}$$

نتيجة

$$١^{\text{ن}} = ١$$

∴ الواحد الصحيح إذا رفع لأي أس يكون الناتج واحدا صحيحاً

مثلاً : $١^{٥} = ١\times١\times١\times١\times١ = ١$

٢- إذا كان أ ∈ ح ، م ، ن ∈ ص فإن :

$$\frac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م}-\text{ن}} \quad ، \text{أ} \neq \text{صفر}$$

∴ إذا قسمت كميات متساوية مرفوعة إلي أسس فالإيجاد حاصل خارج القسمة نطرح الأسس

مثلا $\frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٤}} = \text{س}^{٥-٤} = \text{س}$

نتيجة :-

$$\text{أ}^{٠} = ١$$

∴ (أي كمية)$^{\text{صفر}}$= ١ مثلا $(٣٤٠)^{٠} = ١$

نتيجة :-

$$\text{أ}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$$

∴ العدد المرفوع لأس سالب يمكن أن ينقل من البسط إلى المقام مع تغيير إشارة آسه (والعكس صحيح أيضا)

مثلا $٥^{-٢} = \frac{١}{٥^{٢}}$ ، $\frac{١}{ب^{-٨}} = ب^{٨}$ ، $\frac{١}{٣} = ٣^{-١}$

٣-إذا كان أ ، ب ∋ ح ، ن∋ ص فان :-

$$(أ\ ب)^{ن} = أ^{ن} \times ب^{ن}$$

$$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$$

وتسمى قوانين ضرب أو قسمة كميات متحدة الأس

مثلاً : $(٢ \times ٥)^{٣} = ٢^{٣} \times ٥^{٣}$ ، $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{٣} = \frac{٢^{٣}}{٥^{٣}}$

ملاحظة :-

- قاعدة توزيع الاسس على الحدود داخل القوس لا تستخدم الا في حالتي الضرب والقسمة .
- اما اذا كانت الحدود يفصلها علامة (+ أو-) فلا يوزع الأس على الحدود داخل القوس

مثلاً : $(٤+٣)^{٤} = ٧^{٤} = ٢٤٠١$

٤- اذا كان م، ن> صفر ،أ∋ح فإن :

$$(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$$

∴ لرفع أس أي مقدار إلى قوة أعلي نضرب الأسان في بعضهما

مثلاً : $(٢^{-٣})^{٤} = ٢^{-١٢} = \frac{١}{٢^{١٢}}$ ، $(٣^{٢})^{٤} = ٣^{٨}$ ،

$(-٣^{-٣})^{٢} = (-٣)^{-٣\times٢} = (-٣)^{-٦} = \frac{١}{-٣^{٦}} = \frac{١}{٣^{٦}}$

$$٥-\ \left(\frac{أ}{ب}\right)^{-ن} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن}$$

طريقة حل مسائل الأسس :-

١) تحليل الاساسات إلى عوامل أولية
٢) توزيع الأسس
٣) اختصار كل من لبسط والمقام كل على حدة
٤) اختصار البسط مع المقام

مثال :

اختصر $\dfrac{8^{\text{ن}-4} \times 6^{\text{ن}-7} \times 9^{\text{ن}-2}}{2^{2\text{ن}-15} \times 8^{\text{ن}+3}}$

الحـــــــل

١ـ تحليل الأساسات إلى عوامل أولية

$$\frac{(2^3)^{\text{ن}-4} \times (2 \times 3)^{\text{ن}-7} \times (3^2)^{\text{ن}-2}}{(2)^{2\text{ن}-10} \times (3)^{\text{ن}+3}}$$

٢ـ توزيع الأسس

$$\frac{2^{3\text{ن}-12} \times 2^{\text{ن}-7} \times 3^{\text{ن}-7} \times 3^{2\text{ن}-4}}{2^{2\text{ن}-10} \times 3^{\text{ن}+3}}$$

٣ـ اختصار كل من البسط والمقام على حدة

$$\frac{2^{2\text{ن}-5} \times 3^{\text{ن}-3}}{2^{2\text{ن}-10} \times 3^{\text{ن}+3}}$$

٤ـ اختصار البسط مع المقام

$$= 2^{2\text{ن}-5-2\text{ن}+10} \times 3^{\text{ن}+3-\text{ن}-3}$$

$$= 2^5 \times 3^0 = 32$$

مثال :

أثبت أن: $\dfrac{3^{\text{س}} \times (3^4)^{\text{س}+1}}{(143)^{\text{س}}} = 81$

الحـــــــل

الطرف الأيمن: $= \dfrac{3^{\text{س}} \times (3^4)^{\text{س}+1}}{(3^5)^{\text{س}}} = \dfrac{3^{\text{س}} \times 3^{4\text{س}+4}}{3^{5\text{س}}}$

$$= 3^{5\text{س}+4-5\text{س}} = 3^4$$

$= 81$ الطرف الأيسر

مثال :

اختصر: $\dfrac{125^{\text{س}-4} \times 15^{\text{س}-6} \times 9^{\text{س}-1}}{25^{\text{س}-2} \times 3^{\text{س}+2}}$

الحـــــــل

$$\frac{(5^3)^{\text{س}-4} \times (3 \times 5)^{\text{س}-6} \times (3^2)^{\text{س}-1}}{(5^2)^{\text{س}-2} \times 3^{\text{س}+2}}$$

$$\frac{٥^{٣س-١٢} \times ٣^{٦-س} \times ٥^{٦-س} \times ٣^{٢س-٢}}{٥^{٢س-٦} \times ٣^{س+٣}}$$

$$= ٥^{٣س-١٢} \times ٥^{٦-س} \times ٥^{-(٢س-٦)} \times ٣^{٦-س}$$
$$\times\ ٣^{٢س-س} \times ٣^{-(س+٣)}$$

$$= ٥^{٣س-١٢+٦-س-٢س+٦} \times ٣^{٦-س+٢س-٢س-س-٣}$$

$$= ٥^{صفر} \times ٣ = ١ \times ٣ = ٣$$

مثال :

اختصر: $\dfrac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٦^{م} \times ٣^{٢ن-م}}{٦^{ن} \times ١٠^{م+٢} \times ١٥^{ن}}$

الحــــــل

$$= \frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times (٢\times٣)^{م} \times ٢^{٢ن-م}}{(٢\times٣)^{ن} \times (٢\times٥)^{م+٢} \times (٣\times٥)^{ن}}$$

$$= \frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٢^{م} \times ٣^{م} \times ٣^{٢ن-م}}{٢^{ن} \times ٣^{ن} \times ٢^{م+٢} \times ٥^{م+٢} \times ٣^{ن} \times ٥^{ن}}$$

$$= ٢^{ن+١} \times ٢^{م} \times ٢^{-(م+٢)} \times ٢^{-ن} \times ٥^{ن+م} \times ٥^{-(م+٢)} \times ٥^{-ن} \times ٣^{م} \times ٣^{٢ن-م} \times ٣^{-ن} \times ٣^{-ن}$$

$$= ٢^{ن+١+م-م-٢-ن} \times ٥^{ن+م-م-٢-ن} \times ٣^{م+٢ن-م-ن-ن}$$

$$= ٢^{-١} \times ٥^{-٢} \times ٣^{٠} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥^{٢}} \times ١ = \frac{١}{٢\times٢٥} = \frac{١}{٥٠}$$

تمرين (١٩)

اختصر:-

١- $\dfrac{٨^{ن-٤} \times ٦^{٧-ن} \times ٩^{ن-٢}}{٢^{٢ن-١٠٠} \times ٣^{ن+٣}}$

٢- $\dfrac{٨^{٣ن} \times ٢٨^{٣-٥س}}{١٤^{١-س} \times ٤٩^{١-٢س}}$

٣- $\dfrac{(٥)^{٣ن} \times (٣)^{٤ن+٢}}{(٥\times٩)^{٣ن} \times \left(\frac{١}{٩}\right)^{ن}}$

٤- $$\frac{(٢٧)^{\frac{س}{٣}} \times (٤٨)^{س+٣}}{(٢١٦)^{س-١} \times (١٢)^{٢-س} \times (٧٢)^{س+٣}}$$

٥- $$\frac{٢^{ن+١} \times ٥^{ن+م} \times ٦^{م} \times ٣^{٢ن-م}}{٦^{ن} \times ١٠^{م+٢} \times ١٥^{ن}}$$

٦- $$\frac{١٢٥^{س-١} \times ١٥^{٦-س} \times ٩^{س-١}}{٢٥^{س-٣} \times ٣^{س+٣}}$$

٧- $$\frac{٣^{س} \times (٢٤٣)^{س+٢}}{(٧٢٩)^{س}}$$

٨- $$\frac{(٢م^{٢}ن^{٤})^{٤} \times (٥أب^{-٧})^{-٢}}{(٤أ^{-٣}ب)^{-٢}}$$

٩- $$\frac{٢^{١-٢ن} \times ٤٣٢^{ن} \times ٣^{-ن}}{٣^{ن-٤} \times ١٢^{ن-١}}$$

١٠- $$\frac{(ب^{\frac{١}{٢}})^{٣} \times (أ^{\frac{١}{٢}})^{٤ن} \times ج^{٢ن-١} \times \sqrt{ج^{ن}}}{ب^{ن} \times ج^{ن} \cdot \frac{٣}{٢} \times \sqrt{ب^{٣}}}$$

النوع الثاني من المسائل :

المعادلات الآسية البسيطة

المعادلة الأسية هي معادلة لا تحتوي علي علامة (+) أو (-) بين الأساس .

قواعد حل المعادلات الآسية :

(١) إذا كانت $أ^{م} = أ^{ن}$ فان م = ن

أي إذا كان الأساس = الأساس فان الأس= الأس

(٢) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ فان أ = ب

أي إذا تساوى الأسان يتساوى الأساسان

(٣) إذا كان $أ^{م} = ١$ فان م = صفر

(٤) إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ ، $أ \neq ب$ فان م = صفر

ملاحظة

للتخلص من علامة الجذر نقسم الأس علي الدليل

مثلاً $\sqrt[٣]{س^{٢}} \leftarrow س^{\frac{٢}{٣}}$ $\qquad \sqrt[٤]{س^{٢}} \leftarrow س^{\frac{٢}{٤}}$

مثال :أوجد قيمة س العددية :

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \frac{٨١}{٦٢٥}$$

الحل

الطرف الأيسر $= \frac{٨١}{٦٢٥} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٤}} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}$

$\because \left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}$ $\qquad \therefore س = ٤$

مثال : اوجد قيمة س العددية:-

$$\frac{(٨١)^{س-١} \times ٢٧^{س-٢}}{٩^{٣س-٧}} = ٧٢٩$$

الحل

المقدار $= \frac{(٣^{٤})^{س-١} \times (٣^{٣})^{س-٢}}{(٣^{٢})^{٣س-٧}} = \frac{٣^{٤س-٤} \times ٣^{٣س-٦}}{٣^{٦س-١٤}}$

$$= \frac{٣^{٤س - ٤ + ٣س - ٦}}{٣^{٦س - ١٤}} = ٣^{٧س - ١٠ - ٦س + ١٤}$$

$\therefore ٣^{س+٤} = ٣^{٦}$ $\qquad \therefore س + ٤ = ٦$ $\qquad \therefore س = ٢$

<u>مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة</u>

$س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = \text{صفر}$

الحـــــل

$\therefore س^{\frac{٤}{٣}} - ١٠ س^{\frac{٢}{٣}} + ٩ = \text{صفر}$

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩) = ٠$

$\therefore (س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$ $\qquad \therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ $\qquad \therefore س = ١$

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠$ $\qquad \therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ $\qquad \therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$

$\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$ بضرب أس الطرفين في $\frac{٣}{٢}$

$\therefore س = ٣^{٣}$ $\qquad \therefore س = ٢٧$

<u>مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة .</u>

$س^{\frac{١}{٣}} + ١٢ س^{-\frac{١}{٣}} - ٧ = ٠$

الحـــــل

$س^{\frac{١}{٣}} + ١٢ س^{-\frac{١}{٣}} - ٧ = ٠$

بضرب الطرفين في $س^{\frac{١}{٣}}$ $\qquad \therefore س^{\frac{٢}{٣}} + ١٢ = ٠$

$(س^{\frac{١}{٣}} - ٣)(س^{\frac{١}{٣}} - ٤) = ٠$ $\qquad \therefore س^{\frac{١}{٣}} = ٣ \longrightarrow س = ٢٧$

أو $س^{\frac{١}{٣}} = ٤$ $\qquad \therefore س = ٢^{٦} \longrightarrow س = ٦٤$

<u>مثال : أوجد مجموعة حل المعادلة</u>

$٧^{س - ٦} = س^{س - ٦}$

الحـــــل

$\therefore ٧^{س - ٦} = س^{س - ٦}$ $\qquad \therefore$ الأس = الأس

$\therefore$ إما $س = ٧$

أو $س - ٦ = ٠$ ومنها $س = ٦$

∴ مجموعة الحل { ٦ ، ٧ }

مثال : حل المعادلة

$٣^{س - ١} = ٩ \sqrt{٣}$

الحـــل

$٣^{س-١} = ٣^{٢} \times ٣^{\frac{١}{٢}} = ٣^{٢\frac{١}{٢}}$

∴ الأساس = الأساس

∴ س - ١ = $٢\frac{١}{٢}$ ∴ س = $٣\frac{١}{٢}$

مثال : حل المعادلة:

$٨^{٥ - س} = ٧^{س - ٥}$

الحـــل

∴ $٨^{٥ - س}$ ⟵ $(\frac{١}{٨})^{س - ٥}$

∴ $(\frac{١}{٨})^{س - ٥} = ٧^{س - ٥}$ ∴ س − ٥ = ⟵ س = ٥

∴ م . ج = { ٥ }

مثال : حل المعادلة:

$٣^{|٣س - ٤|} = ٩^{٢س - ٢}$

الحـــل

∴ الأساس = الأساس لأن $٩^{٢س - ٢} = ٣^{٢(٢س - ٢)}$

∴ | ٣س - ٤ | = ٤س − ٤

∴ | ٣س − ٤ | − ٤س + ٤ = صفر

∴ ٣س - ٤ - ٤ + ٤ = ٠ عندما س ≥ $\frac{٤}{٣}$ = - س

- ٣س + ٤ − ٤ س + ٤ عندما س < $\frac{٤}{٣}$ = - ٧ س + ٨

∴ − س = صفر ⟵ س = صفر (مرفوض)

، -٧ س + ٨ = ٠ ⟵ س = $\frac{٨}{٧}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{٨}{٧}$ }

مثال : حل المعادلة:

$$\frac{٦^{٢س} \times ٢٧^{س}}{٤^{س} \times ٨١^{س}} = \frac{١٠^{٣س} \times ٢٥^{س}}{٨^{س} \times ٦٢٥^{س}}$$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= \frac{(٢)^{٢س} \times (٣)^{٢س} \times (٣)^{٣س}}{(٢)^{٢س} \times (٣)^{٤س}} = \frac{(٢)^{٢س} \times (٣)^{٥س}}{(٢)^{٢س} \times (٣)^{٤س}}$

$= ٣^{٥س - ٤س} = ٣^{س}$ ← (١)

الطرف الأيسر $= \frac{(٢)^{٣س} \times (٥)^{٣س} \times (٥)^{٢س}}{(٢)^{٣س} \times (٥)^{٤س}} = \frac{(٢)^{٣س} \times (٥)^{٥س}}{(٢)^{٣س} \times (٥)^{٤س}}$

$= ٥^{٥س} - ٥^{٤س} = ٥^{س}$ ← (٢)

∴ الأس = الأس ، ∴ $٥ \neq ٣$

∴ مجموعة الحل هي { صفر }

تمرين (٢٠)

حل المعادلات الآتية :-

١) $٤^{س^٢ - ١} = ٨^{س}$

٢) $٣^{س^٢} = ٩^{س + ٤}$

٣) $س^{٢س - ٥} = ٣^{٢س - ٥}$

٤) $٤^{س - ٥} = ٩^{س - ٥}$

٥) $(س^٢ + ٢س)^٥ = ٢٤٣$

٦) $س^{س^٢ - ٢٥} = ١$

٧) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{س} = \left(\frac{١٢٥}{٢٧}\right)^{-١}$

٨) $٦^{س - ٤} = \frac{١}{٢١٦}$

٩) $١٠^{ص - ع} = ٨ \times ٥^{ص - ع}$

١٠) $٢^{٣س - ١} = \frac{١٦}{\sqrt{٢٧}}$

النوع الثالث من المسائل :

الأسس الكسرية

** إذا كانت ن ∋ ص+ ، أ ∋ ح+ فإن

(أ) $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ و تقرأ ((الجزر النوني للعدد أ))

(ب) $\sqrt[ن]{أ}$ تسمى الصورة الجذرية للعدد

فمثلا : $(٩)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٩} = ٣$ ، $(\frac{١}{٨١})^{\frac{١}{٤}} = \sqrt[٤]{\frac{١}{٨١}} = \frac{١}{٣}$

(ج) $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م}$ بمعنى مقام الأس (دليل الجذر)

مثلاً $٣^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٣^{٢}} = \sqrt[٣]{٩}$

(د) $\sqrt[ن]{أ^{م}} = \sqrt[نك]{أ^{مك}}$

مثلاً $\sqrt[٣]{أ^{٥}} = \sqrt[٤×٣]{٥^{٢×٤}} = \sqrt[١٢]{٥^{٨}}$

وتستخدم هذه القاعدة عند توحيد أدلة الجذور حتى يمكن استخدامها عند مقارنتها أو إجراء العمليات الحسابية بينهما.

ملاحظة

جميع قوانين الأسس الصحيحة تصلح كقوانين للأسس الكسرية

<u>مثال : اختصر لأبسط صورة:</u>

(أ) $٨^{\frac{١}{٣}} × (١٦)^{-\frac{١}{٣}}$ (ب) $\sqrt[٥]{(٢٤٣)^{-١}}$

(ج) $\sqrt[٤]{\frac{٨١}{٦٢٥}}$ (د) $\sqrt[٤]{أ} × \sqrt[٧]{أ^{٣}} × \sqrt[١٠]{أ^{٧}}$

الحـــــل

(أ) $٨^{\frac{١}{٣}} × (١٦)^{-\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{٨} × \frac{١}{(١٦)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{\sqrt[٣]{٨}}{\sqrt[٣]{١٦}} = \sqrt[٣]{\frac{٨}{١٦}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}}$

(ب) $\sqrt[٥]{(٢٤٣)^{-١}} = \sqrt[٥]{\frac{١}{٢٤٣}} = \sqrt[٥]{\frac{١}{٣^{٥}}} = \frac{١}{٣}$

(ج) $\sqrt[٤]{\frac{٨١}{٦٢٥}} = \sqrt[٤]{\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤}} = \frac{٣}{٥}$

(د) $\sqrt[٤]{أ} \times \sqrt[٧]{أ^{٣}} \times \sqrt[١٠]{أ^{٧}} = (أ)^{\frac{١}{٤}} \times (أ)^{\frac{٣}{٧}} \times (أ)^{\frac{٧}{١٠}} = أ^{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٧} + \frac{٧}{١٠}}$

$= أ^{\frac{٧٠ + ١٢٠ + ١٩٦}{٢٨٠}} = أ^{\frac{٣٢٣}{٢٨٠}}$

<u>مثال : أوجد قيمة كل مما يأتي :-</u>

١) $\sqrt{٣} \times \sqrt[٥]{٢}$

٢) $\sqrt[٣]{٦} \div \sqrt{٣}$

٣) $(٢٥٦)^{\frac{٣}{٤}}$

٤) $\sqrt[٣]{(٣٤٣)^{-١}}$

٥) $\frac{\sqrt{٤}}{\sqrt[٣]{٢}}$

٦) $(٠,٠٦٢٥)^{\frac{١}{٤}}$

الحـــــل

١) نوجد الأدلة حتى نتمكن من عملية الضرب

$\therefore \sqrt[١٠]{٣^{٥}} \times \sqrt[١٠]{٢^{٢}} = \sqrt[١٠]{٣^{٥} \times ٢^{٢}} = \sqrt[١٠]{٢٤٣ \times ٤} = \sqrt[١٠]{٩٧٢}$

٢) $\sqrt[٣]{٦} \div \sqrt{٣} = \sqrt[٦]{٦^{٢}} \div \sqrt[٦]{٣^{٣}} = \sqrt[٦]{\left(\frac{٣٦}{٢٧}\right)} = \sqrt[٦]{\frac{٤}{٣}}$

٣) $(٢٥٦)^{\frac{٣}{٤}} = (٢^{٨})^{\frac{٣}{٤}} = ٢^{٨ \times \frac{٣}{٤}} = ٢^{٦} = ٦٤$

٤) $\sqrt[٣]{(٣٤٣)^{-١}} = (٣٤٣)^{-\frac{١}{٣}} = (٥^{٣})^{-\frac{١}{٣}}$

٥) $\frac{\sqrt{٤}}{\sqrt[٣]{٢}} = \frac{\sqrt[٦]{٤^{٣}}}{\sqrt[٦]{٢^{٢}}} = \frac{\sqrt[٦]{٦٤}}{\sqrt[٦]{٤}} = \sqrt[٦]{\frac{٦٤}{٤}} = \sqrt[٦]{١٦} = \sqrt[٦]{٤^{٢}} = (٤)^{\frac{٢}{٦}} = ٤^{\frac{١}{٣}}$

٦) $(٠,٠٦٢٥)^{\frac{١}{٤}} = \left(\frac{٦٢٥}{١٠٠٠٠}\right)^{\frac{١}{٤}} = \left(\frac{٥^{٤}}{١٠^{٤}}\right)^{\frac{١}{٤}} = \left(\frac{٥}{١٠}\right)^{-١} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

<u>مثال : أيهما أكبر :</u>

(أ) $\sqrt{٥}$ أو $\sqrt[٣]{٧}$

(ب) $\sqrt[٤]{٣}$ أو $\sqrt[٥]{٤}$

الحـــــل

- لابد من توحيد دليلي الجذرين

(أ) $\sqrt{٥} = \sqrt[٣ \times ٢]{٥^{٣}} = \sqrt[٦]{١٢٥}$ ، $\sqrt[٣]{٧}$ $\sqrt[٣ \times ٢]{٧^{٢}}$ $\sqrt[٦]{٤٩}$

$\therefore \sqrt[٦]{١٢٥} > \sqrt[٦]{٤٩}$

$\therefore \sqrt{٥} > \sqrt[٣]{٧}$

(ب) $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4\times5]{3^5} = \sqrt[20]{243}$ $\sqrt[5]{4}$ $\sqrt[5\times4]{4}$ $\sqrt[20]{256}$

$\therefore \sqrt[20]{256} > \sqrt[20]{243}$ $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$

<u>مثال : اختصر لأبسط صورة :</u>

$$\frac{(18)^{-\frac{1}{2}} \times (24)^{-\frac{3}{2}}}{(27)^{-\frac{1}{2}} \times (16)^{-\frac{5}{2}}}$$

الحـــــل

$$= \frac{(2\times3^2)^{-\frac{1}{2}} \times (3\times2^3)^{-\frac{3}{2}}}{(3^3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^4)^{-\frac{5}{2}}} = \frac{(2)^{-\frac{1}{2}} \times (3)^{-1} \times 3^{-\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{9}{2}}}{(3)^{-\frac{3}{2}} \times (2)^{-4\times\frac{5}{2}}}$$

$$= (2)^{-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+10} \times (3)^{-1-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 2^5 \times 3^{-1} = \frac{32}{3}$$

<u>مثال : أوجد قيمة :</u>

أ- $(\text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}})(\text{س}^{\frac{1}{3}} + \text{س}^{\frac{2}{3}})$

ب- $(\text{س}^{\frac{1}{4}} - \text{ص}^{\frac{1}{4}})^2$ ج- $(\text{س}^{\frac{1}{5}} - 1)^2$

د- $(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 1)(\text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}} - 1)$

الحـــــل

أ- $(\text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}})(\text{س}^{\frac{1}{3}} + \text{س}^{\frac{2}{3}})$ (فرق بين مربعين)

$= (\text{س}^{\frac{4}{3}} - \text{س}^{\frac{2}{3}}) = \text{س}^{\frac{2}{3}}(\text{س}^{\frac{2}{3}} - 1) = \sqrt[3]{\text{س}^2}\,(\sqrt[3]{\text{س}^2} - 1)$

ب- $(\text{س}^{\frac{1}{4}} - \text{ص}^{\frac{1}{4}})^2 = \text{س}^{\frac{2}{4}} - 2\text{س}^{\frac{1}{4}}\text{ص}^{\frac{1}{4}} + \text{ص}^{\frac{2}{4}}$

$= \text{س}^{\frac{1}{2}} - 2\text{س}^{\frac{1}{4}}\text{ص}^{\frac{1}{4}} + \text{ص}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{س}} - 2\sqrt[4]{\text{س ص}} + \sqrt{\text{ص}}$

ج- $(\text{س}^{\frac{1}{5}} + 1)^2 = \text{س}^{\frac{2}{5}} + 2\text{س}^{\frac{1}{5}} + 1 = \sqrt[5]{\text{س}^2} + 2\sqrt[5]{\text{س}} + 1$

د- $(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 1)(\text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}} - 1) = \text{س}^{\frac{1}{3}}\,\text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}} \times \text{س}^{\frac{1}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}} - 1 \times \text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{س}^{\frac{1}{3}} + 1$

$= \text{س}^{\frac{3}{3}} - \text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{1}{3}} - \text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{س}^{\frac{1}{3}} + 1 = \text{س} - 2\text{س}^{\frac{2}{3}} + 1 = \text{س} - 2\sqrt[3]{\text{س}^2} + 1$

تمرين (٢١)

١ـ اختصر:ـ

أـ $(أ^{-\frac{٣}{٤}})^{٤}$ 　　　 ب ـ $(أ^{-٥})^{\frac{٤}{٥}}$

جـ ـ $(أ^{-٨})^{\frac{٣}{٨}}$ 　　　 د ـ $(٠,٠٠١)^{-\frac{٢}{٣}}$

٢ـ أوجد قيمة : $\dfrac{\sqrt{٥} \times \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٦]{٥}}{\sqrt[١٢]{(٥)^{٣}}}$

٣ـ اختصر: $\dfrac{(س^{\frac{١}{٤}})^{-٣} \times (س^{\frac{٤}{٣}})^{-٢} \times (س^{-\frac{٢}{٣}})^{٤}}{(س^{\frac{٣}{٢}})^{-٢}}$

٤ـ اختصر: $\dfrac{٢٧^{س-\frac{١}{٣}} \times \sqrt[س]{٧^{س^{٢}+٣س}}}{(١٨٩)^{س-١} \times \sqrt{(٤٩)^{٣}}}$

٥ـ أثبت أن: $\dfrac{(\sqrt{١٢٥})^{س-١} \times \sqrt{١٢٥}}{٥^{س} \times \sqrt{٥^{س}}} = ١$

٦ـ أثبت أن: $\dfrac{٩^{ن+\frac{١}{٤}} \times \sqrt{٣ \times ٣^{ن}}}{\sqrt{٣^{٣-ن}}} = ٢٧$

٧ـ إذا كانت س $\in$ ح+ وكان $\left(\dfrac{س - ٢}{س^{\frac{٢}{٣}} + \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٤^{\frac{١}{٣}}}\right)^{٣} = \sqrt{٢}$ **اوجد قيمة س**

٨ـ أوجد ناتج: $(٢أ^{\frac{١}{٢}} - ٣أ^{-\frac{١}{٢}})^{٢}$ ، $(٢أ^{\frac{٢}{٣}} - ب^{-\frac{١}{٢}})(٣أ^{\frac{٢}{٣}} + ٤ب^{-\frac{١}{٢}})$

٩ـ إذا كانت د (س) = ٥ ^{س} فأوجد قيمة :

$$\frac{د(س+٤) - د(س+٣)}{د(س+٥) - د(س+٤)}$$

١٠ـ إذا كانت د(س) = ٣ ^{س} أثبت أن

$$\frac{د(٢س+٢) + د(٢س-١)}{٥د(٢س) - ٧د(٢س-١)} = \frac{٧}{٢}$$

النوع الرابع من المسائل :

مسائل علي حل معادلات تشتمل الأسس الكسرية

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلة الآتية:-

أ) $٦^{س-٤} = \frac{١}{٢١٦}$ ب) $\sqrt[٣]{س^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$

ج) $٨\sqrt{٢} \times (٨)^{\frac{٥س+٧}{٢}} = \frac{١}{٢}$ د) $(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

الحــــل

أ) $٦^{س-٤} = \frac{١}{٢١٦}$ $\therefore ٦^{س-٤} = (٦)^{-٣}$ $\therefore س - ٤ = -٣$

$\therefore س = ١$

ب) $\sqrt[٣]{س^{٢}} = \frac{١}{٢٥}$ $\therefore س^{\frac{٢}{٣}} = ٥^{-٢}$ بضرب الأسين في $\frac{٣}{٢}$

$\therefore س = ٥^{-٢ \times \frac{٣}{٢}}$ $\therefore س = ٥^{-٣}$

$\therefore س = \frac{١}{١٢٥}$

ج) $٨\sqrt{٢} \times (٨)^{\frac{٥س+٧}{٢}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore (٢)^{٣}(٢)^{\frac{١}{٢}} \times (٢)^{٣ \times \frac{٥س+٣}{٢}} = ٢^{-١}$

$٢^{\frac{٧}{٢}} \times ٢^{٥س+٣} = ٢^{-١}$

$\therefore ٢^{\frac{١٣}{٢} + ٥س} = ٢^{-١} \longrightarrow \frac{١٣}{٢} + ٥س = -١$

$٥س = -\frac{١٥}{٢} \longrightarrow س = \frac{-٣}{٢}$

د) $\therefore (س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

$\therefore (س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٣^{٤})^{-\frac{١}{٤}} = (٣)^{-١}$

$\therefore [(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}}]^{٣} = [٣^{-١}]^{٣}$ بتكعيب الطرفين

$س - \frac{١}{٢} = ٣^{-٣}$ $\therefore س - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore س = \frac{٢٩}{٥٤}$

مثال : حل المعادلة

$ص^{\frac{٣}{٤}} = ٢س^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ **ثم أوجد قيمة ٥ س + ٢ص**

الحــــل

نوجد قيمة كل من س ، ص

$\therefore ص = ٦٤^{\frac{٣}{٤}}$ $\therefore ص = ٢^{٦}$ بدفع الطرفين للقوة $\frac{٤}{٣}$

$\therefore$ ص $= ٢^{٦ \times \frac{٤}{٣}} = ٢^{٨} = ٢٥٦$ ، $٢\text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ بالقسمة على ٢

$\therefore \text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢ \longleftarrow \text{س}^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$ بدفع الطرفين للقوة $\frac{٣}{٥}$

$\therefore$ س $= ٢^{٥ \times \frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$ $\therefore$ س $= ٨$ ، ص $= ٢٥٦$

$\therefore$ المقدار ٥ س + ٢ ص $= ٥ \times ٨ + ٢ \times ٢٥٦ = ٥٥٢$

<u>النوع الخامس من المسائل :</u>

<u>المعادلات الآسية المركبة</u>

المعادلات الآسية المركبة هي التي تحتوي على علامة (+) أو (-) وهي نوعان:

(١) <u>النوع الأول :</u> بإخراج العامل المشترك بأصغر أس

<u>مثال</u> : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١- $٤^{٢\text{س}-١} - ١٦^{\text{س}-١} = -٤$

الحل

$٢^{٤\text{س}-٢} - ٢^{٤\text{س}-٤} = -٤$

$٢^{٤\text{س}-٤}[٢^{٢} + ١] = -٤$ $\therefore ٢^{٤\text{س}-٤} \times ٥ = -٤$ بالقسمة على ٥

$\therefore ٢^{٤\text{س}-٤} = ٢^{٣}$ $\therefore ٤\text{س} - ٤ = ٣$

$\therefore ٤\text{س} = ٧$ $\therefore \text{س} = \frac{٧}{٤}$ $\therefore$ مجموعة الحل $\{\frac{٧}{٤}\}$

<u>مثال</u> : حل المعادلة

$٢^{٣\text{س}+١} + ٨^{\text{س}-\frac{١}{٣}} = ١٦٠$

الحل

$٢^{٣\text{س}+١} + (٢^{٣})^{\text{س}-\frac{١}{٣}} = ٢^{٣\text{س}+١} + ٢^{٣\text{س}-١} = ٢^{٣\text{س}}(٢^{١} + ٢^{-١})$

$= ٢^{٣\text{س}}(٢+\frac{١}{٢}) = ٢^{٣\text{س}} \times ٢\frac{١}{٢} = ٢^{٣\text{س}} \times \frac{٥}{٢} = ١٦٠$

$٢^{٣\text{س}} = ١٦٠ \times \frac{٢}{٥}$ $\therefore ٢^{٣\text{س}} = ٣٢ \times ٢ = ٦٤$

$٢^{٣\text{س}} = ٢^{٦}$ $\therefore ٣\text{س} = ٦$ $\therefore \text{س} = ٢$

<u>مثال</u> : حل المعادلة

$١١^{٤\text{س}+١} + ١١^{٤\text{س}} = ١٢$

الحل

$١١^{٤\text{س}}[١١^{١} + ١] = ١١^{٤\text{س}} \times ١٢ = ١٢$

$\therefore ١١^{٤\text{س}} = ١$ $\therefore ١١^{٤\text{س}} = ١١^{٠}$

$\therefore ٤\text{س} = ٠$ $\therefore \text{س} = ٠$

<u>مثال</u> : حل المعادلة

٤ س + ٢ ٢س + ٣ = ١٤٤

الحـــــل

$٢^{٢س} + ٢^{٢س+٣} = ٢^{٢س}(١ + ٢^{٣}) = ٢^{٢س}(١+٨)$

$٢^{٢س} \times ٩ = ١٤٤$ $\therefore ٢^{٢س} = \frac{١٤٤}{٩}$ $\therefore ٢^{٢س} = ١٦$

$٢^{٢س} = ٢^{٤}$ $\therefore ٢س = ٤$ $\therefore س = ٢$

مثال :

إذا كان $د(س) = ٧^{س}$ أثبت أن $٧^{ص} \times د(س - ص) = د(س)$

الحـــــل

الطرف الأيمن $= ٧^{ص} \times د(س - ص)$

$= ٧^{ص} \times ٧^{س-ص}$

$= ٧^{ص} \times ٧^{س} \times ٧^{-ص} = ٧^{س}$

$= د(س)$ ∴ الطرفان متساويان

مثال :

إذا كانت $د(س) = ٤^{س}$ فاوجد قيمة س التي تحقق $د(س+١) + (س-١) = ٦٨$

الحـــــل

$\therefore ٤^{س+١} + ٤^{س-١} = ٦٨$

$\therefore ٤^{س-١}(٤^{٢} + ١) = ٦٨$

$\therefore ٤^{س-١} \times ١٧ = ٦٨$ $(\div ١٧)$

$\therefore ٤^{س-١} = ٤^{١} = ٣^{٢}$

$\therefore س - ١ = ١$ $\therefore س = ١ + ١$ $\therefore س = ٣$

مثال :

إذا كانت $د(س) = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ فاوجد قيمة س إذا كانت $د(س+٢) - د(س-٢) = -٨٠$

الحـــــل

$د(س+٢) - د(س-٢) = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س+٢} - \left(\frac{١}{٣}\right)^{س-٢}$

$= \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}\left[\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٣}\right)^{-٢}\right] = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}\left[\frac{١}{٩} - ٩\right] = \left(\frac{١}{٩}\right)^{س}\left[\frac{١-٨١}{٩}\right]$

$\therefore \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} \times \frac{-٨٠}{٩} = -٨٠$

$\left(\frac{١}{٣}\right)^{س} = -٨٠ \times \frac{٩}{-٨٠}$ $\therefore \left(\frac{١}{٣}\right)^{س} = ٩$ $\therefore ٣^{-س} = ٣^{٢}$

$\therefore -س = ٢$ $\therefore س = -٢$

مثال :

إذا كانت $د: ح \to ح^{+}$ حيث $د(س) = أ^{س}$ اثبت أن $د(١) = \frac{د(س+١) + د(س+٢)}{د(س) + د(س+١)}$

الحـــــل

الطرف الأيمن = د(١) = أ ⟵ ①

الطرف اليسر = $\frac{د(س+١) + د(س+٢)}{د(س) + د(س+١)} = \frac{أ^{س+١} + أ^{س+٢}}{أ^{س} + أ^{س+١}} = \frac{أ^{س+١}(١+أ)}{أ^{س}(١+أ)}$

$= أ^{س+١-س} = أ$ ⟵ ②

من ① ، ② ∴ الطرفان متساويان

مثال :

إذا كانت د(س) = $٢^{س-١}$ فاوجد قيمة : $\frac{د(س+٢)}{د(س-٢)} - \frac{د(س-٢)}{د(س+٢)}$

الحـــــل

المقدار = $\frac{٢^{(س+٢)-١}}{٢^{س-٣}} - \frac{٢^{(س-٣)}}{٢^{س+١}} = ٢^{٤} - ٢^{-٤}$

$= ١٦ - \frac{١}{١٦} = \frac{٢٥٥}{١٦}$

٢) النوع الثاني : بالتحليل

مثال : **أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-**

$٧^{٢س} - ٥٠ \times ٧^{س} + ٤٩ = ٠$

الحـــــل

$(٧^{س} - ٤٩)(٧^{س} - ١) = ٠$

$٧^{س} = ٤٩$	$٧^{س} = ١$
$٧^{س} = ٧^{٢}$	$٧^{س} = ٧^{٠}$
∴ س = ٢	∴ س = صفر

∴ **مجموعة الحل = {٠ ، ٢}**

مثال : $٥^{٢س} - ٣٠ \times ٥^{س} + ٦٢٥ = ٠$

الحـــــل

المقدار عبارة عن مقدار ثلاثي

∴ $(٥^{س} - ١٢٥)(٥^{س} - ٥) = ٠$

$٥^{س} = ١٢٥$ ، $٥^{س} = ٥^{٣}$ ، ∴ $س = ٣$

$٥^{س} = ٥$ ، $٥^{س} = ٥^{١}$ ، ∴ $س = ١$

∴ **مجموعة الحل = { ١ ، ٣ }**

مثال : أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتية :-

$٢^{٤س-٣} - ٣ \times ٢^{٢س} + ١٦ = ٠$

الحـــــل

بضرب طرفي المعادلة × $٢^{٣}$

∴ $٢^{٤س-٣} \times ٢^{٣} - ٣ \times ٢^{٢س} \times ٢^{٣} + ١٦ \times ٢^{٣} = ٠$

$٢^{٤س-٣+٣} - ٣ \times ٢^{٢س} \times ٨ + ١٦ \times ٨ = ٠$

$٢^{٤س} - ٢٤ \times ٢^{٢س} + ١٢٨ = ٠$

∴ $(٢^{٢س} - ١٦)(٢^{٢س} - ٨) = ٠$

$٢^{٢س} = ١٦$ ، $٢^{٢س} = ٢^{٤}$ ، ∴ $٢س = ٤$ ، $س = ٢$

$٢^{٢س} = ٨$ ، $٥^{س} = ٢^{٣}$ ، ∴ $٢س = ٣$ ، ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

∴ **مجموعة الحل = { ٢ ، $\frac{٣}{٢}$ }**

مثال : إذا كان $٩^{س} + ٣^{س+١} = ١٠٨$ فأوجد قيمة س

الحـــــل

$٣^{٢س} + ٣^{س+١} = ١٠٨$ ∴ $٣^{٢س} + ٣^{س} \times ٣ - ١٠٨ = ٠$

$٣^{٢س} + ٣^{س} \times ٣ - ١٠٨ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ٩)(٣^{س} + ١٢) = ٠$

∴ $٣^{س} = ٩$ ⟵ $٣^{س} = ٣^{٢}$ ∴ $س = ٢$

، $٣^{س} = -١٢$ (مرفوض) ∴ **مجموعة الحل = { ٢ }**

مثال : $٢^{ص} + ٢^{٥-ص} = ١٢$

الحـــــل

$٢^{ص} + ٢^{٥} \times ٢^{-ص} - ١٢ = ٠$ ى بالضرب في $٢^{ص}$

$\therefore ٢^{٢\text{ص}} - ١٢ \times ٢^{\text{ص}} + ٣٢ = ٠$

$\therefore (٢^{\text{ص}} - ٤)(٢^{\text{ص}} - ٨) = ٠$

$٢^{\text{ص}} - ٤ = ٠$

$٢^{\text{ص}} = ٤$

$٢^{\text{ص}} = ٢^{٢}$

$\therefore \text{ص} = ٢$

$٢^{\text{ص}} - ٨ = ٠$

$٢^{\text{ص}} = ٢^{٣}$

$\therefore \text{ص} = ٣$

$\therefore$ **مجموعة الحل** $= \{٢ ، ٣\}$

تمرين (٢٢)

حل المعادلات الآتية (أوجد قيمة س)

١) $٣^{١+\text{س}} + ٣^{١-\text{س}} = ١٠$

٢) إذا كان $٩^{\text{س}} + ٣^{\text{س}} + ١ = ١٠٨$ فأوجد قيمة س

٣) $٢٥^{\text{س}} - ١٢٦ \times ٥^{\text{س}-١} + ٥ = ٠$

٤) $٢^{\text{ص}} + ٢^{٥-\text{ص}} = ١٢$

٥) $٢^{٣\text{س}+١} + ٨^{\text{س}-\frac{١}{٣}} = ١٦٠$

٦) $٧^{٣\text{س}-١} - ٧^{٣\text{س}} = -٢٠٥٨$

٧) $\dfrac{(٠,٦)^{٢\text{س}-١} \times ٥^{٢\text{س}}}{(\sqrt{٣})^{٢\text{س}-٢}} = ٤٥$

٨) $٣^{\text{س}^{٤}-١٦} = ٥^{\text{س}^{٤}-١٦}$

٩) $٣^{٢\text{س}} - ٣٠ \times ٣^{\text{س}} + ٨١ = ٠$

١٠) إذا كانت $\text{د}: \text{ح} \longrightarrow \text{ح}^{+}$ حيث $\text{د(س)} = ٢^{\text{س}+١}$

حل المعادلة $\text{د(س)} + \text{د(س}+١) + \text{د(س}+٢) = ٢٨$

١١) $١٢٥ \left(\sqrt{\frac{٣}{٥}}\right)^{\text{س}+١} = \sqrt{٣}$

١٢) $٣^{٢\text{س}} - ٧ \times ٣^{\text{س}} - ١٨ = ٠$

١٣) $٢^{٢\text{س}+٢} + ٤^{١-\text{س}} - ١٧ = ٠$

١٤) $٣^{\text{س}+٢} + ٣^{١-\text{س}} = ٢٨$

١٥) $(\text{س} - ٣)^{\frac{٣}{٤}} = ٨$

١٦) $٧^{١+\text{س}} + ٧^{١-\text{س}} = ٥٠$

١٧) $٢^{|\text{س}|} = ٤^{|٢\text{س}-٣|}$

١٨) $٢^{٢\text{س}} - ٢^{\text{س}} - ٢ = ٠$

١٩) $٢^{|\sqrt{\text{س}}-٣|} = ٤$

٢٠) $١٠ س^{٢ - ١} - ١١ س^{-\frac{١}{٢}} + ٦ =$ صفر

٢١) $س^{\frac{٢}{٣}} - ٢٨ س^{\frac{١}{٣}} + ٢٧ = ٠$

٢٢) $٤^{س} - ٥ \times ٢^{س+١} + ١٦ = ٠$

الدالـــة الأسيـــــة

تعريف الدالة : د (س) = أ ^{س} ، ص = أ ^{س}

حيث (الأس) أ ∋ ح ، (الأساس) أ∋ ح $^{+}$ - { ١ }

ملحوظة : في حالة أ = ١ تصبح دالة ثابتة

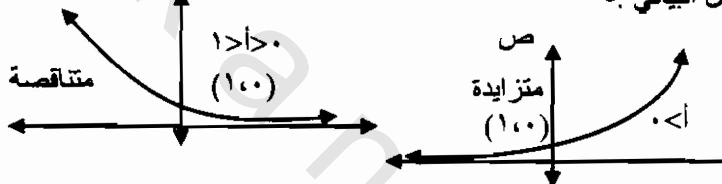
تسمي دالة آسية حيث د : ح ⟵ ح $^{+}$

المجال المجال المقابل

١- المجال = ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) =] - ∞ ، ∞ [

٢- المدى = ح $^{+}$ =] ٠ ، ∞ [

٣- الشكل البياني :-



أ- تمثيل بيانياً بمنحني يقع بأكمله فوق محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، ١) كذلك النقطة (١ ، أ) وتكون الدالة متزايدة إذا كان أ > ١ ، و متناقصة إذا كان ٠< أ < ١

ب- الدالة موجبة دائماً أي المدي = ح $^{+}$

ج- لها نفس قوانين الأســس .

أ- د (م) . د(ن) = د(م + ن)

ب- [د(م)]^{ن} = د(م ن)

ج- د(م) ÷ د (ن) = د(م – ن)

د – د(- م) = $\frac{١}{د(م)}$

***مثال :-** ارسم منحني الالة د(س) = ٢^{س} مستخذة س ∋ [- ٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد قيمة:-**

د (٢,٤) و (- $\frac{٣}{٢}$) جـ ($\sqrt{٢}$) ثم أوجد قيمة س عندما ٢^{س} = ٧

د(س) = ٢^{س} .. ص = ٢^{س}

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

إيجاد القيم التقريبية :-

* $د(٢,٤) = ٢^{٢,٤} \simeq ٥,٣$

* $د(-\frac{٣}{٢}) = د(-١,٥) = ٢^{-١,٥} \simeq ٠,٣$

* $د(\sqrt{٢}) = ٢^{\sqrt{٢}} = ٢^{١,٤} \simeq ٢,٦$

$\sqrt[٥]{٨} = \sqrt[٥]{٢^{٣}} = ٢^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٠,٦} \simeq ٠,٥$

مثال :-

ارسم الشكل البياني للدالة

$د(س) = (\frac{١}{٣})^{س}$ حيث س $\in$ [-٣ ، ٣]

من الرسم أوجد قيمة تقريبية لكل من $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ ، د(١,٢) ، د(-١,٢)

الحـــــل

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = (\frac{١}{٣})^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$ ، $د(\frac{١}{٢}) = (\frac{١}{٣})^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} = ٠,٦$ من الرسم

$\frac{\sqrt{٣}}{٩} = \frac{٣^{\frac{١}{٢}}}{٣^{٢}} = ٣^{-١,٥} = (\frac{١}{٣})^{١,٥}$

⟸ س = ١,٥ ⟸ د (١,٥) = $\left(\frac{١}{٣} \right)^{١,٥}$ = ٠,٢ من الرسم

د(١,٢) = $\left(\frac{١}{٣} \right)^{١,٢}$ ≃ ٠,٣ من الرسم

الحاسبة للتأكيد

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٠,٦ $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$ = ٠,٢ د(١,٢) = $\left(\frac{١}{٣} \right)^{١,٢}$ = ٠,٣

أكمل !!!

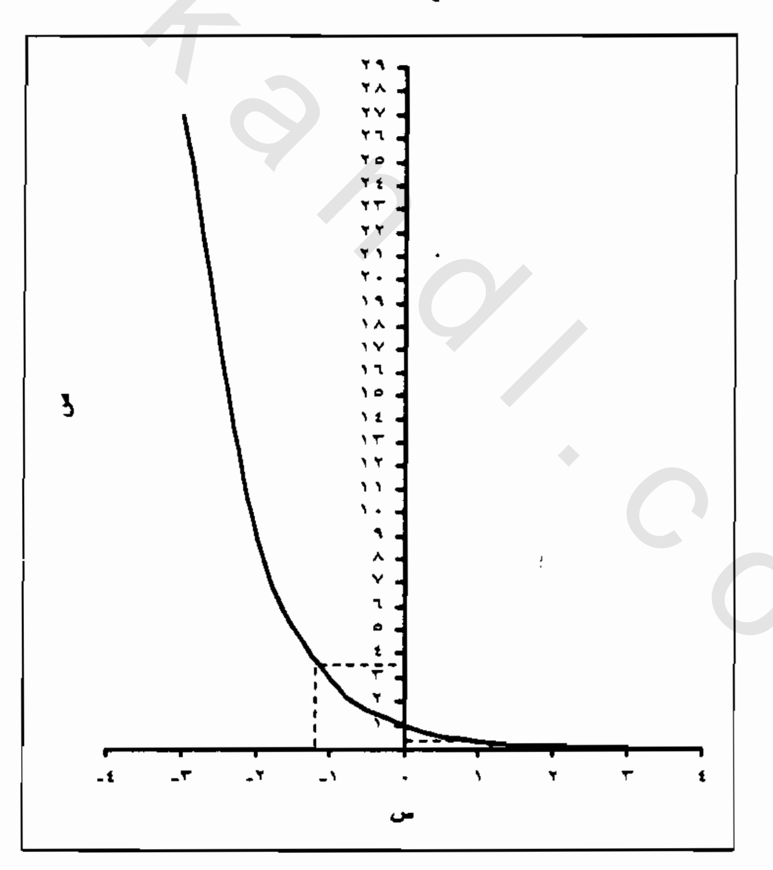
الصورة العامة للدالة الآسية هي:

د(س) = أ^{س} حيث أ ∋ ح$^{+}$ - { ١} مجالها ح

، مجالها المقابل ح$^{+}$ ، منحني الدالة يمر بالنقطة (٠، ١)

وتكون متزايدة علي مجالها إذا كان أ > ١

، ومتناقصة علي مجالها إذا كان ٠ < أ < ١



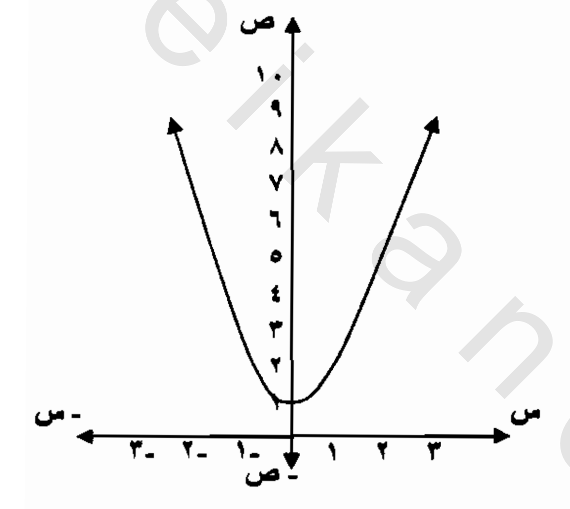
مثال :- ارسم الشكل البياني للدالة

$$د(س) = \begin{cases} ٢^{س} & \text{حيث س } \leq \\ ٢^{-س} & \text{حيث س } < ٠ \end{cases}$$

من الرسم استنتج المدى والاطراد وبين نوعها من حيث الزوجية أو الفردية

الحــــــل

	$٢^{س}$				$٢^{-س}$			
س	س	٠	١	٢	٣	س	٠	-١	-٢	-٣
ص	$٢^{س}$	١	٢	٤	٨	$٢^{-س}$	١	٢	٤	٨



المدي = [١ ، ∞ [

في]- ∞ ، - [تناقصية

في [٠ ، ∞ [تزايدية

الدالة زوجية

٢٧) $٢^{س} = س^{٢}$

الحــــــل

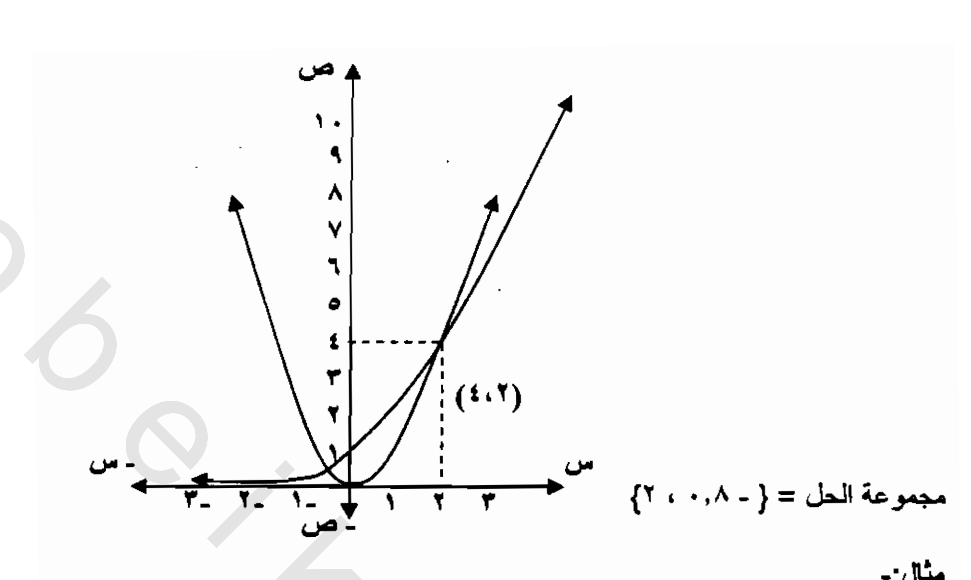
نفرض أن ص = $٢^{س}$ ⟸ ص= $س^{٢}$ ثم نكون جدولين وهما

$٢^{س}$

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
$٢^{س}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

$س^{٢}$

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



مجموعة الحل = { - ٠,٨ ، ٢}

مثال:-

إذا كانت د : ح ⟸ ح$^{+}$ حيث د (س) = ($\frac{١}{٣}$)^{س} ، س ∈ [-٣ ، ٣] فارسم المنحني لهذه الدالة ومن الرسم.

أولاً: د(- ٠,٥)

ثانياً: قيمة س عندما($\frac{١}{٣}$)^{س} = ١٠، أوجد قيمة س إذا كانت ($\frac{١}{٣}$)^{س} = ٨

، ص= ($\frac{١}{٣}$)^{س}

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١٠	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

أولاً : د(-٠,٥) ≃ ١,٧ عندما س = - ٠,٥

ثانياً : ($\frac{١}{٣}$)^{س} = ١٠ ∴ عندما ص = ١٠ ∴ س ≃ - ٢

($\frac{١}{٣}$)^{س} = ٨ ∴ عندما ص = ٨ ∴ س ≃ - ,٩

للتأكيد فقط : د(- ٠,٥) = ($\frac{١}{٣}$)$^{-٠,٥}$

$= (٣^{-١})^{-٠,٥} = ٣^{٠,٥}$

مثال:- إرسم

$٢ -$ س $=$ $٢^{-س}$

الحــــــل

نفرض أن ص $=$ ٢ $-$ س   ص $=$ $٢^{-س}$

ثم نكون جدولين وهما

ص $=$ $٢^{-س}$

س	س	- ٣	- ٢	- ١	٠	١	٢	٣
ص	$٢^{-س}$	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

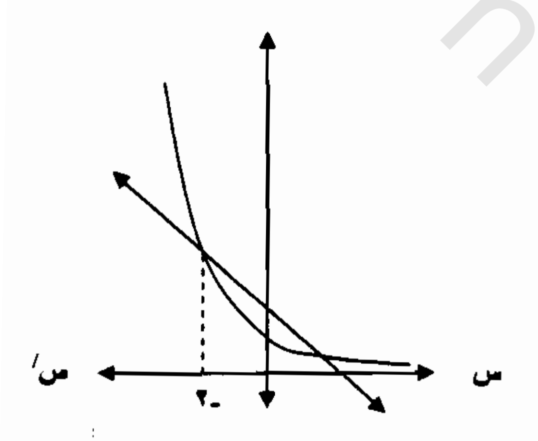
ص $=$ $٢^{-س}$

ص $=$ ٢ $-$ س

س	٠	١
ص	٢	١

ص $=$ ٢ - س

مجموعة الحل $= \{-٢ ، ١,٧\}$



تمرين رقم (٢٣)

(١) أرسم الشكل البياني للدالة ص= ٣+ ٢^س^ ومن الرسم عين مجال الدالة ومداها وأطرادها .

(٢) مثل بيانياً د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$ حيث س [- ٢ ، ٣] ومن الرسم

أوجد قيمة تقريبية لكل من: $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ ، د(١,٥) ، د (- ١,٥)

(٣) إذا كانت د : ح ⟵ ح^+^ ، د(س) = ٣ س أرسم منحني هذه الدالة متخذا س∋ [-٣،٣]

أوجد قيمة تقريبية من لكل من :-

أ) د (١,٥) ب) قيمة س عندما ٣^س^ = ٨

(٤) أرسم الكل البياني للدالة د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$: س ∋ [- ٣،٣] ومن الرسم

أوجد قيمة : د (- ٠,٤) قيمة س عندما $(\frac{١}{٣})^{س}$ = ٨

(٥) مثل بيانياً الدالة د: ح ⟵ ح^+^ حيث د(س) = ٣ ^س-٢^ متخذا س ∋ [٠ ، ٥] ومن الرسم

أوجد : أ) د (١,٨) ب) قيمة س عندما ٣ ^س-٢^

(٦) د(س) = $(\frac{٥}{٣})^{س}$ مثلها بيانياً في [- ٢ ، ٤] ومن الرسم

أوجد : أ) د (٢,٣) ب) قيمة س عندما $(\frac{٥}{٢})^{س}$ = ١٢

(اللوغاريتمـــــات)

نعلم أن ٣٢ = $٢^{٥}$

هذه المتساوية تحتوى على

(١) العدد ٣٢ (٢) الأساس ٢ (٣) الأس ٥

يمكن تحويل هذه المتساوية الى صورة

$\text{لو}_{٢}$ ٣٢ = ٥

وتقرأ لوغاريتم ٣٢ للأساس ٢ يساوى ٥

تعريف اللوغاريتم

هو الأس الذى يرفع اليه الأساس لكى يعطى العدد

أمثلة

$\text{لو}_{٢}$ ١٦ ، $\text{لو}_{٥}$ ١٢٥ ، $\text{لو}_{٢} \frac{١}{٦٤}$ ، $\text{لو}_{٦}$ ٦ ، $\text{لو}_{٥}$ ١

الحل

$\text{لو}_{٢}$ ١٦ = ٤ & $\text{لو}_{٥}$ ١٢٥ = ٣

$\text{لو}_{٢} \frac{١}{٦٤}$ = -٦ & $\text{لو}_{٦}$ ٦ = ١ & $\text{لو}_{٥}$ ١ = صفر

مثال

١) **أحسب قيمه ما يلى:-**

١) $\text{لو}_{٣}$ ٢٧ + $\text{لو}_{٥}$ ١٢٥

٢) $\dfrac{\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}_{٢} \frac{١}{١٢٨}}{\text{لو}_{٢}\ ٢٥٦}$

<u>**الحل**</u>

١) $\text{لو}_{٣}\ ٢٧ + \text{لو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣ + ٣ = ٦$

٢) $\dfrac{\text{لو}_{٢}\ ٣٢ \times \text{لو}_{٢}\ \frac{١}{١٢٨}}{\text{لو}_{٢}\ ٢٥٦} = \dfrac{٥ \times -٧}{٥} = \dfrac{-٣٥}{٨}$ ٧

المعادلة اللوغاريتمية:

هى معادلة يكون المجهول فيها إما عدد أو أساس أو أس لذلك تحول الصورة اللوغاريتمية إلى صورة أسية

<u>**مثال**</u>

حل المعادلات الآتيه:-

١) $\text{لو}_{٨}\ \text{س} = \frac{٢}{٣}$

٢) $\text{لو}_{٦٤}\ ٣٢ = \text{س}$

٣) $\text{لو}_{\text{س}-١}\ ١٢٥ = ٣$

٤) $(\text{لو}_{٢}\text{س})^{٢} - ٥\ (\text{لو}_{٢}\text{س}) + ٦ = ٠$

<u>**الحل**</u>

١) $\text{س} = (٨)^{\frac{٢}{٣}}$

$\text{س} = ٢^{٣ \times \frac{٢}{٣}}$

$\text{س} = ٢^{٢}$

$\text{س} = ٤$

٢) $\text{س} = ٣٢ = (٦٤)^{\text{س}}$

$٢^{٥} = ٢^{٦\text{س}}$

$٦\text{س} = ٥$

$\text{س} = \frac{٥}{٦}$

٣) $\text{س} = ١٢٥ = (\text{س} - ١)^{٣}$

$٥^{٣} = (\text{س} - ١)^{٣}$

$\text{س} - ١ = ٥$

س = ٦

٤) $أ^{٢}$ ـ ٥أ + ٦ = ٠   <u>أ = $لو_{٢}$ س</u>

(أ - ٣) (أ - ٢) = ٠

أ = ٣   ،   أ = ٢

$لو_{٢}$ س = ٣   ، $لو_{٢}$ س = ٢

س = $٢^{٣}$ ،   س = $٢^{٢}$

س = ٨   ،   س = ٤

س ∈ { ٨ ، ٤ }

قوانين اللوغاريتمات

(١) $لو_{أ}$ (س × ص) = $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص

لو ٧ × ٨ = لو ٧ + لو ٨

لو ٥ + لو ٦ = لو٥ × ٦ = لو ٣٠

(٢) $لو_{أ}$ ($\frac{س}{ص}$) = $لو_{أ}$ س - $لو_{أ}$ ص

لو $\frac{٧}{٨}$ = لو٧ - لو٨

لو٦ – لو٥ = لو $\frac{٦}{٥}$

مثال

<u>حول إلى ضرب وقسمة ما يلي :-</u>

١) لو ٧ + لو ٦ ـ لو ٥ ـ لو ١١ = لو $\frac{٦×٧}{٥×١١}$

٢) لو $\frac{٣}{٤}$ + لو $\frac{٥}{٦}$ ـ لو $\frac{٩}{١١}$ = لو $\frac{٣×٥×١١}{٤×٦×٩}$

٣) $لو_{أ}$ $س^{ن}$ = ن $لو_{أ}$ س

لو $٥^{٣}$ = ٣ لو ٥

٧ $لو_{٢}$ = $لو_{٢}$ ^{٧}

٤) لو$_{أ}$ أ = ١ لذلك يكون لو$_{٦}{}^{٦}$ = لو$_{٧}{}^{٧}$ = لو$_{٨}{}^{٨}$ = ١

لو$_{ن}{}^{١}$ = صفر لذلك يكون لو$_{٥}{}^{١}$ = لو$_{١٠}{}^{١}$ = لو$_{٢٠}{}^{١}$ = صفر

<u>النوع الأول من المسائل:</u>

<u>جمع وطرح لوغاريتمات</u>

مثال ١ :- بدون الحاسبة أوجد قيمة

٢لو $\frac{٤}{٧}$ + $\frac{٣}{٢}$ لو$_{\frac{١}{٤}}$ ٢ + ٢ لو $(٧)^{٢}$ ـ لو ٦ ـ لو ٩

<u>الحل</u>

لو $(\frac{٤}{٧})^{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ لو $\frac{٩}{٤}$ + لو $(٧)^{٢}$ ـ لو $\frac{٦}{١}$ ـ لو $\frac{٩}{١}$

لو$(\frac{٤}{٧})^{٢}$ + لو$\frac{٩}{٤}$ $\frac{٣}{٢}$ + لو $\frac{٤٩}{١}$ ـ لو $\frac{٦}{١}$ ـ لو $\frac{٩}{١}$

لو $\frac{١٦}{٤٩}$ + لو $\frac{٢٧}{٨}$ + لو $\frac{٤٩}{١}$ ـ لو $\frac{٦}{١}$ ـ لو $\frac{٩}{١}$

لو $\left(\frac{١٦\times٢٧\times٤٩\times١\times١}{٤٩\times٨\times١\times٦\times٩}\right)$

= لو ١ = صفر

مثال ٢

:- لو$_{٤}$ $\frac{٣}{٥}$ + ١ لو$_{٤}$ ٢٥ + ٦ لو$_{٤}$ ٢ − $\frac{١}{٤}$ لو$_{٤}$ ٨١ = لو$_{٢}$ ٨

<u>الحل</u>

الأيمن لو$_{٤}$ $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{١}{٢}$لو$_{٤}$ $(٢٥)^{١/٢}$ + لو$_{٤}$ $٢^{٦}$ - لو$_{٤}$ $(٨١)^{١/٤}$

لو$_{٤}$ $\frac{٣}{٥}$ + لو$_{٤}$ $\frac{٥}{١}$ + لو$_{٤}$ $\frac{٤٦}{١٤}$ - لو$_{٤}$ $\frac{٣}{١}$

= لو$_{٤}$ $\left(\frac{٣\times٥\times٦٤\times١}{٥\times١\times١\times٣}\right)$ = لو$_{٤}$ ٦٤ = ٣

الأيسر لو$_{٢}$ ٨ = ٣

مثال ٣

بدون الحاسبة أوجد قيمة

$$\frac{\text{لو}\,٤٠ - \text{لو}\,٨ + \text{لو}\,٥}{\text{لو}\,٢٨ - \text{لو}\,٧ + \text{لو}\,٢٥} = ١ - \text{لو}\,٢$$

الحل

$$\text{: الأيمن} = \frac{\text{لو}\left(\frac{٤ \times ٥}{٨}\right)}{\text{لو}\left(\frac{٢٨ \times ٢٥}{٧}\right)} = \frac{\text{لو}\,٢٥}{\text{لو}\,١٠٠}$$

$$= \frac{\text{لو}\,٥^{٢}}{٢} = \frac{٢\text{لو}\,٥}{٢} = \text{لو}\,٥$$

$$\text{الأيسر}\ ١ - \text{لو}\,٢ = \text{لو}\,١٠ - \text{لو}\,٢ = \text{لو}\,\frac{١٠}{٢} = \text{لو}\,٥$$

الأيمن = الأيسر

النوع الثاني :-

ضرب وقسمة اللوغاريتمات

تستخدم القاعدة $\text{لو}\,س^{ن} = ن\,\text{لو}\,س$

مثال

أوجد قيمة ما يلى بدون الحاسبة

١) $\frac{\text{لو}\,١٦ \times \text{لو}\,٢٧}{\text{لو}\,٨١ \times \text{لو}\,٣٢}$

٢) $\frac{\text{لو}\,\frac{٨١}{١٦}}{٥\text{لو}\,\frac{٣}{٢}}$

الحل

١) $\dfrac{\text{لو}\,٢^{٤} \times \text{لو}\,٣^{٣}}{\text{لو}\,٣^{٤} \times \text{لو}\,٢^{٥}} = \dfrac{٤\text{لو}٢ \times ٣\text{لو}٣}{٤\text{لو}٣ \times ٥\text{لو}٢} = \dfrac{١٢}{٢٠} = \dfrac{٣}{٥}$

٢) $\dfrac{\text{لو}\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٤}}{٥\text{لو}\,\frac{٣}{٢}} = \dfrac{٤\text{لو}\frac{٣}{٢}}{٥\text{لو}\,\frac{٣}{٢}} = \dfrac{٤}{٥}$

مثال

حل المعادلات الآتية :-

١) $\text{لو}_{٣}\,(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١٢) = ٢$

٢) $\text{لو}_{\frac{١}{٥}}\ \text{لو}_{٥}\sqrt{٥\text{س}} = \text{صفر}$

٣) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}\ \text{لو}_{٨}\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}}{\text{س} - ٣} = \text{صفر}$

٤) $\text{لو}_{٤}\ \text{لو}_{٢}\ \text{لو}_{٣}\,(٢\text{س} - ١) = \dfrac{١}{٢}$

الحـــل

١) $\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ١٢ = ٣^{٢}$

$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣ = ٠ \quad \therefore (\text{س} + ٣)(\text{س} + ١) = ٠$

$\therefore \text{س} = -٣$ أما $\text{س} = -١$

٢) $\text{لو}_{\frac{١}{٥}}\ \text{لو}_{٥}\sqrt{٥\text{س}} = \text{صفر}$

$\therefore \text{لو}_{٥}\sqrt{٥\text{س}} = \left(\frac{١}{٥}\right)^{٠} = ١$

$\therefore \sqrt{٥\text{س}} = ٥^{١}$ بالتربيع

$\therefore ٥\,\text{س} = ٢٥ \qquad \therefore \text{س} = ٥$

٣) $\text{لو}_{\frac{1}{2}}\ \text{لو}_{8}\ \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س}}{\text{س} - 3} = \text{صفر}$

$$\therefore\ \text{لو}_{8}\ \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س}}{\text{س} - 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1 \qquad \frac{\text{س}^{2} - 2\text{س}}{\text{س} - 3} = 8$$

$$\therefore\ \text{س}^{2} - 2\text{س} = 8\text{س} - 24 \qquad \therefore\ \text{س}^{2} - 10\text{س} + 24 = 0$$

$$(\text{س} - 6)(\text{س} - 4) = 0 \qquad \therefore\ \text{س} = 6 \ \text{أما}\ 4$$

٤) $\text{لو}_{4}\,\text{لو}_{2}\,\text{لو}_{3}\,(2\text{س} - 1) = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ \text{لو}_{2}\,\text{لو}_{3}\,(2\text{س} - 1) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\therefore\ 2\text{س} - 1 = 3^{4} = 81$$

$$\therefore\ 2\text{س} = 82 \qquad \therefore\ \text{س} = 41$$

<u>المعادلات التي تعتمد على قوانين اللوغاريتمات</u>

ملاحظات :-

١) إذا كان $\text{لو}_{أ}\,\text{س} = \text{لو}_{أ}\,\text{ص}$ فإن س = ص

٢) إذا كان $\text{لو}_{\text{س}}\,أ = \text{لو}_{\text{ص}}\,أ$ فإن س = ص

٣) إذا كان $\text{لو}_{أ}\,\text{س} = \text{ب}$ فإن $\text{س} = أ^{\text{ب}}$

مثال ١

<u>حل المعادلة</u>

$$\text{لو}_{4}\,\frac{3 - \text{س}}{1} - \text{لو}_{4}\,\frac{1}{2\text{س} - 1} = \frac{1}{2}$$

<u>الحل</u>

$$\text{لو}_{4}\,\frac{(3 - \text{س}) \times (2\text{س} - 1)}{1 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$(3 - \text{س})\,(2\text{س} - 1) = (4)^{\frac{1}{2}} = 2$$

٦س – ٢س^{٢} + س – ٢ = ٠

-٢س^{٢} + ٧س – ٥ = ٠

٢س^{٢} – ٧س + ٥ = ٠

(٢ س – ٥) (س – ١) = ٠

٢ س – ٥ = ٠   س – ١ = ٠

٢ س = ٥

س = $\frac{٥}{٢}$ س = ١

مثال ٢

<u>حل المعادلة</u>

لو$_{٣}$ س = $\frac{١}{٢}$ لو ٨١ – ٢ لو$_{٥}$ ٣ + لو$_{٥}$ ١٠ – لو$_{٥}$ ٠,٤

<u>الحل</u>

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ (٨١)$^{\frac{١}{٢}}$ – لو$_{٥}$ (٣)^{٢} + لو$_{٥}$ ١٠ – لو$_{٥}$ $\frac{٤}{١٠}$

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ ٩ - لو$_{٥}$ ٩ + لو$_{٥}$ ١٠ - لو $\frac{٤}{١٠}$

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ $\frac{١٠×١٠}{٤}$

لو$_{٣}$ س = لو$_{٥}$ ٢٥

لو$_{٣}$ س = ٢

س = ٣^{٢} س = ٩

مثال

<u>حل المعادلة</u>

لو ٢٥ × لو ٦٤ = لو ١٢٥ × لو س^{٢}

<u>الحل</u>

لو ٥^{٢} × لو ٢^{٦} = لو ٥^{٣} × لو س^{٢}

٢ لو ٥ × ٦ ^{٢} لو ٢ = ٣ لو ٥ × لو $س^{٢}$

٤ لو ٢ = لو $س^{٢}$

لو $٢^{٤}$ = لو $س^{٢}$

لو ١٦ = لو $س^{٢}$

$س^{٢}$ = ١٦ س $\pm$ ٤

ملاحظة

تغير الأساس:

قاعدة

لو$_{ا}^{س}$ = لو$_{ا^{٢}}$ $س^{٢}$ = لو$_{ا^{٣}}$ $س^{٣}$

لو$_{٢}^{٣}$ = لو$_{٤}^{٩}$ = لو$_{٨}^{٢٧}$ و هكذا

مثال :

<u>حل المعادلة</u>

لو$_{٢}^{س}$ = لو$_{٤}^{٩}$

لو$_{٤}$ $س^{٢}$ = لو$_{٤}^{٩}$

$س^{٢}$ = ٩

س = $\pm$ ٣

س = ٣

(اللوغاريتمات المعتادة)

هى التى يكون أساسها (١٠) ويمكن حساب هذه اللوغاريتمات بواسطة الحاسبة كما يلى

مثال :-

<u>أوجد بواسطة الحاسبة</u>

١) لو ١٣ **٢) لو ٥ + لو ٧**

٣) $\dfrac{\text{٣لو٣+٢لو٥ـلو١١}}{\text{لو١٢ـلو٥+لو٢}}$

<u>الحل</u>

١) لو ١٣ = ١ ١١٣٩ = Log ١٣

٢) لو٥ + لو ٧ = ١٥٤٤٠٦ =Log ٧ + Log ٥

٢,٦٢٤٤ = [٣× ٣ Log+ ٢× ٥ Log–١١Log] ÷ [١٢ Log– ٥ Log+ ٢ Log]

مثال

إذا كانت س = $\frac{\text{٣لو٢-٥لو٣+٧لو٣,٥}}{\text{٢لو٣+٣لو٢}}$

<u>الحل</u>

[٣× ٢ Log–٥× ٣ Log+ ٧×٣،٥ Log] ÷ [٢× ٣ Log+ ٣× Log]= ١،٢٥٢٣

ملاحظة :-

لو٢ ٧ = ٢،٨٠٧ =Log ٧ ÷ Log ٢   لو٥ ١٣ = ١, = Log ١٣ ÷ Log ٥

العملية العكسية إيجاد العدد إذا علم اللوغاريتم

مثال

<u>أوجد قيمة س فيما يلي</u>

١) لوس = ١,٣٢٥٧   ٢) لوس =-١,٣٥٧

٣) لوس = $\frac{-٣}{٥}$ ٤) لوس = $\frac{\text{لو٧-لو٢+لو٣}}{\text{لو٢-لو٣+لو٥}}$

<u>الحل</u>

١) ∴ س = ٢١,١٦ = Sh Log ١,٣٢٥٧

٢) ∴ س = ٠,٠٤٣٩٥ = Sh Log ± ١,٣٥٧

٣) ∴ س = ٠,٢٥ = Sh Log ± = ٥ +٣

٤) = [Log ٥ +Log ٣ –Log ٢] ÷ [Log ٣ +Log ٢ – Log ٧]

Sh Log س = ٨٩,٧٤

مثال

حل المعادلة

$$٣^{س} = ١١$$

الحل

∴ لو$٣^{س}$ = لو١١

∴ س لو٣ = لو١١

∴ س = $\frac{لو١١}{لو ٣}$

∴ س = ٢,١٨   Log ١١ = Log ٣

مثال

حل المعادلة

$$(٧)^{٢س+٣} = ١٥$$

الحل

لو $(٧)^{(٢س+٣)}$ = لو١٥

(٢ س + ٣) لو٧ = لو١٥

٢س لو٧ + ٣ لو٧ = لو١٥

٢س لو٧ = لو١٥ – ٣لو٧

س = $\frac{لو١٥ – ٣ لو٧}{٢ لو٧}$

= [Log ٧ × ٢] ÷ [Log ١٥ – Log ٧ × ٣]

س = - ٠,٨٠٤

مثال

حل المعادلة

$$٧^{٢س-٣} = ٥ \times (٣)^{س+٢}$$

الحل

لو ٧ $^{٢س-٣}$ = لو ٥ × (٣)$^{س+٢}$

لو ٧ $^{٢س-٣}$ = لو ٥ + لو ٣ $^{س+٢}$

(٢س-٣) لو٧ = لو٥ + (س+٢) لو٣

٢س لو٧ – ٣ لو٧ = لو٥ + س لو٣ + ٢لو٣

٢س لو٧ – س لو٣ = ٣لو٧ + لو٥ + ٢لو٣

س = ٣ لو٧ + لو٥ + ٢ لو٣

ـــــــــــــــــــــــــ

٢ لو٧ - لو٣

[٣ × ٧ Log + ٥ Log + ٢ × ٣ Log] ÷ [٢× ٧ Log – ٣ Log]

س = ٣,٤٥

مثال

حل المعادلة

٣ $^{س+٢}$ × ٧ $^{٢س-٣}$ = ١٥

الحل:

لو ٣ $^{س+٢}$ + لو ٧ $^{٢س-٣}$ = ١٥

(س+٢) لو٣ + (٢س-٣) لو٧ = لو١٥

س لو٣ + ٢لو٣ + ٢س لو٧ – ٣لو٧ = لو١٥

س = [لو٣ + ٢ لو٧] = لو١٥ + ٣ لو٧ – ٢ لو٣

س = [لو١٥ + ٣لو٧ – ٢لو٣]

ـــــــــــــــــــــــــ

[لو٣ + ٢لو٧]

س = ١,٢٧

مثال

حل المعادلة

٣ ^{٢س} - ١١ × ٣ ^{س} + ٢٤ = ٠

الحل

نضع ٣ ^{س} = أ   أ ^{٢} – ١١ أ + ٢٤ = ٠

(أ − ٨) (أ − ٣) = ٠

أ = ٨ أو أ = ٣

$٣^{\text{س}}$ = ٨ أو $٣^{\text{س}}$ = ٣

لو $٣^{\text{س}}$ = ٨ س = ٣

س لو ٣ = ٨

س = $\frac{\text{لو}٨}{\text{لو}٣}$ = ١,٨٩ س ∈ { ١ : ٨٩ }

مثال

إذا كانت د(س) = $٢^{\text{س}}$ أوجد قيمه س إذا كانت

د (٢س +١) + (س-١) = ٧

<u>الحل</u>

$٢^{٢\text{س}+١}$ + $٢^{\text{س}-١}$ = ٧

$٢^{١}$ × $٢^{٢\text{س}}$ + $٢^{-١}$ × $٢^{\text{س}}$ = ٧

بوضع $٢^{\text{س}}$ = أ $٢^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

٢ $\text{أ}^{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ أ − ٧ = ٠ × ٢

٤ $\text{أ}^{٢}$ + أ − ١٤ = ٠

(٤ أ − ٧) (أ + ٢) = ٠

٤ أ − ٧ = ٠ أ + ٢ = ٠

٤ أ = ٧ أ = -٢

أ = $\frac{٧}{٤}$ $٢^{\text{س}}$ = $\frac{٧}{٤}$ $٢^{\text{س}}$ = -٢

لو $٢^{\text{س}}$ = لو $\frac{٧}{٤}$

س لو٢ = لو٧ − لو٤

س = $\frac{\text{لو}٧ - \text{لو}٤}{\text{لو}٢}$ = ٠,٨

مثال :- **إذاكان حجم المتروط الدائرى القاسم هو**

ح = $\frac{١}{٣}$ ط نق^{٢} × ع أوجدى ح إذا كانت ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ونق = (٣,٧)

ع = $\frac{١٣}{٥}$

<u>الحل:</u>

ح = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × $(٣,٧)^{٢}$ × $\frac{١٣}{٥}$

ح = $\frac{٢٢ \times ٣,٧^{٢} ١٣}{٣ \times ٥}$

[٢٢ × ٣،٧ Sh × ٢ × ١٣] + [٣ × ٥] =

ح = ٢٦١

مثال

كرة من الرصاص صهرت وحولت إلى مكعب ، احسب طول حرف المكعب علما بان حجم الكرة هو ٣١٧٥ سم^{٣} . علما بأن لم يفقد شئ من الرصاص .

<u>الحل</u>

حجم المكعب = ل^{٣}

حجم المكعب = حجم الكرة

ل^{٣} = ٣١٧٥

ل = $(٣١٧٥)^{\frac{١}{٣}}$

٣١٧٥ SH ÷ ٣ = ١٤,٦٩

ل = ١٤,٦٩ سم

التمثيل البيانى للدالة اللوغارتمية

الصورة العامة للدالة اللوغارتمية هى :

ص = لو$_{أ}$ س حيث

س ∈ ح$^{+}$ ، أ ∈ ح$^{+}$ - { ١ } ، ص ∈ ح

مجال الدالة اللوغارتمية ⟵ ح$^{+}$ والمجال المقابل لها ح

، **مداها** ح

الدالة اللوغارتمية متزايدة على مجالها إذا كان أ > ١

ومتناقصة على مجالها إذا كان ٠ < أ < ١ ومنحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

مثال .

- ارسم منحنى الدالة ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س ومن الرسم اوجدى قيمة تقريبة للعدد

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ ، قيمة $\sqrt{٢٧}$

الحل

تعين ازدواج النقط (س ، لو$_{\frac{١}{٣}}$ س)

س	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$
ص	-٣	-٢	٠	١	٢	٢	٣

لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ = س ٢,٧

∴ لو$_{\frac{١}{٣}}$ ٢.٧ = -٠.٩

∴ $\sqrt{٢٧}$ = = ٣$^{\frac{٣}{٢}}$ = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{-\frac{٣}{٢}}$

بعض المفاتيح الهامة فى الحاسبة

المفتاح X^{Y} موضوع على زرار x ويستخدم لإيجاد ضرب العدد فى نفسه عدة مرات

المفتاح $X^{\frac{١}{Y}}$ موضوع على زرار ÷ يستخدم فى إيجاد جذور الإمداد لأي دليل

مثال

- <u>أحسب ما يلى</u>

$(١,٢٥)^{٨}$ $(١,٣٢)^{-٣}$

<u>الحل:</u>

١,٢٥ Sh ×٨ = ٥,٩

١,٣٢ Sh× ٣ ± = ٠,٤٣

مثال٢

- <u>أحسب قيمه</u>

$\sqrt[٥]{١٧}$ و $\sqrt[٣]{١٧}$ و $\sqrt[٧]{١٧}$

<u>الحل</u>

$\sqrt[٥]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٥}}$ ١٧ Sh÷ ٥ = ١,٧٦

$\sqrt[٣]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٣}}$ ١٧ Sh ÷ ٣ = ٢,٥٧

$\sqrt[٧]{١٧} = (١٧)^{\frac{١}{٧}}$ ١٧ Sh ÷ ٧ = ١,٤٧

تطبيقـــــات عمليـــــــة

مثال١ :- إذا كانت $س^{٧} = ٣٤٥$ فما قيمة س

<u>الحل</u>

س = ٣٤٥ Sh ÷ ٧ = ٢,٣

مثال٢ :- إذا كانت $س^{\frac{٣}{٤}}$ = (٢,٧٥) فما قيمه س

الحل

$$س = (٢.٧٥)^{\frac{٣}{٤}}$$

س = ٣,٨٥ = ٣ ÷ Sh ٤ × Sh ٢,٧٥

مثال٣ - إذا كان حجم الكرة يساوى $\frac{٤}{٣}$ ط $نق^{٣}$

أوجدى نق إذا علم أن ح = ٣٤٨ ^{٣} ط = ٣,١٤

الحل:

$$ح = \frac{٤ط . نق^{٣}}{٣}$$

٣ ح = ٤ ط $نق^{٣}$

$$نق^{٣} = \frac{٣ح}{٤ط} \qquad نق = \left(\frac{٣ح}{٤ط}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

$$نق = \left(\frac{٣٤٨×٣}{٣,١٤×٤}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

نق = ٤,٣٦ = ٣ ÷ Sh = ٣،١٤ ÷ ٤ ÷ ٣٤٨ × ٣

مثال:- إذاكان أ = م (١+س $)^{ن}$

وكانت م = ٦٧٥ و س = ٠٤,

ن = ٣٠ فما قيمة (أ)

الحل:

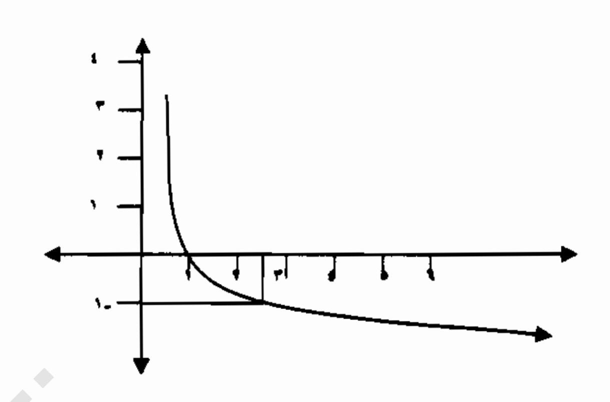
أ = ٦٧٥ [١ + ٠٤, $]^{٣٠}$

أ = ٦٧٥ (١,٠٤ $)^{٣٠}$

= ٦٧٥ × ٣٠ × Sh ١،٠٤

أ = ٢١٨٩,٢٩

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$ = س   لو$_{\frac{1}{3}}$ س = $\frac{-3}{2}$ عندما ص = $\frac{-3}{2}$ س ≅ ٥,٢



مثال

ارسم منحنى الدالة ص = لو$_2$س ومن الرسم اوجد قيمة لو$_2$ ٤,٥

يتعين انواج النقط (س لو$_2$س)

<u>الحل</u>

س	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤	٨
ص	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣

لو$_2$ ٤,٥ = س = ٤,٥

بالحاسبة للتأكيد :

لو$_ب$ أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

∴ لو$_2$ ٤,٥ = لو ٤,٥ ≈ ٢,٢

تمرين (٢٤)

اوجد مجموعة الحل للمعادلات الأتية

١) $لو_{س}$ ٢٧ $\sqrt{س}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$

٢) س = $لو_{٣}$ طا $\frac{ط}{٣}$

٣) لو ١٦ ٠٠ .٠ = س $\sqrt[٣]{٥}$

٤) ٤) $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ = س

٥) $لو_{٣}$ $لو_{٢}$ س = ١

٦) $لو_{٣}$ | س + ١ | = ٤

٧) $لو_{١٦}$ (س + ٣) = $\frac{١}{٤}$

اوجد قيمة : ـ

٨) ٢ $لو_{٣}$ ٩ $\sqrt{٣}$

٩) $لو_{٥}$ $لو_{٣}$ $لو_{٢}$ ٨

١٠) $\frac{لو ٨١}{لو ٢٧}$

١١) لو ٢٥ + لو ٢٨ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$ ـ لو ($\frac{٤}{٥}$ + ٢)

١٢) $لو_{٦}$ ١٠٠ ـ ٢ $لو_{٦}$ ٢ + ٣٦ ـ $لو_{٤}$ ١٨ ـ $لو_{٦}$ ٢٥

١٣) ٢ لو ٢٥ + لو ($\frac{١}{٥}$ + $\frac{١}{٣}$) + ٢ لو ٣ ـ $\frac{١}{٥}$ لو ٣ ٢٤

١٤) ١ + ٢ لو $\frac{٤}{٧}$ - $\frac{٣}{٢}$ لو $\frac{٤}{٩}$ + ٢ لو ٧ ـ لو ٦ - ٢ لو ٣

١٥) ٣ $لو_{٢}$ ١٤ - ٤ $لو_{٢}$ ٥ + $لو_{٢}$ $\frac{٢٥}{٧}$ - $لو_{٢}$ ٧

أثبت ان

١٦) لو$_{٣}$ ٠,٣ – لو$_{٣}$ $\frac{٢٧}{٢٥}$ - لو$_{٣}$ $\frac{١٢٥}{٩}$ = ١

١٧) $\frac{\text{لو ٠ ٤ – لو ٨ + لو ٥}}{\text{لو ٢٨ – لو ٧ + لو ٢٥}}$ = ١ – لو ٢

١٨) ٣لو٥ + ٢لو١٤ – لو٤٩ + ٢لو٠,٢ = لو٢٥.

١٩) اذا كان لو$_{٣}$ $\frac{٣}{٢٥}$ + ٥لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٢٧ – لو$_{٣}$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ - لو$_{٣}$ ٢٤٣ = لو$_{٣}$ س

فأوجد قيمة س

٢٠) اذا كان ٣لوس + ٤ لوص – س ص^{٢} = ٢ (لو٢ + لو٣)

حل المعادلات الآتية

٢١) س$^{\text{لوس}}$ = ١٠٠ س

٢٢) لو س × لو ٠,٧ = لو٤٩ – (لو٧)^{٢}

٢٣) لو س = $\frac{\text{(لو ٥)}^{٢} \text{ – لو١٢٥}}{\text{لو٠,٠٠٥}}$

٢٤) لو$_{٣}$س = لو$_{٤}$ ٩

٢٥) (لوس)^{٢} – لوس^{٢} = (لو٢)^{٢} – ١

٢٦) ٩^{س} – ٢٧ × ٣^{س} + ٥٠ = ٠

٢٧) ٩^{س} – ١٤ × ٣^{س} + ٤٥ = ٠

٢٨) اذا كانت ٣$^{\text{٧-٢س}}$ = ١٨,١ اوجد قيمة س

ارسم الدوال الآتية :

٢٩) ص = لو$_{٣}$ س متخذا س ∈ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩] ومن الرسم اوجد قيمة للعدد لو$_{٣}$ ٥

٣٠) د (س) = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س من الرسم اوجد قيمة تقريبية للعدد لو$_{\frac{١}{٣}}$ ١٥

(٣) : المتتابعــات

- مراجعة المتتابعات
- تعريف المتتابعة
- المتتابعة الحسابية
- الوسط الحسابي
- مجموع حدود متتابعة حسابية
- المتتابعة الهندسية
- الوسط الهندسي والعلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي
- مجموع حدود متتابعة هندسية
- محموع حدود متتابعة هندسية لانهائية
- مسائل عامة على المتتابعات

المتتابعـــــات

تعريف:

المتتابعات الحقيقة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ص+ أو مجموعة جزئية منها ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

أي أن: المتتابعة هي: د: ص+ ⟵ ح

أو د: {١ ، ٢ ، ٣ ، ......، ن } ⟵ ح

ملحوظة:

* إذا كان مجال المتتابعات هو المجموعة ص+ فإن المتتابعة تسمى متتابعة لا نهائية.
* إذا كان مجال المتتابعة مجموعة جزئية من ص+ سميت المتابعة متتابعة منتهية.
* المتتابعة التي لا يعطي مجالها تعتبر متتابعة لا نهائية.

بيان المتتابعة:

∵ المتتابعة دالة مجالها ص+ (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها المقابل ح فإن بيان المتتابعة هي مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∈ ص+ ، ص ∈ ح وعلى ذلك يمكن كتابة المتتابعة على الصور:

د = {(١ ، د(١) ، (٢ ، د(٢)) ، (٣ ، د(٣)) ، ...... (ر ، د(ر) ، .....}

ويمكن إهمال كتابة المساقط الأولى للأزواج المرتبة ويكتب بيان المتتابعة على الصورة

د = (د(١)، د(٢) ، د(٣)، ..... ، د(ر)،.......)

والقيم د(١)، د(٢)، د(٣)، ....، تسمى حدود المتتابعة.

ويرمز لـ د(١) بالرمز ح١ ، د(٢) بالرمز ح٢ ، د(٣) بالرمز ح٣،....، ويرمز د(ر) بالرمز حر وبذلك نستطيع كتابة المتتابعة على الصورة:

(ح١ ، ح٢ ، ح٣ ، ......، حر، ....)

ملحوظة:

ليس لكل متتابعة حد عام حر فمثلاً..متتابعة الأعداد الأولية

(٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) ليس لها حد عام

أما متتابعة الأعداد الصحيحة المربعة فلها حد عام

حر = ن٢ = (١ ، ٤ ، ٩ ، ... ر٢ ، ...)

التمثيل البياني للمتابعة:

حيث أن المتتابعة هي دالة مجالها ص+ (أو مجموعة جزئية منها) ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية وبيان المتتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س

∈ $ص^+$ ، ص ∈ ح لذلك تمثل المتتابعة بنقط منفصلة في المستوى الديكارتي وجميعها تقع في المنطقة التي على يمين محور الصادات.

أطراد الدالة

تعريف١: المتتابعة المتزايدة:

يقال للمتتابعة ($ح_ن$) أنها متزايدة إذا وفقط إذا كان

$ح_{ر+١} > ح_ر$ $\forall_ر$ ∈ $ص^+$

أي إذا كان $ح_{ر+١} - ح_ر$ > صفر $\forall_ر$ ∈ $ص^+$

تعريف٢: المتتابعة المتناقصة:

يقال للمتتابعة ($ح_ن$) أنها متناقصة إذا وفقط إذا كان

$ح_{ر+١} < ح_ر$ $\forall_ر$ ∈ $ص^+$

أي إذا كان $ح_{ر+١} - ح_ر$ < صفر $\forall_ر$ ∈ $ص^+$

تعريف٣ المتتابعة الثابتة:

يقال للمتتابعة ($ح_ن$) أنها متتابعة ثابتة إذا وفقط إذا كان

$ح_{ر+١} = ح_ر$ $\forall_ر$ ∈ $ص^+$

أي إذا كان $ح_{ر+١} - ح_ر$ = صفر $\forall_ر$ ∈ $ص^+$

ملحوظة: الرمز ($ح_ن$) يرمز للمتتابعة أما الرمز $ح_ن$ يرمز للحد العام.

مثال: أكتب ثلاثة حدود من المتتابعة ($ح_ن$) = ٥ن ـ ٢

الحـــــــل

∵ $ح_ن$ = ٥ن ـ ٢

عند ن = ١ ⇐ $ح_١$ = ٥ × ١ ـ ٢ = ٣

ن = ٢ ⇐ $ح_٢$ = ٥ × ٢ ـ ٢ = ٨

ن = ٣ ⇐ $ح_٣$ = ٥ × ٣ ـ ٢ = ١٣

∴ ($ح_ن$) = (٣ ، ٨ ، ١٣ ، ....)

مثال: أكتب خمسة حدود من المتتابعة ($ح_{ن-٢}$) = (٣ن + $٢^{ن-١}$)

الحـــــــل

∵ ($ح_{ن-٢}$) = (٣ن + $٢^{ن-١}$)

عند ن = ٣ ⇐ $ح_{٣-٢}$ = $ح_١$ = ٣ × ٣ + $٣^{٣-١}$ = ٩ + ٤ = ١٣

ن = ٤ ⇐ $ح_{٤-٢}$ = $ح_٢$ = ٣ × ٤ + $٢^{٤-١}$ = ١٢ + ٨ = ٢٠

ن = ٥ ⇦ $ح_{٥-٢} = ح_{٣} = ٣ \times ٥ + ٢^{٥-١} = ١٥ + ١٦ = ٣١$

ن = ٦ ⇦ $ح_{٦-٢} = ح_{٤} = ٣ \times ٦ + ٢^{٥} = ١٨ + ٣٢ = ٥٠$

ن = ٧ ⇦ $ح_{٧-٢} = ح_{٥} = ٣ \times ٧ + ٢^{٦} = ٢١ + ٦٤ = ٨٥$

∴ الحدود الخمسة هي: ١٣ ، ٢٠ ، ٣١ ، ٥٠ ، ٨٥

<u>مثال:</u> أكتب الحدود الخمسة الأولى ومثلها بيانيا:

$$(ح_ن) \text{ حيث } ح_ن = \begin{cases} \dfrac{ن + ٣}{ن - ٢} & \text{إذا كانت ن فردية} \\[2ex] \dfrac{ن - ٢}{ن + ٣} & \text{إذا كانت ن زوجية} \end{cases}$$

<u>الحـــــــــل</u>

إذا كانت ن فردية: $ح_ن = \dfrac{ن + ٣}{ن - ٢}$

$$ح_{١} = \frac{١ + ٣}{١ - ٢} = \frac{٤}{-١} = -٤$$

$$ح_{٣} = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦ \quad ، \quad ح_{٥} = \frac{٥ + ٣}{٥ - ٢} = \frac{٨}{٣} = ٢,٧$$

إذا كانت ن زوجية:- $ح_ن = \dfrac{ن - ٢}{ن + ٣}$

$$ح_{٢} = \frac{٢ - ٢}{٢ + ٣} = \text{صفر} \quad ، \quad ح_{٤} = \frac{٤ - ٢}{٤ + ٣} = \frac{٢}{٧} = ٠,٣$$

∴ الحدود الخمسة الأولى -٤ ، صفر ، ٦ ، $\dfrac{٢}{٧}$ ، $\dfrac{٨}{٣}$

<u>مثال:</u> ابحث اطراد كل من المتتابعات الآتية:

أ) $(ح_ن) = (٢ن - ٣)$ ب) $(ح_ن) = \left(\dfrac{ن^{٢} - ١}{ن}\right)$ ج) $(ح_ن) = \left(\dfrac{ن + ٢}{ن + ١}\right)$

<u>الحـــــــــل</u>

(أ) $ح_ن = ٢ن - ٣$ ⇦ (١)

$ح_{ن-١} = ٢(ن - ١) - ٣$

$= ٢ن - ١ \quad \Leftarrow \quad (٢)$

بالطرح $ح_{ن+١} - ح_{ن} = ٢$

$\therefore$ $ح_{ن+١} - ح_{ن} >$ صفر

$\therefore$ المتتابعة $(ح_{ن})$ متزايدة

(ب) $\because ح_{ن} = \frac{ن^{٢} - ١}{ن} = ن - \frac{١}{ن}$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_{ن} = (ن + ١ - \frac{١}{ن + ١}) - (ن - \frac{١}{ن})$

$= ١ - \frac{١}{ن + ١} + \frac{١}{ن} = \frac{ن(ن + ١) - ن + (ن + ١)}{ن(ن + ١)}$

$= \frac{ن^{٢} + ن - ن + ن + ١}{ن(ن + ١)} = \frac{ن^{٢} + ن + ١}{ن(ن + ١)}$

$\therefore ح_{ن+١} - ح_{ن} > ٠ \qquad \therefore ح_{ن+١} > ح_{ن}$ $\qquad \therefore$ **المتتابعة متزايدة**

(ج) $ح_{ن+١} - ح_{ن} = \frac{ن + ٣}{ن + ٢} - \frac{ن + ٢}{ن + ١}$

$= \frac{(ن + ٣)(ن + ١) - (ن + ٢)^{٢}}{(ن + ٢)(ن + ١)} = \frac{ن^{٢} + ٤ن + ٣ - ن^{٢} - ٤ن - ٤}{(ن + ٢)(ن + ١)}$

$= \frac{-١}{(ن + ٢)(ن + ١)} \qquad \therefore ح_{ن+١} - ح_{ن} <$ صفر

$\therefore ح_{ن+١} < ح_{ن}$ $\qquad \therefore$ **المتتابعة متناقصة**

تمرين (٢٥)

(١) أكتب بيان الدالة في كل مما يأتي:

أ) د: $ص^{+} \leftarrow ح$ حيث د(ن) = ٣ن - ٤ $\quad \forall$ ن ∈ $ص^{+}$

ب) د: $ص^{+} \leftarrow ح$ حيث د(ن) = $٢^{-ن}$ - ٣ $\quad \forall$ ن ∈ $ص^{+}$

ج) د: {١ ، ٢ ، ٣} $\leftarrow ح$ حيث د(ن) = $\frac{ن}{ن + ١}$ $\quad \forall$ ن ∈ $ص^{+}$

ء) د: $\{١ ، ٢ ، ٣\} \leftarrow ح$ حيث $د(ن) = ٣ + \frac{(-١)^ن}{ن}$ $\forall$ ن ∍ ص⁻

(٢) في كل من المتتابعات الآتية أكتب الخمسة حدود الأولى ومثلها بيانياً:

أ) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٣ - ن$ ب) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{١}{ن + ١}$

ج) د: $\{١ ، ٢ ، ٣\} \leftarrow ح$ ء) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن}$

(٣) في كل من المتتابعات الآتية أكتب الحدود الخمسة الستة الأولى:

أ) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \begin{cases} ٢ & \text{إذا كانت ن فردية} \\ -١ & \text{إذا كانت ن زوجية} \end{cases}$

ب) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \begin{cases} \text{حيث } ح_ن = \frac{١}{٢} & \text{إذا كانت ن فردية} \\ ٢ن - ١ & \text{إذا كانت ن زوجية} \end{cases}$ حيث $ح_ن = \begin{cases} \frac{١}{٢} ن^٢ & \text{إذا كانت ن فردية} \\ ٢ن - ١ & \text{إذا كانت ن زوجية} \end{cases}$

ج) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \begin{cases} ن + ١ & \text{حيث ن} < ٣ \\ \frac{١}{٢} ن^٢ & \text{حيث ن} \geq ٣ \end{cases}$

ء) $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \begin{cases} ٣ & \text{حيث ن} \leq ٢ \\ ح^٢_{ن-١} & \text{حيث ن} > ٢ \end{cases}$

(٤) في كل من المتتابعات الآتية أكتب الستة حدود الأولى منها:

أ) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢}(ح_ن + ح_{ن-١})$ $\forall_ر \geq ٢$

ب) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ٥$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ٢$

ج) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ٢$ ، $ح_٢ = -١$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ح^٢_{ن-١}$ ، $\forall \geq ٢$

ء) $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ح_٢ = ٣$ ، $ح_٣ = -٢$ ، $ح_{ن+٢} = ح_{ن-١} + ح_{ن+١}$ $\forall \geq ٢$

(٥) ابحث كلاً من المتتابعات الآتية من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة:-

أ) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = \left(\frac{\text{ن} + ٢}{\text{ن}}\right)$

ب) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٣^{\text{ن} - ٢})$

ج) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٣ \times ٢^{\text{ن}} - ٥)$

ء) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٢ + \frac{٣}{٢})$

هـ) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = \left(\frac{١}{\text{ن}^{٢} + ١}\right)$

و) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (١١ - ٢\text{ن})$

ز) $(\text{ح}_{\text{ن}}) = (٧)$

(٦) أكتب الحدود الستة الأولى في كل من المتتابعتين الآتيتين:

أ) $(\text{ح}_{\text{ن}})$ حيث $\text{ح}_{١} = -١$ ، $\text{ح}_{٢} = ٢$ ، $\text{ح}_{٣} = ١$ ، $\text{ح}_{٢\text{ن} - ١} = \text{ح}_{٢\text{ن} - ١} + \text{ح}_{٢\text{ن} - ٣}$ $\forall \text{ن} \geq \text{ن}$ ،
$\text{ح}_{٢\text{ن}} = \text{ح}_{٢\text{ن} + ٣}$ $\forall \text{ن} > ١$

ب) $(\text{ح}_{\text{ن}})$ حيث $\text{ح}_{١} = ١$ ، $\text{ح}_{٢} = ٢$ ، $\text{ح}_{٣} = -٢$ ، $\text{ح}_{٢\text{ن}} = \text{ح}^{٢}_{٢\text{ن} - ٢}$ $\forall > ١$
، $\text{ح}_{٢\text{ن} + ١} = \text{ح}_{٢\text{ن} - ١} + \text{ح}_{٢\text{ن} - ١} + \text{ح}_{٢\text{ن} - ٣}$ $\forall \text{ن} \geq ٢$

(٧) هل الأعداد -٤٢ ، -٣٠ ، ١٢ ضمن حدود المتتابعة $(\text{ح}_{\text{ن}})$ حيث:
$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ن}^{٢} - ١٣\text{ن}$ وما ترتيبها

(٨) أكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتابعة $(\text{ح}_{\text{ن}})$

حيث $\text{ح}_{\text{ن}} = \begin{cases} \text{ن} & \text{حيث ن فردية} \\ \frac{\text{ن}}{٢} & \text{حيث ن زوجية ولا تقبل القسمة على ٤} \\ \frac{١}{٢}(\text{ح}_{\text{ن} - ٢} + \text{ح}_{\text{ن} - ١}) & \text{حيث ن زوجية وتقبل القسمة على ٤} \end{cases}$

المتتابعات الحسابية

تعريف: المتتابعة الحسابية:

* تسمى المتتابعة (حـر) متتابعة حسابية إذا كان

$ح_{ر+1} - ح_ر$ = مقدار ثابت لكل ر ∈ ص$^+$

* يسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز ء

أي أن ء = $ح_{ر+1} - ح_ر$ ∀ر ∈ ص$^+$

أي أن أساس المتتابعة الحسابية = أي حد فيها - الحد السابق له مباشرة

نظرية هامة

المتتابعة (حـن) تكون متتابعة حسابية إذا وفقط إذا كان حـن مقدارا من الدرجة في ن ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة.

البرهان: (لا يمتحن فيه الطالب)

الحد العام للمتتابعة الحسابية:

إذا رمزنا للحد الأول في المتتابعة الحسابية بالرمز أ وللأساس بالرمز ء فإن:

$ح_1$ = أ ، $ح_2$ = $ح_1$ + ء = أ + ء

، $ح_3$ = $ح_2$ + ء = أ + ٢ء

، $ح_4$ = $ح_3$ + ء = أ + ٣ء .... وهكذا

∴ $ح_ن$ = أ + (ن - ١)ء حيث ن ∈ ص$^+$ وتسمى ن رتبة الحد

إذا كان عدد الحدود ن فإن الحد الأخير هو حـن ويرمز له بالرمز ل

∴ ل = أ + (ن - ١)ء

الصورة العام للمتتابعة الحسابية:

إذا كتبنا المتتابعة الحسابية التي حدها الأول أ وأساسها ء على الصورة

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ....)

فأنها تسمى الصورة العامة للمتتابعة الحسابية

مثال: أثبت أن المتتابعة: حـن = ٣ن + ٧ حسابية

الحـــــل

$ح_1$ = ٣ × ١ + ٧ = ١٠

، $ح_2$ = ٣ × ٢ + ٧ = ١٣ ، $ح_3$ = ٣ × ٣ + ٧ = ١٦

∴ $ح_2$ - $ح_1$ = $ح_3$ - $ح_2$ = ٣ ∴ المتتابعة حسابية.

مثال:

في المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....)

١) أوجد $ح_{١٠}$ ، $ح_{١٥}$ ، $ح_{ن}$

٢) هل يوجد في المتتابعة عدد قيمته ١٥٢ ولماذا؟

الحـــــل

أولا: أ = ٣ ، ء = ٦ - ٣ = ٣

$ح_{١٠}$ = أ + ٩ء = ٣ + ٩ × ٣ = ٣٠

$ح_{١٥}$ = أ + ١٤ء = ٣ + ١٤ × ٣ = ٤٥

$ح_{ن}$ = أ + (ن - ١)ء = ٣ + (ن - ١) × ٣

= ٣ + ٣ن - ٣ ← $ح_{ن}$ = ٣ن

ثانيا: نضع $ح_{ن}$ = ١٥٢

٣ن = ١٥٢ ← ن = $\frac{١٥٢}{٣}$ = ٥٠,٦ ∴ ن ∉ $ص^{+}$

∴ العدد ١٥٢ لا يوجد في المتتابعة المعطاه.

مثال:

أوجد الحد التاسع من النهاية للمتتابعة الحسابية:

٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ١١٩

الحـــــل

المتتابعة: ٣ ، ٧ ، ١١ ، ......، ١١٩ متزايدة وأساسها ٤

والمتتابعة: ١١٩ ، ...... ، ١١ ، ٧ ، ٣ متناقصة وأساسها -٤

∴ الحد المطلوب هو الحد التاسع من المتتابعة الأخيرة وهو:

$ح_{٩}$ = أ + ٨ء = ١١٩ + ٨(-٤) = ٨٧

طرق إيجاد (أول حد سالب وآخر حد موجب) أو (آخر حد سالب) أو (أول حد موجب) أو (أول حد موجب) من متتابعة حسابية.

إذا كانت المتتابعة متزايدة	إذا كانت المتتابعة متناقصة
نضع $ح_{ن}$ = صفر ثم نوجد ن $ح_{ن}$ = أ + (ن - ١)ء أ- إذا كانت ن عدد صحيح تكون رتبة آخر حد سالب هو (ن - ١) ورتبة أول حد موجب هو (ن + ١)	نضع $ح_{ن}$ = صفر ثم نوجد ن $ح_{ن}$ = أ + (ن - ١)ء أ- إذا كانت ن عدد صحيح تكون رتبة آخر حد سالب هو (ن + ١) ورتبة أول حد موجب هو (ن - ١)

وإذا كانت ن = ك + م حيث ك عدد صحيح، م كسر بحيث صفر < م < ١ فيكون رتبة آخر حد سالب هو ك ورتبة أول حد موجب هو ك – ١	وإذا كانت ن = ك + م حيث ك عدد صحيح، م كسر بحيث صفر < م < ١ فيكون رتبة اخر حد موجب هو ك ورتبة أول حد سالب هو ك + ١

مثال:

أوجد رتبة أول حد سالب في المتتابعة ١٢٨ ، ١١١ ، ٩٤ ، .....

الحـــــــل

نوع المتتابعة تناقصية ء = -١٧

∴ نضع حـن = صفر

∴ ٠ = ١٢٨ + (ن - ١) × -١٧ ∴ ١٧(ن - ١) = -١٢٨

∴ ن - ١ = ٧,٥٢٩ ∴ ن = ٨,٥٢٩ = ٨ - ٠,٥٢٩

وهو في صورة ن = ك + م

∴ رتبة أول حد سالب هو ك + ١ وهو الحد التاسع

∴ حـ٩ = أ + ٨ء = ١٢٨ + ٨(-١٧) = -٨

مثال: أوجد رتبة وقيمة آخر حد سالب في المتتابعة: -٥٢ ، -٥٠ ، -٤٨ ، .....

الحـــــــل

أ = -٥٢ ، ء = (-٥٠) - (-٢٥) = ٢

نضع حـن = ٠ ∴ ٠ = أ + (ن - ١) ء

-٥٢ + (ن - ١) × ٢ = ٠

-٥٣ + ٢ن - ٢ = ٠

∴ ن = $\frac{٥٤}{٢}$ = ٢٧

، ∵ المتتابعة تزايدية. ∴ رتبة آخر حد سالب = ن - ١

∴ رتبة آخر حد سالب = ٢٧ - ١ = ٢٦

∴ حـ٢٦ = أ + ٢٥ء

= -٥٢ + ٢٥ × ٢ = -٢

بعض الخواص الأساسية للمتتابعات العددية

١) إذا أضيفت كمية ثابتة م إلى كل حد من حدود المتتابعة العددية أو طرحت كمية ثابتة م من كل حد من حدود المتتابعة - كونت الكميات الناتجة متتابعة عددية أساسها هو نفس أساس المتتابعة الأصلية.

فمثلاً: إذا كان: أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ..... متتابعة عددية وإذا أضيفت م إلى كل حد (أ + أ) ، (أ + ء ، م) ، (أ + ٢ء + م)

∵ (أ + ء + م) - (أ + م) = ء ∴ هي متتابعة عددية.

، أ - م ، أ + ء - م ، أ + ٢ء - م ، ....

الأساس = (أ + ء - م) - (أ - م) = ء متتابعة عددية

٢) إذا ضربنا كل حد من حدود المتتابعة العددية في كمية ثابتة م أو قسم على كمية ثابتة م كونت الكميات الناتجة متتابعة عددية أساسها = أساس المتتابعة الأصلية مضروباً في م أو مقسوماً على م

فمثلاً: أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ...... متتابعة عددية.

بالضرب في م

أ م ، م (أ + ء) ، م (أ + ٢ء) ، ....

الأساسي = م(أ + ء) - أ م

= أ م + م ء - أ م = م × ء

$$\frac{\text{أ}}{\text{م}} \text{ ، } \frac{\text{أ} + \text{ء}}{\text{م}} \text{ ، } \frac{\text{أ} + ٢\text{ء}}{\text{م}} \text{ ، .....}$$

$$\frac{\text{أ} + \text{ء}}{\text{م}} - \frac{\text{أ}}{\text{م}} = \frac{\text{أ}}{\text{م}} + \frac{\text{ء}}{\text{م}} - \frac{١}{\text{م}} = \frac{\text{ء}}{\text{م}}$$

٣) إذا كانت ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ...... متتابعة عددية أساسها $\text{ء}_{١}$ = ٣ ،

٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ ، متتابعة عددية أساسها $\text{ء}_{٢}$ = ٥

∴ (٣ + ٥) ، (٦ + ١٠) ، (٩ + ١٥) ، (١٢ + ٢٠) ، ....

٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٢ ، ....

الأساس الناتج = ١٦ - ٨ = ٨

٢٤ - ١٦ = ٨

الأساس = ٣ + ٥ = ٨ أي ← ء = $\text{ء}_{١}$ + $\text{ء}_{٢}$

، (٣ - ٥) ، (٦ - ١٠) ، (٩ - ٢٤) ، ....

-٢ ، -٤ ، -١٦ متتابعة عددية ء = $\text{ء}_{١}$ - $\text{ء}_{٢}$

<u>مثال:</u>

إذا كانت: ٨ ، أ ، ب ، .....هـ ، ٦٨ متتابعة عددية عدد حدودها ١٦

أوجد: أ ، ب ، هـ

الحـــــل

أ = ٨ ، $ح_{١٦}$ = ٦٨ ، ء = ؟

∴ أ + ١٥ء = ٦٨

٨ + ١٥ء = ٦٨ ∴ ١٥ء = ٦٠ ∴ ء = $\frac{٦٠}{١٥}$ = ٤

∴ المتتابعة هي: ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، .....، ٦٤ ، ٦٨

∴ أ = ١٢ ، ب = ١٦ ، هـ = ٦٤

ملاحظة: طريقة أخرى لإيجاد الحد العام للمتتالية الحسابية.

أي متتابعة حسابية يكون حدها العام في صورة

$ح_ن$ = ء ن + ت حيث ن من الدرجة الأولى ، ء هو أساس المتوالية ، مقدار ثابت

مثال: أوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية: ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، .....

الحـــــل

ء = ٥ - ٢ = ٣ ، الحد العام $ح_ن$ = ء ن + ب

ولإيجاد الثابت ب نضع $ح_ن$ = ٢ عندما ن = ١

أو $ح_ن$ = ٥ عندما ن = ٢ أو نضع $ح_ن$ = ٨ عندما ن = ٣ وهكذا ....

٢ = ٣(١) + ب ∴ ب = -١ الحد العام $ح_ن$ = ٣ن - ١

مثال: بين أي المتتابعات الآتية حسابية ثم أوجد الأساس (إذا كانت حسابية) التي حدها العام. أ

) $ح_ن$ = $\frac{٣}{٥}$ ن + ١٧ (ب) $ح_ن$ = ٧ن^{٢} + ١ ج) $ح_ن$ = ٧٢ - ٨ن

الحـــــل

أ) $ح_ن$ = $\frac{٣}{٥}$ ن + ١٧ حسابية أساسها هو معامل ن = $\frac{٣}{٥}$

ب) $ح_ن$ = ٧ن^{٢} + ١ ليست حسابية لأن ن من الدرجة الثانية

ج) $ح_ن$ = ٧٢ - ٨ن حسابية وأساسها هو معامل ن = -٨

أمثلة على تكوين المتتابعة الحسابية:

لتكوين المتتابعة يتطلب ذلك: معرفة أ ، ء أي يتم تكوين معادلتين في أ ، ء

مثال:

كون المتتابعة الحسابية التي فيها: $ح_{٥}$ = ٩ ، $ح_{٢}$ = ٣

الحـــــــل

أ + ٤ء = ٩   × ١   ⇦ (١)

أ + ء = ٣   × -١   ⇦ (٢)

بالجمـــــــــع

٣ء = ٦   ∴ ء = ٢

، ∵ أ + ء = ٣   ∴ أ + ٢ = ٣   ∴ أ = ١

∴ المتتابعة: ١ ، ٣ ، ٥ ، ....

مثال:

م.ح يزيد حدها السابع عن حدها الثاني بمقدار ٣٥ ومجموع حدودها الأول والثالث والرابع ٤٤ فما هي المتتابعة؟

الحـــــــل

ح٧ - ح٢ = ٣٥

(أ + ٦ء) - (أ + ء) = ٣٥

أ + ٦ء - أ - ء = ٣٥

٥ء = ٣٥

ء = ٣٥

، ح١ + ح٣ + ح٤ = ٤٤

أ + أ + ٢ء + أ + ٣ء = ٤٤

٣أ + ٥ء = ٤٤

ومن ١) ∴ ٣أ + ٥ × ٧ = ٤٤

٣أ = ٩   ∴ أ = ٣

مثال: م.ح حدودها موجبة فيها ح١ × ح٤ = ٤٥ ، ح٣ × ح١٠ - ح٤ × ح٧ = ٢٤

أوجد المتتابعة.

الحـــــــل

أ (أ + ٣ء) = ٤٥   ⇦ (١)

(أ + ٢ء) (أ + ٩ء) - (أ + ٣ء) (أ + ٦ء) = ٢٤   ⇦ (٢)

(أ^{2} + ١١أ ء + ١٨ء^{2}) - (أ^{2} + ٩أ ء + ١٨ء^{2}) = ٢٤

أ^{2} + ١١أ ء + ١٨ء^{2} - أ^{2} - ٩أ ء - ١٨ر^{2} = ٢٤

٢أ ء = ٢٤

∴ أ ء = ١٢   ⇦ (٣)

من المعادلة (١): أ^{2} + ٣أ ء = ٤٥   ⇦ (٤)

أ^{2} + ٣ × ١٢ = ٤٥

أ^{2} + ٣٦ = ٤٥   ∴ أ^{2} = ٩

∴ أ = ± ٣   ،   ∵ الحدود موجبة   ∴ أ = ٣

∴ أ ء = ١٢ ← ٣ء = ١٢   ∴ ء = ٤

∴ المتتابعة: ٣ ، ٧ ، ١١ ، ......

مثال:

في أي متتابعة حسابية إذا كان: $ح_م$ = ن ، $ح_ن$ = م

فأوجد كلا من الحد الأول والأساس ثم اثبت أن: $ح_{م+ن}$ = صفر

الحـــــــل

أ + (م - ١)ء = ن ⇐ (١)

، أ + (ن - ١)ء = م ⇐ (٢)

بالطـــــــرح

(م - ن)ء = ن - م   ∴ ء = $\frac{ن - م}{-(ن - م)}$ = -١

بالتعويض في (١)

∴ أ + (م - ١) × -١ = ن

∴ أ = م + ن - ١

∴ $ح_{م+ن}$ = م + ن - ١ + (م + ن - ١) × -١ = صفر

تمارين (٢٦)

(١) بين أي المتتابعات الآتية حسابية واذكر أساسها وأكتب حدودها الخمسة الأولى:

أ) ($ح_ن$) = (٢ن - ١)   ب) ($ح_ن$) = $\frac{[ن + ٣] [٢ - ن]}{٥}$

ج) ($ح_ن$) = ($\frac{٣}{ن}$ - ٢)   ء) ($ح_ن$) = ($\frac{٣ن - ٢}{٢}$)

(٢) أي المتتابعات الآتية حسابية وما هو حدها العام:

أ) (٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ....)

ب) (٣٧ ، ٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ، ....)

ج) (٠,٣ ، ٠,٣٣ ، ٠,٣٣٣ ، ....)

ء) (س ، س + أ٢ ، س + أ٥ ، .....)

(٣) أي حد في المتتابعة: -٩ ، -٥ ، -١ ، ..... يكون مساويا ٨٧ هل يوجد حد في المتتابعة = ٣٣٣

[الجواب: $ح_{٢٥}$ ، لا يوجد]

(٤) إذا كان: ٩س + ١١ص أحد حدود المتتابعة س - ص ، ٣س + ٢ص ، ٥س + ٥ص ، .... فما ترتيبه.

[الجواب: الخامس]

(٥) أوجد رتبة أول حد سالب في المتتابعة: (٤١ ، ٣٧ ، ٣٣ ، ....)

[الجواب: $ح_{١٢}$]

(٦) أوجد رتبة أول حد موجب ف المتتابعة: (-٦,٧ ، -٦,٤ ، -٦,١ ، ...)

[الجواب: $ح_{٢٤}$]

(٧) أوجد أول حد في المتتابعة الحسابية: (٨ ، ١٧ ، ٢٦ ، ...) يكون أكبر من ٤٠٠

[الجواب: ٤٥]

(٨) إذا كان: $ح_{٣ن+١}$ في المتتابعة الحسابية: (١٣ ، $١٣\frac{١}{٢}$ ، ١٤ ، ....) يساوي $ح_{ن+٢}$

في المتتابعة الحسابية (٤٦ ، $٤٤\frac{١}{٢}$ ، ٤٣ ، ....) فما قيمة ن؟

[الجواب: ٣]

(٩) إذا كونت (أ ، ٥ + ب ، ٢ب + ٢ ، ١٧) متتابعة حسابية..أوجد كلاً من أ ، ب

[الجواب: ٨ ، ٦]

(١٠) [أ ، ب ، جـ ، ء] تكون متتابعة حسابية أساسها موجب فإذا كان أ ء = $٣١\frac{١}{٢}$ ، ب جـ = ٤٤ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، جـ ، ء

[الجواب: $-١٠\frac{١}{٢}$ ، -٨ ، $-٥\frac{١}{٢}$ ، -٣ أو ٣ ، $٥\frac{١}{٢}$ ، ٨ ، $١٠\frac{١}{٢}$]

(١١) متتابعة حسابية فيها $ح_{١}$ = ٦ ، $ح_{ن}$ = ٣٣ ، $ح_{٢ن}$ = ٦٣ أوجد كل من ن ، ء وكذلك قيمة $ح_{٢ن-٣}$

[الجواب: ٥٤]

(١٢) س ، ب ، جـ ، ص أربعة حدود من متتابعة حسابية فإذا كان مجموع رتبتي الحديد ب ، جـ فاثبت أن: س + ص = ب + جـ

(١٣) متتابعة حسابية حدودها موجبة..فإذا كان حاصل ضرب الحد الأول في الحد الخامس يساوي ٥٧ وكان حاصل ضرب الحد الثاني في الحد السابع يزيد عن حاصل ضرب الحد الثالث في الحد الرابع بمقدار ٢٤ فأوجد الحد الأول والأساس.

[الجواب: ٣ ، ٤]

(١٤) في أي متتابعة حسابية إذا كان: $ح_{م}$ = ن ، $ح_{ن}$ = م فأوجد كلا من الحد الأول والأساس..ثم اثبت أن $ح_{م+ن}$ = صفر

(١٥) متتابعة حسابية حدها الأول ٣ فإذا كان $ح_{ن-١}$ = ١٧ ، $ح_{٢ن-٥}$ = ٢٧ فما قيمة ن وما هي المتتابعة.

[الجواب ن = ٩ ، المتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)]

الوسـط الحسابـي

* الوسط الحسابي للعددين أ ، ب هو $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{2}$

* إذا كانت أ ، ب، جـ في تتابع حسابي فإن : ب = $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{2}$

حالات خاصة:

يستحسن الغرض التالي في الحالات الآتية:

الأعداد الفردية	الأعداد الزوجية
١) ثلاثة أعداد في توالي عددي أ - ء ، أ ، أ + ء ٢) خمسة أعداد في توالي عددي (أ - ٢ء) ، (أ - ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٢ء) الأساس = ء.	١) أربعة أعداد في توالي عددي (أ - ٣ء) ، (أ - ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٣ء) ٢) ستة أعداد في توالي عددي (أ - ٥ء) ، (أ - ٣ء) ، (أ - ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٣ء) ، (أ + ٥ء).

ملاحظة:

لإيجاد عدد م من المتوسطات الحسابية بين العددين ا ، ب فإن: ء = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{م} + 1}$

مثال:

أوجد المتوسطات الحسابية الخمسة بين ٤ ، ٢٢

الحـــــل

أ = ٤ ب = ٢٢

∴ ء = $\frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{م} + 1} = \frac{22 - 4}{5 - 1} = \frac{18}{6} = 3$

∴ الأوساط ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٩.

مثال: إذا كانت أ ، ٧، ....، ب ، ٢٥ في توالي عددي

وكان ب = ٥أ + ٢ فأوجد المتتابعة ثم أوجد عدد حدودها.

الحـــــل

ء = ٧ - أ ، ء = ٢٥ - ب

∴ ٧ - أ = ٢٥ - ب

∴ ب - أ = ١٨ ⇦ (١)

ب - ٥أ = ٢ ⇦ (٢)

بالطـــــرح

∴ الأوساط هي ٢٧ ، ٣٠ ، ٣٣ ، ....، ٨٤

الوسط الأول ↓ ... ↓ الوسط الأخير

مثال: إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٩ ، ٤٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الآخرين إلى مجموع الوسطين الأولين هي ٣: ١ فما هو عدد الأوساط؟

الحـــــــل

٩ | أول وسطين | أخر وسطين | ٤٥

(٤٥ – ٢ء) (٤٥ – ء)

٩ + ء ٩ + ٢ء

مجموع الوسطين الآخرين / مجموع الوسطين الأولين = ٣ / ١

(٤٥ – ء + ٤٥ – ٢ء) / (٩ + ء + ٩ + ٢ء) = ٣ / ١

٥٤ + ٩ء = ٩٠ - ٣ء ⇐ ٩ء + ٣ء = ٩٠ - ٥٤

∴ ١٢ء = ٣٦ ∴ ء = ٣

∴ المتتابعة هي ٣ ، ٦ ، ٩،.................. ٤٥

أ = ٩ ، ء = ٣ ، ل = ٤٥ ، ن = ؟

ل = أ + (ن - ١) ء

٤٥ = ٩ + (ن - ١) × ٣

٣ن + ٦ = ٤٥ ⇐ ٣ن = ٣٩

ن = ١٣

∴ عدد الأوساط ن - ٢ = ١٣ - ٢ = ١١

ملاحظة: إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها فردي ن مثلاً فإن رتبة الحد

الأوسط = (ن – ١) / ٢

∴ الحد الأوسط = (ح + ١) / ٢ وهو أيضاً وسط حسابي بين أ ، ل

∴ الوسط الحسابي = (أ + ل) / ٢

أما إذا كان عدد الحدود (ن) زوجي فإنه يوجد حدين أو وسطين رتبتهما:

$\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}$ + ١   ∴ الحدين الأوسطين $ح_{\frac{ن}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$

حيث $ح_{\frac{ن}{٢}}$ ، $ح_{\frac{ن}{٢}+١}$ = أ + ل

<u>مثال:</u> متتابعة حسابية عدد حدودها ١٥ حداً ومجموع حدودها الثلاثة الوسطى ٥١ ومجموع حدودها الثلاثة الأخيرة ١٢٣ أوجد حدودها الثلاثة الأولى.

الحـــــــل

∵ المتتابعة عدد حدودها فردي

رتبة الحد الأوسط = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{١٥ + ١}{٢}$ = ٨

∴ الحدود الثلاثة الوسطى هي $ح_٧$ ، $ح_٨$ ، $ح_٩$

∴ أ + ٦ء + أ + ٧ء + أ + ٨ء = ٥١

٣أ + ٢١ء = ٥١   ⇦   (١)

، الحدود الثلاثة الأخيرة هي $ح_{١٣}$ ، $ح_{١٤}$ ، $ح_{١٥}$

∴ أ + ١٢ء + أ + ١٣ء + أ + ١٤ء = ١٢٣

أ + ١٣ء = ٤١   ⇦   (٢)

بحل المعادلتين ١ ، ٢

أ + ٧ء = ١٧

أ + ١٣ء = ٤١

-٦ء = -٢٤   ∴ ء = ٤

بالتعويض في (١) ∴ أ + ٢٨ = ١٧   ∴ أ = ١٧ - ٢٨ = -١١

∵ الأعداد الثلاثة الأولى هي: -١١ ، -٧ ، -٣،.............

<u>تمارين (٢٧)</u>

١) إذا كان $أ^٢$ +١، $٢أ^٢$ + ا + ٣ هي الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة الحسابية: أوجد المتتابعة.

[الجواب (٥ ، ٩ ، ١٣، ....) أو (٢ ، ٣ ، ٤،........)]

٢) إذا كان الوسط الحسابي بين س ، ص هو ١٢، الوسط الحسابي بين ٥س ، ٣ص هو ٤٥ فأوجد قيمة كل من س ، ص.

[الجواب ٩ ، ١٥]

٣) إذا كان أ ، ب ، ٢جـ في تتابع حسابي وكان ٢ب ، ٣جـ ، ء في تتابع حسابي فأثبت أن ٣أ ، ٢ب ، ء في تتابع حسابي.

$٤أ = ١٦$ ⇦ $أ = ٤$

∴ $ب = ١٨ + أ = ١٨ + ٤ = ٢٢$

∴ المتتابعة هي: ٤ ، ٧ ،.........، ٢٢ ، ٢٥

$ح_ن = أ + (ن - ١) ء$

$٢٥ = ٤ + (ن - ١) ٣$ ∴ $٢٤ = ٣ن$ ∴ $ن = ٨$

∴ عدد الحدود المتتابعة = ٨

مثال:

إذا أخذنا الحدود التي رتبتها تقبل القسمة على ٥ من متتابعة حسابية فهل الحدود الناتجة تكون متتابعة حسابية.

الحـــــــل

$ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ح_٤ ، ح_٥ ، ح_٦$: .... ، $ح_{١٠}$ ، ......

$ح_٥ = أ + ٤ء$ $ح_{١٠} = أ + ٩ء$

$ح_{١٥} = أ + ١٤ء$ $ح_{٢٠} = أ + ١٩ء$

$ح_{٢٥} = أ + ٢٤ء$

الأساس = $ح_{١٠} - ح_٥ = أ + ٩ء - أ - ٤ء = ٥ء$

$ح_{٢٠} - ح_{١٥} = ح_{٢٥} - ح_{٢٠} = ٥ء$

∴ متتابعة حسابية.

مثال:

عددان صحيحان موجبان الفرق بينهما ٢٠ والوسط الحسابي لهما ٩ فما العددان؟

الحـــــــل

نفرض العددان هما أ ،ب

∴ $أ - ب = ٢$ ⇦ (١)

$\frac{أ + ب}{٢} = ٩$ ⇦ (٢)

∴ $أ + ب = ١٨$ ⇦ (٣)

$٢أ = ٢٠$ ∴ $أ = ١٠$ ، $ب = ٨$

مثال:

إذا كان س ، ص وسطين حسابيين بين أ ، ب أثبت أن:

$٩س ص = (٢أ + ب) (أ + ٢ب)$

الحـــــل

أ   س   ص   ب

الحدود هي ⇐ أ   أ + ء   أ + ٢ء   أ + ٣ء

∴ الطرف الأيمن:

٩س ص = ٩ (أ + ء) (أ + ٢ء)

الطرف الأيسر:

(٢أ + ب) (أ + ٢ب) = (٢أ + أ + ٣ء) (أ + ٢أ + ٦ء)

= (٣أ + ٣ء) (٣أ + ٦ء)

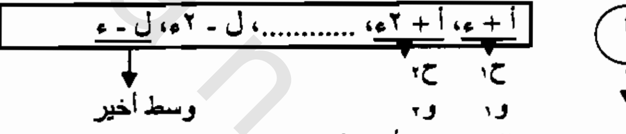
= ٣(أ + ء) × ٣(أ + ٢ء)

= ٩(أ + ء) (أ + ٢ء)

∴ الطرفان متساويان.

إدخال عدة أوساط حسابية بين عددين

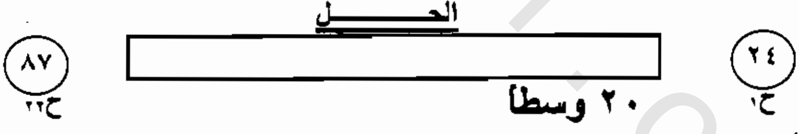
إذا كان أ الحد الأول، ل الحد الأخير فإنه يمكن كتابة المتتابعة بالصورة



* عدد الحـــدود = ٢ + عدد الأوساط
* لإيجاد ء نستخدم ل = أ + (ن - ١) ء

مثال: أدخل ٢٠ وسطاً حسابياً بين ٢٤ ، ٨٧

الحـــــل



الأوساط والعددين تكون متتابعة حسابية

عدد حدودها= ٢٠ + ٢ = ٢٢

∴ ح١ = ٢٤ ← أ = ٢٤

، ح٢٢ = ٨٧ ← أ + ٢١ء = ٨٧ بالطرح

∴ ٢٤ + ٢١ء = ٨٧ ⇐ ٢١ء = ٨٧ - ٢٤

∴ ء = $\frac{٦٣}{٢١}$ ⇐ ء = ٣

٤) أدخل ١٥ وسطاً حسابياً بين ٧٨ ، ٣٠ .

[الجواب ٧٥ ، ٧٢ ،.....، ٣٣]

٥) أدخل ن وسطاً حسابياً بين ١ ، $ن^{٢}$.

[الجواب ن ، ٢ن-١ ، ٣ن-٢،....، $ن^{٢}$- ن+١]

٦) إذا كانت ص وسط حسابي بين س ، ع فاثبت أن $\frac{ص + ٢ع}{ص - س}$ ، $\frac{ص + ٢س}{ع - ص}$ = ٤

٧) إذا أدخلنا بين ١ ، ٣٧ عدة أوساط حسابية عددها ن وكانت النسبة بين الوسط الخامس والوسط الذي ترتيبه (ن - ٢) هي ٤ : ٧ فما قيمة ن؟

[الجواب ١١]

٨) إذا أدخل ن عن الأوساط الحسابية بين ١ ،٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط قبل الأخير = فما قيمة ن وما هي الأوساط؟

[الجواب (١٤)، ٣ ، ٥ ، ٧ ،..........، ٢٩)]

٩) إذا كونت أ ،ب ،جـ متتابعة حسابية وكونت $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{ب}$ ، $\frac{١}{هـ}$ متتابعة حسابية أخرى

(حيث كل من أ ، ب ، هـ = صفر) فاثبت أن:

أولاً: جـ = ٢ب ـ أ   ثانياً: هـ = $\frac{أ ب}{٢أ - ب}$

ثالثاً: $\frac{جـ}{هـ}$ = ٥ - ٢ $\left(\frac{أ}{ب} + \frac{ب}{أ}\right)$

١٠) اثبت أنه إذا كانت الأعداد $\frac{٢}{ب + جـ}$ ، $\frac{٢}{جـ + أ}$ ، $\frac{٢}{أ + ب}$ تكون متتابعة حسابية فإن الأعداد $أ^{٢}$ ، $ب^{٢}$ ، $جـ^{٢}$ تكون متتابعة حسابية.

مجموع ن من حدود متتابعة حسابية

* إيجاد مجموع متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل وعدد حدودها ن:

جـ ن = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) +........+ (ل - ٢ء) + (ل - ء) + (ل) ⇦ (١)

بكتابة الطرف الأيسر في (١) معكوساً

جـ ن = ل + (ل - ء) + (ل - ٢ء).........+ (أ + ٢ء) + (أ + ء) + أ ⇦ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ ٢ جـ ن = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) +...........+ (أ + ل)

∴ ٢جـ ن = ن (أ + ل)

∴ جـ ن = $\frac{ن}{٢}$(أ + ل)

* إيجاد مجموع متتابعة حسابية حدها الأول (أ) وأساسها ء وعدد حدودها ن

∵ ل = أ + (ن-١)ء ⇦ (١)

، ∴ جـ ن = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ⇦ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ جـ ن = $\frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن-١) ء]

∴ جـ ن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١) ء]

مثال:

أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٣٢ ومجموع مربعاتها ٣٣٦ أوجد هذه الأعداد.

الحـــــــل

بفرض الأعداد (أ - ٣ء) ، (أ-ء) ، (أ + ء) ، (أ + ٣ء)

∴ مجموعها (أ - ٣ء) + (أ -ء) + (أ +ء) + (أ + ٣ء) = ٣٢

∴ ٤أ = ٣٢ ∴ أ = ٨ ⇦ (١)

، مجموع مربعاتها:

(أ - ٣ء)^{٢} + (أ - ء)^{٢} + (أ + ء)^{٢} + (أ + ٣ء)^{٢} = ٣٣٦

أ^{٢} -٦أء + ٩ء^{٢} + أ^{٢} -٢أء +ء^{٢} + أ^{٢} + ٢أء + ء^{٢} + أ^{٢} + ٦أء + ٩ء^{٢} = ٣٣٦

∴ ٤أ^{٢} + ٢٠ ء^{٢} = ٣٣٦

٢أ^{٢} + ١٠ ء^{٢} = ١٦٨ ⇦ (٢)

نعوض عن أ = ٨ في (٢) ∴ ١٢٨ + ١٠ ء^{٢} = ١٦٨

$\therefore$ ء^{٢} = ٤ $\qquad\qquad$ $\therefore$ ء = $\pm$ ٢

$\therefore$ الاعداد (٨ - ٦) ، (٨ - ٢) ، (٨ + ٢) ، (٨ + ٦)

ء = ٢ $\qquad$ ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤

ء = -٢ $\qquad$ ١٤ $\quad$ ١٠ $\quad$ ٦ $\quad$ ٢

<u>ملاحظة:</u>

في بعض التمارين يذكر التعبير التالي

أوجد أصغر عدد من الحدود ليكون المجموع سالب.

أو أكبر عدد من الحدود ليكون المجموع موجب.

<u>مثال:</u>

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتابعة ٨٩ ، ٨١ ، ٧٣.......... ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالباً.

<u>الحـــــــــل</u>

الأساس = ٨١ - ٨٩ = -٨

بفرض أن عدد الحدود = ن

$$\because \text{جـ} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + (\text{ن} - ١)\text{ء}\right]$$

$$\text{صفر} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢ \times ٨٩ + (\text{ن} - ١) \times -٨\right]$$

$$= \frac{\text{ن}}{٢}\left[١٨٦ - ٨\text{ن}\right]$$

$\therefore$ ٨ن = ١٨٦ $\qquad$ $\therefore$ ن = $٢٣\frac{١}{٤}$ $\qquad$ $\therefore$ **أصغر عدد من الحدود = ٢٤ حداً**

<u>استنتاج:</u> في أي متتابعة حسابية يكون: $ح_{ن} = جـ_{ن} - جـ_{ن-١}$

<u>مثلاً:</u> $ح_{٥} = جـ_{٥} - جـ_{٤}$ ، $ح_{٧} = جـ_{٧} - جـ_{٦}$

<u>مثال:</u>

إذا كان مجموع ن من حدود متتابعة حسابية يتعين بالقانون

$$جـ_{ن} = \frac{٣}{٤}\text{ن}(١٧ - \text{ن}) \text{ فأوجد:}$$

أ) الحد التاسع من المتتابعة.

ب) عدد الحدود اللازم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٣٩.

الحـــــل

$جـ_ن = \frac{٣}{٤}$ ن (١٧ - ن)

، $ح_ن = جـ_ن - جـ_{ن-١}$

∴ $ح_٩ = جـ_٩ - جـ_٨$

$= \frac{٢٧}{٤} [١٧ - ٩] - \frac{٢٤}{٤} [١٧ - ٨] =$ صفر

$= [\frac{٢٧}{٤} \times ٨] - [٦ \times ٩]$

$ح_٩ = ٥٤ - ٥٤ =$ صفر

مثال:

إذا كان الحدان الأول والثامن من متتابعة حسابية هما ٣,٥ ، ٨,٥ أوجد الحدود الستة التي تظهر بين هذين الحدين بحيث تكون الحدود الثمانية في توالي عددي.

الحـــــل

$ح_١(أ) = ٣\frac{١}{٢}$ ، $ح_٨ = ٨\frac{١}{٢}$

المطلوب $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_٥$ ، $ح_٦$ ، $ح_٧$

لإيجاد أساس المتوالية الحسابية $ح_٨ =$ أ + ٧ء

∴ $٨ = ٣\frac{١}{٢} + ٧ء$ ∴ ٧ء = ٥ ∴ $ء = \frac{٥}{٧}$

الحد الثاني $(ح_٢) =$ أ + ء $= ٣\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٧} = \frac{٥٩}{١٤}$

، $ح_٣ =$ أ + ٢ء $= ح_٢ +$ ء $= \frac{٥٩}{١٤} + \frac{٥}{٧} = \frac{٦٩}{١٤}$

وهكذا بقية الحدود

$ح_٤ = \frac{٧٩}{١٤}$ ، $ح_٥ = \frac{٨٩}{١٤}$ ، $ح_٦ = \frac{٩٩}{١٤}$ ، $ح_٧ = \frac{١٠٩}{١٤}$

مثال:

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ٣٠٠ والتي تقبل القسمة على ٧

الحـــــل

الأعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على ٧ هي: ٧ ، ١٤ ، ٢١ ،......، ٢٩٤ والعدد ٢٤٩ هو آخر عدد يقبل القسمة على ٧ ويقل عن ٣٠٠

لأن $\frac{٣٠٠}{٧}$ = ٤٢,٨٥ بضرب الجزء الصحيح من العدد في ٧

فنحصل على ٤٢ × ٧ = ٢٩٤

∴ $ح_١$ = ٧ ، ء = ٧ ، $ح_ن$ = ٢٩٤

∴ نوجد ن ∴ $ح_ن$ = أ + (ن -١) ء

∴ ٢٩٤ = ٧ + (ن -١) ٧ بالقسمة على ٧

∴ ٤٢ = ١ + (ن - ١) ∴ ن = ٤٢

∴ مجموع الأعداد $جـ_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

= [٧ + ٢٩٤] = ٦٣٢١

مثال: إذا كان في متتابعة حسابية الحد الأول $ح_١$ = ٣ ومجموع الحدود الثلاثة الأولى = مجموع الستة حدود الأولى اثبت أن: $جـ_ن$ = $\frac{٣ن}{٨}$ (٩ - ن)

الحـــــل

$ح_١$ = ٣ ، $جـ_٣$ = $جـ_٦$

$جـ_٣$ = $\frac{٣}{٢}$ [٦ + (٢ - ١) ء] = (٦ + ٢ء)

$جـ_٦$ = $\frac{٦}{٢}$ [٦ + (٦ - ١)ء] = ٣ (٦ + ٥ء)

، $جـ_٣$ = $جـ_٦$

∴ ٣(٦ + ٥ء) = $\frac{٣}{٢}$ (٦ + ٢ء) بالضرب في ٢

١٢ + ١٠ء = ٦ + ٢ء ∴ ٨ ء = -٦

$\therefore$ ء = $\frac{-٣}{٢}$

بالتعويض في جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن - ١)ء]

$\therefore$ جـن = $\frac{ن}{٢}$ [٦ + $\frac{٣}{٤}$ (ن - ١)]

= $\frac{ن}{٢}$ [٦ - $\frac{٣}{٤}$ن + $\frac{٣}{٤}$] = $\frac{ن}{٢}$ [$\frac{٢٧}{٤}$ - $\frac{٣}{٤}$ن]

= $\frac{ن}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$ [٩ - ن] = $\frac{٣ن}{٤}$ (٩ - ن)

مثال: إذا كان م ، هـ هما الحدين الثاني والرابع في متتابعة حسابية فأوجد حدها الأول والثالث ومجموع الحدود العشرة الأولى منه.

الحـــــل

ح٢ = م ، ح٤ = هـ

، $\because$ ح٤ - ح٢ = ٢ء

$\therefore$ ء = $\frac{١}{٢}$ (هـ - م)

الحد الأول: ح١ = ح٢ - ء = م - $\frac{١}{٢}$ (هـ - م)

= م - $\frac{١}{٢}$ هـ + $\frac{١}{٢}$ م = $\frac{٣}{٢}$ م - $\frac{١}{٢}$ هـ

$\therefore$ ح١ = $\frac{١}{٢}$ (٣م - هـ)

الحد الثالث: ح٣ = ح٢ + ء

= م + $\frac{١}{٢}$ (هـ - م)

= م + ١/٢ هـ - ١/٢ م = ١/٢ (م + هـ)

الحد العاشر: ح١٠ = ح١ + ٩ء

= ١/٢ (٣م - هـ) + ٩ × ١/٢ (هـ - م)

= ٣/٢ م - ١/٢ هـ + ٩/٢ هـ - ٩/٢ م

= ٤ هـ - ٣م

مجموع الحدود العشرة الأولى جـ١٠ = ١٠/٢ [أ + ل]

= ٥ [١/٢ (٣م - هـ) + (٤هـ - ٣م)]

= ٥ [٩/٢ هـ - ٣/٢ م] = ٥/٢ [٩هـ - ٣م]

مثال:

كم حدا تؤخذ من المتتابعة ١٣ ، ١١ ، ٩ +........لكي يكون المجموع ٤٥ م فسر وجود جوابين.

الحـــل

أ = ١٣ ، ء = -٢ ، جـن = ٤٥ والمطلوب ن

جـن = ن/٢ [٢أ + (ن - ١)ء]

٤٥ = ن/٢ [٢×١٣ + (ن - ١)(-٢)] بالضرب في ٢

٩٠ = ن [٢٦ - ٢ن +٢]

٩٠ = ٢٨ن - ٢ن٢ بالقسمة على ٢

ن٢ - ١٤ن + ٤٥ = ٠

(ن - ٩) (ن - ٥) = ٠

أما ن = ٩   أو   ن = ٥

التفسير للجوابين:-

عندما ن = ٥ تكون الحدود

١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ومجموعهما ٤٥

وعندما ن = ٩ يكون الحدود

١٣ ، ١١ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، -١ ، -٣ ومجموعهما ٤٥

مثال:

متتابعة حسابية حدها الثالث ٢٥ والخامس ١٧ أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

الحل

ا = ٢٥   ح٥ = ١٧

∴ أ + ٢ء = ٢٥   ⇦   (١)

أ + ٤ء = ١٧   ⇦   (٢)

بالطرح

-٢ء = ٨   ∴ ء = -٤

لإيجاد أ نعوض في (١)

∴ أ + ٢ (-٤) = ٢٥   ∴ أ = ٣٣

مجموع الحدود العشرة الأولى:

جن = (ن/٢) [٢أ + (ن- ١)ء]

= (١٥/٢) [٢×٣٣ + (١٠ - ١) (-٤)] = ١٥٠

والمتتابعة هي: ٣٣ ، ٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ١٣ ، ٩ ، ٥ ، ١ ، -٣

وكما هو واضح الحد الثالث هو ٢٥ والخامس ١٧ ومجموع حدودها ١٥٠.

مثال:

بدأ رجل حياته العملية بمرتب سنوي قدره ٣٠٠٠ جنيه واستمر يحصل علاوة سنوية قدرها ٢٠٠ جنيه حتى صار راتبه السنوي ٦٠٠٠ جنيهاً ولم يتغير راتبه بعد ذلك إلى أن أمضى ٢٥ سنة في العمل. احسب مجموع المبالغ التي حصل عليها فعلاً وإذا بدأ الرجل بالمرتب الأول نفسه وهو ٣٠٠٠ جنيه في السنة فما مقدار العلاوة التي تصرف له كل سنة طول مدة خدمته وهي ٢٤ سنة لكي يحصل على نفس مجموع المبالغ التي حصل عليها فعلاً.

الحل

راتب الرجل ٣٠٠٠ ، (٣٠٠٠ + ٢٠٠) ، (٣٠٠٠ + ٤٠٠) + (.......، ٦٠٠٠

نوجد متى وصل راتبه إلى ٦٠٠٠ أي حن = ٦٠٠٠

∴ ٦٠٠٠ = أ + (ن - ١) ء

= ٣٠٠٠ + (ن - ١) × ٢٠٠ = ٦٠٠٠

٢٠٠ن + ٢٨٠٠ = ٦٠٠٠

∴ ن = ١٦

مجموع المبالغ التي حصل عليها = جـ١٦ + ٩×٦٠٠٠

= ١٦/٢ [٢×٣٠٠٠ + ١٥×٢٠٠] + ٩×٦٠٠٠

= ٨[٦٠٠٠ + ٣٠٠٠] + ٩×٦٠٠٠

= ٧٢٠٠٠ + ٥٤٠٠٠ = ١٢٦٠٠٠ جنيه

نوجد العلاوة التي تستمر معه طوال حياته

نضع جـ٢٥ = ١٢٦٠٠٠

= ٢٥/٢ [٢×٣٠٠٠ + ٢٤×ء] = ١٢٦٠٠

= ٢٥/٢ [٦٠٠٠ + ٢٤ء] = ١٢٦٠٠٠

= ٧٥٠٠٠ + ٣٠٠٠ء = ١٢٦٠٠٠

٣٠٠٠ء = ٥١٠٠٠

∴ ء = ٥١٠٠٠/٣٠٠٠ = ١٧٠ جنيه.

تمارين (٢٨)

١) أوجد مجموع ن حداً الأولى من المتتابعة (حن) = (٩ن - ٥)

[الجواب: ن/٢ (٩ن - ١)]

٢) كم حداً تؤخذ من المتتابعة (٣٦ ، ٣٢ ، ٢٨ ،........) ليكون مجموعها ١٧٦؟

فسر معنى وجود جوابين [الجواب: ٨ أو ١١]

٣) بأي حد من حدود المتتابعة (٩ ، ١١ ، ١٣ ،.....) نبدأ ليكون مجموع ١٥ حداً منها ٤٦٥؟

[الجواب الحد الخامس]

٤) متتابعة حسابية حدها الأول ٤ وأساسها ٣ وعدد حدودها ٢٠ حداً أوجد:

(أولاً) مجموع حدودها الفردية الرتبة. [الجواب: ٣١٠]

(ثانيا) مجموع حدودها الزوجية الرتبة. [الجواب: ٣٤٠]

٥) أوجد المتتابعة الحسابية التي مجموع العشرة حدود الأولى منها يساوي ١٠٠ ومجموع العشرة حدود التالية يساوي ٣٠٠. [الجواب: (١ ، ٣ ، ٥ ،....)]

٦) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٥ ، ٩ ، ١٣ ،.....) ليكون المجموع أكبر من ٥٠٠. [الجواب: ١٦حداً]

٧) في المتتابعة (٤ ، ٨ ، ١٢ ،.....ز) أوجد:

(أولا) عدد الحدود اللازم أخذها بحيث يكون نسبة مجموع الثلث الأول منها إلى باقي الحدود كنسبة ٢ : ١٥ [الجواب: ٣٣ حداً]

(ثانيا) عدد الحدود اللازم أخذها بحيث ينقص مجموع الثلث الأول عن مجموع باقي الحدود بقدر ١٤٢٠ [الجواب: ٣٠ حداً]

٨) اثبت أن $(ح_ن)$ = [لو س ص$^{ن-١}$] متتابعة حسابية حيث س ، ص $\in$ ح$^+$ وإذا كانت س = ٧٢٩٠ ، ص = ١/٣ فأوجد مجموع الثلاثة عشر حداً الأولى من هذه المتتابعة بدون استخدام الجداول. [الجواب: ١٣]

٩) خزان به ٣٢٥٥ جالوناً من الماء يتسرب منه أول يوم ٧ جالونات وفي اليوم الثاني ١٤ جالوناً وفي اليوم الثالث ٢١ جالوناً وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغاً

[الجواب: ٣٠]

١٠) طريق مستقيم طوله ٢٩٧ متراً سارت دراجتان في الطريق حيث ابتدأتا الحركة في لحظة واحدة إحداهما من أول الطريق والأخرى من نهايته في اتجاهين متضادين فإذا كانت الدراجة الأولى تقطع ٢١ متراً في الثانية الأولى و١٩ متراً في الثانية الثانية و ١٧ متراً في الثانية الثالثة هكذا أما الدراجة الثانية فتقطع ٣٢ متراً في الثانية الأولى و٢٩ متراً في الثانية و٢٦ متراً في الثالثة وهكذا......فما هو الزمن الذي بعده تتقابلان والمسافة التي تقطعها كل منهما......

[الجواب: ٩ ثانية، ١١٧ ، ١٨٠ متراً]

تمارين عامة على المتتابعة الحسابية:

١) ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعهما ٢٧ ومجموع مربعاتها ٢٥١ فما هي الأعداد؟ [الجواب: ٧ ، ٩ ، ١١]

٢) مجموع أربعة أعداد مكونة لمتتابعة حسابية ٢٠ ونسبة حاصل ضرب العدد الأول في العدد الرابع إلى حاصل ضرب الثاني في الثالث = ٢ : ٣ فما هي الأعداد؟

[الجواب: ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨]

٣) إذا كان جـن هو مجموع حدود عددها ن من متتابعة حسابية وكان جـ٣ = ١٥ ، جـ٥ = ٣٥ فأوجد المتتابعة ثم اثبت أن: جـ$_{ن+١}$: جـ$_{ن-١}$ = (ن + ٣) : (ن - ١)

[الجواب(٣ ، ٥ ، ٧ ،...)]

٤) متتابعة حسابية نسبة الحد الحادي عشر إلى الحد السادس فيها كنسبة ٣ : ١ فإذا كان مجموع العشرة الحدود الأولى ٤٠ فأوجد هذه المتتابعة وكم حداً يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٦٠؟

[الجواب: (-٥ ، -٣ ، -١ ،.......، ١٦ حداً]

٥) متتابعة حسابية أساسها ٢ ومجموع ن من حدودها الأولى ٣٢٠ ومجموع ٢ن من حدودها الأولى ١١٥٢ أوجد هذه المتتابعة؟ [الجواب(٥ ، ٧ ، ٩ ،.........)]

٦) اقترض تاجر مبلغاً من مصرف وتعهد بسداده على ٤٠ قسطا شهريا تكون متتابعة حسابية وبعد أن سدد القسط الخامس عشر وجد أن الباقي عليه للمصرف يساوي $\frac{٩}{٤٠}$ مما سدده وبعد أن سدد القسط الخامس والعشرين مباشرة وجد أن الباقي عليه للمصرف ٥٥٥٠ جنيهاً..أوجد الأقساط الثلاثة الأولى.

[الجواب:٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠]

٧) إذا كان مجموع ن من حدود متتابعة حسابية يتعين بالقانون:جـن = $\frac{٣}{٤}$ ن(٧ - ن)

فأوجد (أولا) الحد التاسع من المتتابعة.

(ثانيا) عدد الحدود اللازم أخذها ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٣٩.

[الجواب: صفر ، ٤ أو ١٣]

٨) كم حداً تؤخذ من المتتابعة (١٢ ، ٩ ، ٦ ،.....) ابتداء من الحد الأول ليكون النسبة بين مجموع الثلث الأول من حدودها إلى مجموع باقي حدودها كنسبة -٢ : ١١.

[الجواب: ١٥]

٩) أوجد مجموع ن حدا من المتتابعة $(ح_ن)$ = $(لو ٢ × ٣^{ن})$

[الجواب: لو$(٢^{ن} × ٣^{٢})$]

١٠) في الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٢٠٠ ، ٤٠٠ أوجد:

(أولاً) مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ٣. [الجواب: ٢٠١٠٠]

(ثانياً) مجموع الأعداد التي لا تقبل القسمة على ٣. [الجواب: ٣٩٦٠٠]

١١) اثبت أنه في أي متتابعة حسابية يكون $ح_ن$ = $جـ_ن$ - $جـ_{ن-١}$ وأن الأساس هذه المتتابعة = $جـ_{ن+٢}$ - ٢$جـ_{ن+١}$ + $جـ_ن$.

١٢) بدأ رجل عمله براتب سنوي ٤٨٠ جنيها وكان يأخذ علاوة سنوية قدرها ١٨ جنيها فكم يصبح راتب السنوي بعد ١٥ سنة وما مجموع ما يكون قد تقاضاه من مرتبات طوال هذه المدة؟ [الجواب: ٧٣٢ ، ٩٠٩٠ جنيها]

١٣) متتابعة حسابية فيها $ح_{ن+١}$ = ٢٢ ، $ح_{ن-١}$ = ١٠ ، $ح_{٢ن+١}$ = ٣٤ أوجد المتتابعة واوجد مجموع ٣ن حداً من حدودها. [الجواب: (٤ ، ٧ ، ١٠ ،.....) ، ٣٧٥]

١٤) اثبت أن: $[١+٢+٣+......+ن]^{٢}$ - $[١+٢+٣+......+(ن-١)]^{٢}$ = $ن^{٣}$

١٥) اثبت أن: ١-٢+٣-٤+........إلى ٢ن حداً = -ن.

١٦) متتابعة حسابية مجموع الستة الحدود الأولى منها يساوي ١٥٩ ومجموع السبعة حدود التالية لها يساوي ٤٩ أوجد هذه المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من الحدود يمكن أخذه ابتداء من حدها الأول ليكون المجموع سالباً.

[الجواب(٣٤ ، ٣١ ، ٢٨ ،........) ، ٢٤ حداً]

١٧) متتابعتان حسابيتان تشتركان في الحد الأول فإذا كان الحد الخامس من المتتابعة الأولى يساوي الحد التاسع من المتتابعة الثانية.. فاثبت أن الحد السابع من المتتابعة الأولى يساوي الحد الثالث عشر من المتتابعة الثانية.

١٨) اثبت أن لو س ، لو س ص ، لو س $ص^{٢}$ ،......متتابعة حسابية وإذا كانت س = ١٦٠ ، ص = $\frac{١}{٢}$ فاثبت أن مجموع التسعة حدود الأولى من هذه المتتابعة يساوي ٩ بدون استخدام الجداول.

١٩) متتابعة حسابية حدها الخامس عشر يساوي ٦٤ وحدها التاسع وسط متناسب بين الحد الرابع والحد التاسع عشر.. أوجد هذه المتتابعة ثم أوجد مجموع الحدود الخمسة عشر الأولى منها. [الجواب: (٨ ، ١٢ ، ١٦ ،......) ، ٥٤٠]

٢٠) متتابعة حسابية حدها الأول ١٣ والوسط الحسابي بين حديها الثاني والأخير يساوي -٧ ومجموع حدودها -٥٠ أوجد أساسها وعدد حدودها.

[الجواب: -٤ ، ١٠]

٢١) في المتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ،.....) اثبت أن ح١ − ح٢ + ح٣ − .....إلى ن حداً = ن٢.

٢٢) كون متتابعة حسابية بإدخال ١٦ وسطاً حسابياً بين -١٢ ، $\frac{١}{٢}$١٣ ثم أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليصبح مجموعها ٦ أمثال حدها الرابع عشر واثبت أن الحدود الثلاثة الأخيرة من هذه الحدود لها نفس المجموع.

[الجواب(-١٢ ، -$\frac{١}{٢}$١٠ ، -٩ ،....) ، ٢٠]

٢٣) إذا كانت س ، ص ، ع ثلاثة أوساط حسابية بين ب ، جـ فاثبت أن:

٣س - ص + ع = ٢ب + جـ

٢٤) اقتصد تاجر في سنة ما ٢٠٠ جنيه وأخذ يقتصد كل سنة ١٠٠ جنيه زيادة على ما يقتصده في السنة السابقة..فبعد كم سنة يصبح مجموع ما يقتصده ١٧٠٠٠ جنيه.

[الجواب: ١٧]

٢٥) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ ومجموع الحدود الثلاثة الوسطى ١٢٩ ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة = ٢٣٧ أوجد الحدود الثلاثة الأولى.[الجواب: ٣ ، ٧ ، ١١]

٢٦) ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢٤ وإذا طرح من العدد الأوسط ٢ كونت مقلباتها متتابعة حسابية أخرى فما هي هذه الأعداد...وإذا رتبت هذه الأعداد تنازلياً بحسب قيمتها مكونة المتتابعة حسابية فأوجد كم حداً من حدودها ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها -١٢٠.

[الجواب: ٤ ، ٨ ، ١٢ أو ١٢ ، ٨ ، ٤ ، ١٢ حداً]

٢٧) إذا كان أحد حدود المتتابعة (١ ، ٣ ، ٥ ،.....) وسطاً متناسباً بين الحدين الثالث والعشرين والثالث والستين فيها فأوجد رتبة هذا الحد ثم أوجد عدد الحدود ابتداء من الحد الأول التي مجموعها مساوياً $\frac{١}{٤}$ مجموع العشرين حداً الأولى في المتتابعة.

[الجواب: ح٣٨ ، ١٠]

٢٨) متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ حداً فإذا كان الحد الأوسط = ١٣ ومجموع الحدود التالية لهذا الحد = ١٢ مرة مجموع الحدود السابقة له فأوجد هذه المتتابعة.

[الجواب(-٧ ، -٥ ، -٣ ،....)]

٢٩) بدأ رجل عمله بمرتب سنوي قدره ٤٠٠ جنيه واستمر يحصل على علاوة سنوية قدرها ٢٠ جنيهاً حتى صار راتبه السنوي ٦٤٠ جنيهاً ..ولم يتغير راتبه السنوي بعد ذلك إلى أن أمضى ١٦ سنة في العمل..احسب مجموع المبالغ التي حصل عليها..وإذا بدأ الرجل

بالمرتب نفسه وهو ٤٠٠ جنيه في السنة. فما مقدار العلاوة التي تصرف له كل سنة طوال مدة الـ١٦ سنة لكي يحصل على مجموع المبالغ التي حصل عليها فعلاً.
[الجواب: ٨٦٨٠جنيها، ١٩ جنيهاً]

٣٠) متتابعة حسابية الوسط الحسابي بين حديها الثالث والرابع $٤\frac{١}{٢}$ ومجموع العشرين حداً الأولى منها = -٦١٠ أوجد كم حداً يؤخذ منها ابتداء من الحد الأول لكي يكون المجموع = -١٦٦٥.
[الجواب: ٣٠]

٣١) اثبت أن مجموع ن من حدود المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ،...) تساوي $ن^٢$ ثم بين أن $٨٢^٢ - ١٧^٢$ هي مجموع عدد من الأعداد الفردية المتتالية.. اوجد هذه الأعداد.
[الجواب: ٣٥ ، ٣٧ ، ٣٩ ،......١٦٣]

٣٢) أوجد $ح_ن$ من المتتابعة الحسابية التي حدها الأول = ١، $\frac{جـ_م}{جـ_ن} = \frac{م^٢}{ن^٢}$

[الجواب: (٢ن - ١)]

٣٣) إذا كان $ح_س : ح_ص$ في متتابعة حسابية يساوي ص : س
فاثبت أن: $ح_{س+ص}$ = صفراً.

٣٤) إذا كانت أضلاع مثلث تكون متتابعة حسابية أساسها ٤ وإذا كانت مساحة هذا المثلث = ٢٤ فأوجد أطوال أضلاع هذا المثلث.
[الجواب: $٤\sqrt{٦} - ٤$ ، $٤\sqrt{٦}$ ، $٤\sqrt{٦} + ٤$]

٣٥) إذا كان مجموع ن حداً من متتابعة يتناسب مع $ن^٢$ فاثبت أن الحد النوني فيها يتناسب مع (٢ن -١) ثم اثبت أن المتتابعة حسابية وأن أساسها يساوي ضعف حدها الأول.

٣٦) إذا كان الحد الذي رتبته ن من متتابعة حسابية يساوي ك فاثبت أن مجموع ٢ن -١ من حدود هذه المتتابعة يساوي ك(٢ن -١).

٣٧) في المتتابعة الحسابية اثبت أن: الفرق بين أي حدين = الفرق بين رتبتي الحدين × الأساس ومن ذلك اثبت أنه إذا كونت أ ، ب ، جـ ، ء متتابعة حسابية فإن: أ - ء = ٣(ب - جـ).

٣٨) مجموع ن من الأعداد الصحيحة المتتالية يساوي ١٩٨ وأكبر هذه الأعداد يساوي أصغرها مرتين أوجد ن وأوجد أصغر هذه الأعداد. [الجواب: ١٢ ، ١١]

٣٩) متتابعة حسابية عدد حدودها زوجي..ومجموع الحدود الفردية الرتبة منها ٩٠ ومجموع الحدود الزوجية الرتبة منها ١٠٥...وحدها الأخير يزيد عن حدها الأول بقدر ٢٧ أوجد عدد الحدود. [الجواب: ١٠]

٤٠) أ ب جـ ء شكل رباعي زواياه على الترتيب تكون متتابعة حسابية حيث أ أصغر الزوايا، ء أكبر الزوايا فإذا كان جا أ + جا ء = $\sqrt{٣}$ فأوجد زوايا هذا الشكل.

[الجواب: ٦٠°، ٨٠°، ١٠٠°، ١٢٠°]

٤١) إذا كان ط ، ق ، ك مجموع (ن+٢) ، (ن+١) ، ن حداً على الترتيب من متتابعة حسابية.. وكان س ، ص ، ع هي الحدود التي رتبتها (ن+٢) ، (ن+١) ، ن على الترتيب فاثبت أن: (أ) أساس المتتابعة = ط - ٢ق + ك

(ب) س - ٢ص +ع = ٠

٤٢) إذا كان الحد الذي رتبته (ن+١)^{٢} في متتابعة حسابية يساوي صفراً فاثبت أن مجموع حدود عددها ن ابتداء من الحد الأول في هذه المتتابعة يساوي مجموع الحدود التالية

التي عددها (ن+١) وأن كلا منها = - $\frac{\text{ن ء}}{٢}$(ن+١)(٢ن+١) حيث (ء) أساس المتتابعة .

٤٣) أوجد مجموع ن من الأعداد الفردية التي حدها الأول ٢أ +١ حيث أ عدد صحيح موجب ثم أوجد قيمة أ التي تجعل هذا المجموع مساوياً ن^{٣} .

[الجواب: ٢أن + ن^{٢} ، ا = $\frac{\text{ن}^{٢} - \text{ن}}{٢}$]

٤٤) إذا كانت أرقام المنازل المتجاورة في جانب واحد من أحد الشوارع هي (١ ، ٢ ، ٣ ، ....،٤٩) أوجد رقم المنزل الذي يكون مجموع أرقام المنازل له

[الجواب: ٣٥]

٤٥) رسمت دوائر متحدة المركز بحيث يزيد نصف قطر كل منها ١سم عن نصف قطر الدائرة الأصغر منها مباشرة اثبت أن مساحات الحلقات الدائرية الناتجة تكون متتابعة حسابية وإذا كانت مساحة الحلقة الخامسة عشر = ثلاثة أمثال مساحة الحلقة الرابعة..أوجد نصف قطر الدائرة الأولى.

[الجواب: ٢سم]

٤٦) إذا كانت النسبة بين مجموع حدود عددها ن من متتابعتين حسابيتين كنسبة (٣ن - ٢) : (٢ن + ١) أوجد النسبة بين الحد التاسع في المتتابعة الأولى والحد التاسع في المتتابعة الثانية.

[الجواب: ٧ : ٥]

المتتابعات الهندسية

النوع الأول من المسائل:

مسائل على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها النوني

* تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن \neq$ صفر متتابعة هندسية إذا كان:

$$\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \text{مقدار ثابت}$$

$\therefore$ المقدار الثابت $= \dfrac{\text{قيمة أي حد}}{\text{قيمة الحد السابق له مباشرة}}$ ويسمى هذا المقدار الثابت (أساس المتتابعة الهندسية) ويرمز له بالرمز " ر "

فمثلاً: ١) ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....

٢) ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ....

يلاحظ أن: $\frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = ٢$ ، $\frac{١٦}{٣٢} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ العدد ٢ ، $\frac{١}{٢}$ أساس للمتتابعة

طرق التعرف على المتتابعة $(ح_ن)$ هندسية أم غير هندسية

١) إذا علم $(ح_ن)$ بطريقة السرد:-

مثلاً: ٣ ، ٦ ، ١٢

$$\frac{٦}{٣} = \frac{١٢}{٦} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore$ $\frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢}$ $\therefore$ المتتابعة هندسية.

٢) إذا علمت $(ح_ن)$ بمعلومية ن:

مثلاً: المتتابعة $(ح_ن) = (٢^{٢ن+١})$

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢^{٢(ن+١)-١}}{٢^{٢ن-١}} = \frac{٢^{٢ن+١}}{٢^{٢ن-١}} = ٢^{٢} = ٤$ (ثابت)

∴ المتتابعة هندسية أساسها ر = ٤

<u>الصورة العام للمتابعة الهندسية وحدها العام:</u>

إذا كانت أ الحد الأول ، ر هو الأساس فإن:

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هي:

$(أ ، أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، ....)$

حيث: $ح_١ = أ$ ، $ح_٢ = أر$ ، $ح_٣ = أر^{٢}$ ، $ح_٤ = أر^{٣}$

الحد العام هو: $ح_ن = أر^{ن-١}$ **حيث** $ن \in ص^{+}$

<u>مثال:</u>

في المتتابعة الهندسية ٢ ، ٤ ، ٨ ، ....

أوجد: ١) الحد السابع ٢) الحد العام ٣) ما هي رتبة الحد الذي قيمته ٥١٢

٤) أوجد رتبة أول حد قيمته أكبر من ٧٨٥

<u>الحـــــــل</u>

$أ = ٢$ ، $ر = \frac{٤}{٢} = ٢$

١) $ح_٧ = أر^{٦} = ٢ \times (٢)^{٦} = ٢^{٧} = ١٢٨$

٢) $ح_ن = أر^{ن-١} = ٢(٢)^{ن-١} = ٢^{ن}$

٣) نضع $ح_ن = ٥١٢$ ∴ $٢^{ن} = ٥١٢$

∴ $لو٢^{ن} = لو٥١٢$ ∴ $ن لو٢ = لو٥١٢$

∴ $ن = \frac{لو٥١٢}{لو٢} = ٩$ ∴ $ح_٩ = ٥١٢$

٤) نضع $ح_ن > ٧٨٥$ ∴ $٢^{ن} > ٧٨٥$

$لو٢^{ن} > لو ٧٨٥$ ∴ $ن لو٢ > لو ٧٨٥$

∴ $ن > \frac{لو٧٨٥}{لو٢}$ ∴ $ن > ٩.٦$ ∴ $ن = ١٠$

النوع الثاني من المسائل:

تكوين المتتابعة عن طريق إيجاد أ ، ر

ملاحظات:

(١) تستخدم قوانين الأسس في الاختصار.

أ) في القسمة يتم طرح الأسس.

ب) في الضرب يتم جمع الأسس.

مثلا: $\frac{ر^{٨}}{ر^{٥}} = ر^{٣}$ ، $\frac{ر^{٣}}{ر^{٥}} = \frac{١}{ر^{٢}}$

(٢) التحليل بالعامل المشترك، الفرق بين مربعين، الفرق بين مكعبين، المقدار الثلاثي.

أ) $ر^{٢} - ١ = (ر - ١)\ (ر + ١)$

ب) $ر^{٣} - ١ = (ر - ١)\ (ر^{٢} + ر + ١)$

ج) $ر^{٣} + ١ = (ر + ١)\ (ر^{٢} - ر + ١)$

د) $ر^{٢} - ٥ر + ٦ = (ر - ٣)\ (ر - ٢)$

هـ) $أ + أ ر = أ\ (١ + ر)$

و) $أ ر^{٢} + أ ر^{٣} = أ ر^{٢}\ (١ + ر)$

مثال:

أوجد المتتابعة الهندسية التي فيها $ح_{٣} = ٨$ ، $ح_{٨} = ٢٥٦$

الحـــــــل

$أ ر^{٢} = ٨$ ....(١)

$أ ر^{٧} = ٢٥٦$ ....(٢)

∴ $\frac{أ ر^{٧}}{أ ر^{٢}} = \frac{٢٥٦}{٨}$ ∴ $ر^{٥} = ٣٢$ ∴ $ر = ٢$

∵ $أ ر^{٢} = ٨$ ∴ $أ \times ٤ = ٨$ ∴ $أ = ٢$

∴ المتتابعة هي: ٢ ، ٤ ، ٨ ، ....

مثال: متتابعة هندسية فيها $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} = ١١٢$ ، $ح_{٤} + ح_{٥} + ح_{٦} = ١٤$

أوجد المتتابعة.

الحـــــــل

∵ $ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} = ١١٢$ ∴ $أ + أ ر + أ ر^{٢} = ١١٢$ ....(١)

، $ح_{٤} + ح_{٥} + ح_{٦} = ١٤$ ∴ $أ ر^{٣} + أ ر^{٤} + أ ر^{٥} = ١٤$ ....(٢)

∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ١١٢ ....(١)

أ ر^{٣} (١ + ر + ر^{٢}) = ١٤ ....(٢)

∴ $\frac{\text{أ}(١ + ر + ر^{٢})}{\text{أ ر}^{٣}(١ + ر + ر^{٢})} = \frac{١١٢}{١٤}$ ∴ $\frac{١}{ر^{٣}} = \frac{٨}{١}$

∴ ٨ ر^{٣} = ١ ⇐ ر^{٣} = $\frac{١}{٨}$ ⇐ ر = $\frac{١}{٢}$

∴ أ [١ + $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$] = ١١٢

$\frac{٧}{٤}$ أ = ١١٢ ∴ أ = $\frac{١١٢ \times ٤}{٧}$ = ٦٤

∴ المتتابعة هي: ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ....

<u>مثال:</u>

أوجد المتتابعة الهندسية إذا كان:

ح$_{١}$ + ح$_{٤}$ = ١٨ ، ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ١٢

<u>الحـــل</u>

∵ ح$_{١}$ + ح$_{٤}$ = ١٨

أ + أ ر^{٣} = ١٨

أ (١ + ر^{٣}) = ١٨ ⇐ (١)

ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ = ١٢

أ ر + أ ر^{٢} = ١٢

أ ر (١ + ر) = ١٢ ⇐ (٢)

بقسمة (١) على (٢)

$\frac{\text{أ}(١ + ر)(١ - ر + ر^{٢})}{\text{أ ر}(١ + ر)} = \frac{١٨}{٢}$

∴ $\frac{١ - ر + ر^{٢}}{ر} = \frac{٣}{١٢}$

٢ - ٢ر + ٢ر^{٢} - ٣ر = ٠

٢ ر^{٢} - ٥ر + ٢ = ٠

(٢ر - ١) (ر - ١) = ٠

∴ ر = $\frac{١}{٢}$ ، ٢

ر = $\frac{١}{٢}$

أ (١ + ر^{٣}) = ١٨

أ (١ + $\frac{١}{٨}$) = ١٨

أ × $\frac{٩}{٨}$ = ١٨

أ = $\frac{١٨ \times ٨}{٩}$

أ = ١٦

∴ المتتابعة هي: ١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...

ر = ٢

أ (١ + ر^{٣}) = ١٨

أ (١ - ٨) = ١٨

٩أ = ١٨

أ = ٢

∴ المتتابعة هي: ٢ ، ٤ ، ٨ ، ...

مثال:

متتابعة هندسية حدودها موجبة وفيها $ح_{١}$ + $ح_{٣}$ = ٢٠ ، $ح_{٣}$ + $ح_{٥}$ = ٥$ح^{٢}$

أوجد المتتابعة.

الحـــل

أ + أ ر^{٢} = ٢٠

أ (١ + ر^{٢}) = ٢٠ ....(١)

أ ر^{٢} + أ ر^{٤} = ٦ (أ ر)^{٢}

أ ر^{٢} (١ + ر^{٢}) = ٥أ^{٢} ر^{٢}

(١ + ر^{٢}) = ٥أ ← (٢)

بالقسمة $\frac{أ (١ + ر^{٢})}{(١ + ر^{٢})} = \frac{٢٠}{٥أ}$

∴ ٥أ^{٢} = ٢٠ ∴ أ^{٢} = ٤ ∴ أ = ± ٢

∴ أ = ٢ لأن الحدود موجبة.

∵ ١ + ر^{٢} = ٥أ

١ + ر^{٢} = ١٠ ∴ ر^{٢} = ٩

∴ ر = ٣

∴ المتتابعة هي: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ....

تمارين (٢٩)

(١) أكتب الأعداد الناقصة لكل من المتتابعة الهندسية الآتية:

أ) (٦ ، ٩ ، ..... ، ..... ، .....) ب) ..... ، ..... ، $\frac{٦٤}{٨١}$ ، $\frac{١٦}{٢٧}$ ، .....)

ج) (٥ ، ..... ، ..... ، -٤٠ ، .....)

(٢) أي حد في المتتابعة (٢٥ ، -١٥ ، ٩ ، ....) يساوي $\frac{٧٢٩}{٦٢٥}$ [الجواب $ح_٧$]

(٣) في المتتابعة $(ح_ن) = (٦ (٢)^{ن-١})$

أثبت أنها هندسية وأوجد حدها الثامن [الجواب ٧٦٨]

(٤) إذا كان $ح_ن$ من المتتابعة (٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ....) ثلاثة أمثال $ح_ن$ من المتتابعة (٣٢ ، ٤٨ ، ٧٢ ، ....) فأوجد قيمة ن [الجواب ٥]

(٥) متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع حديها الثاني والثالث $٤\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث يزيد عن حدها الخامس بمقدار $١\frac{١}{٨}$ أوجد هذه المتتابعة. [الجواب: ٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، .....]

(٦) ما ترتيب أول حد أكبر من ١٠٠٠٠ في المتتابعة (١ ، ٢ ، ٤ ...) [الجواب: $ح_{١٥}$]

(٧) مجموع ٣ أعداد تكون متتابعة هندسية ٩٣ والعدد الثالث يزيد على مجموع العددين الأول والثاني بمقدار ٥٧ فما هي الأعداد مع العلم بأنها موجبة.

[الجواب: ٣ ، ١٥ ، ٤٥]

(٨) ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية فإذا كان مجموعها يساوي ١٣ ومجموع مربعاتها يساوي ٩١ فأوجد هذه الأعداد [الجواب ١ ، ٣ ، ٩]

(٩) متتابعة هندسية أساسها = ٢ فيها $ح_ن = ٢$ ، $ح_{٢ن+١} = ١٢٨$

أوجد المتتابعة. [الجواب: $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، .....]

(١٠) أوجد الحد السابع من النهاية في المتتابعة

(٣   ٣ ، ٩ ، ٩   ٣ ، ....، ٢١٨٧) [الجواب: ٨١]

(١١) في متتابعة هندسية إذا كان: $ح_{ر-ه}$ ، $ح_{ر-ه} = ن$

أثبت أن $ح_ه = م (\frac{ن}{م})^{\frac{س}{١٠}}$

النوع الثالث من المسائل:

مسائل على الوسط الهندسي بين كميتين والعلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي

* الوسط الهندسي هـ بين عددين أ ، ب هو = $\pm\sqrt{\text{أ ب}}$ حيث أ ، ب موجبين معا أو سالبين معا.
* الوسط الهندسي للكميات أ ، ب ، جـ = $\sqrt[3]{\text{أ ب جـ}}$
* عدد الأوساط الهندسية أقل من عدد الحدود بمقدار ٢
* المتتابعة: $\left(\text{أ ، أ ر ، أ ر}^{٢} \text{ ، } \quad \text{ ، } \frac{\text{ل}}{\text{ر}^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{ل}}{\text{ر}} \text{ ، ل}\right)$

الوسط الأول = $\text{ح}_{٢}$ = أ ر

والوسط الثاني = $\text{ح}_{٣}$ = $\text{أ ر}^{٢}$

والوسط الأخير = $\frac{\text{ل}}{\text{ر}}$ ، الحد الذي قبل الأخير = $\frac{\text{ل}}{\text{ر}^{٢}}$

نظرية: الوسط الحسابي لعددين موجبين ومختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

البرهان

نفرض العددين أ ، ب ∴ الوسط الحسابي ع = $\frac{\text{أ + ب}}{٢}$

والوسط الهندسي هـ = $\pm\sqrt{\text{أ ب}}$

∴ ع - هـ = $\frac{\text{أ + ب}}{٢} \pm \sqrt{\text{أ ب}}$

= $\frac{\text{أ + ب} \pm ٢\sqrt{\text{أ ب}}}{٢}$ = $\frac{(\sqrt{\text{أ}} \pm \sqrt{\text{ب}})^{٢}}{٢}$ > صفر

∴ ع > هـ

مثال:

إذا كان الوسط الهندسي لكميتين موجبتين = ٦ وضعف وسطهما العددي = ٢٠ فما العددان؟

الحـــــــل

نفرض العددين هما س ، ص

∴ س ص = ٦   س ص = ٣٦   ⇦   (١)

، $\frac{(س + ص)^{٢}}{٢}$ = ٢٠   ∴ س + ص = ٢٠   ⇦   (٢)

مـــن (٢)   ∴ ص = (٢٠ - س)

نعوض في (١)   ∴ س (٢٠ - س) = ٣٦

∴ ٢٠س - س^{٢} = ٣٦   ⇦   س^{٢} - ٢٠س + ٣٦ = ٥

∴ (س - ١٨) (س - ٢) = ٠

∴ س = ١٨ ، س = ٢

∴ عندما س = ١٨   ⇦   س = ٢

، عندما س = ٢   ⇦   ص = ١٨

مثال:

عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ١٠ ووسطهما الهندسي ٨ فما العددان؟

الحـــــــل

نفرض العددين هما أ ، ب   (العددان موجبان)

∵ الوسط الحسابي لهما = ١٠

∴ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ١٠   ∴ أ + ب = ٢٠

∴ أ = ٢٠ - ب   ⇦   (١)

، ∵ الوسط الهندسي لهما = ٨   ∴ $\sqrt{أ ب}$ = ٨ بتربيع الطرفين

∴ أ ب = ٦٤   ⇦   (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)   ∴ (٢٠ - ب) × ب = ٦٤

∴ ب^{٢} - ٢٠ب + ٦٤ = ٠   ∴ (ب - ٤) (ب - ١٦) = ٠

∵ ب = ٤   أو ب = ١٦

من (١)   من (١)

أ = ١٦   ∴ أ = ٤

∴ العددان هما ٤ ، ١٦

مثال:

إذا كانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين: مجموع الوسطين الأخيرين = ١ : ٨ . فكم عدد الأوساط بين العددين ٩ ، ٥٧٦؟

الحـــــل

نفرض أن أساس المتتابعة = ر ، أ = ٩

∴ الوسطين الأولين هما ٩ر ، ٩ر^{٢}

، الوسطين الأخرين هما $\frac{٥٧٦}{ر}$ ، $\frac{٥٧٦}{ر^{٢}}$

مجموع الوسطين الأولين ٩ ر + ٩ ر^{٢} = ٩ ر (١ + ر)

مجموع الوسطين الآخرين $\frac{٥٧٦}{ر} + \frac{٥٧٦}{ر^{٢}} = \frac{٥٧٦}{ر^{٢}}$ (١ + ر)

∴ $\frac{٩ ر \ (١ + ر)}{\frac{٥٧٦}{ر^{٢}} (١ + ر)} = \frac{١}{٨}$ ∴ $\frac{٩ر \times ر^{٢}}{٥٧٦} = \frac{١}{٨}$

$\frac{٩ر^{٣}}{٥٧٦} = \frac{٥٧٦}{٨}$ ∴ ٧٣ ر^{٣} = ٥٧٦ ∴ ر^{٣} = ٨ ∴ ر = ٢

، عدد الأوساط ن ∴ عدد الحدود = ن + ٢

∴ ٥٧٦ هو الحد الأخير الذي رتبته هي ن + ٢

∴ ح$_{ن+٢}$ = ٥٧٦

∴ أ ر$^{ن+٢-١}$ = ٥٧٦

٩ (٢$^{ن+١}$) = ٥٧٦

∴ ٩ (٢$^{ن+١}$) = $\frac{٥٧٦}{٩}$ ⇦ ٢$^{ن+١}$ = ٦٤

∴ ٢$^{ن+١}$ = ٢ ∴ ن + ١ = ٦

∴ ن = ٦ - ١ = ٥

مثال:

إذا كان لو ص وسط حسابي بين لو س ، لو ع

فإثبت أن ص وسط هندسي بين س ، ع

الحـــــــل

$\because$ لو ص = $\frac{\text{لو س + لو ع}}{٢}$

$\therefore$ ٢لو ص^{٢} = لو س + لو ع

$\therefore$ لو ص^{٢} = لو س ص $\therefore$ ص^{٢} = س ص

$\therefore$ ص = $\pm\sqrt{\text{س ص}}$

$\therefore$ ص وسط هندسي بين س ، ع

مثال:

إذا أضفنا إلى أربعة أعداد تكون متتابعة هندسية الأعداد ٤ ، ٢١ ، ٢٩ ، ١ على الترتيب نحصل على أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية. أوجد المتتابعة الهندسية.

الحـــــــل

نفرض أن الأعداد هي: أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣}

، الأعداد بعد الإضافة تكون متتابعة حسابية

(أ + ٤) ، (أ ر + ٢١) ، (أ ر^{٢} + ٢٩) ، (أ ر^{٣} + ١)

$\therefore$ المقدار (أ ر + ٢١) وسط حسابي

$\therefore$ ٢ (أ ر + ٢١) = (أ + ٤) + (أ ر^{٢} + ٢٩)

أ ر^{٢} - ٢أ ر + أ = ٩ $\therefore$ أ (ر^{٢} - ٢ر + ١) = ٩

$\therefore$ أ (ر - ١)^{٢} = ٩ ....(١)

كذلك المقدار (أ ر^{٢} + ٢٩) وسط حسابي

$\therefore$ ٢ (أ ر^{٢} + ٢٩) = (أ ر + ٢١) + (أ ر^{٣} + ١)

أ ر^{٣} - ٢أ ر^{٢} + أ ر = ٣٦

$\therefore$ أ ر(ر^{٢} - ٢ر + ١) = ٣٦ $\therefore$ أ ر(ر - ١)^{٢} = ٣٦ ....(٢)

بقسمة (٢) على (١)

$$\frac{\text{أ ر (ر - ١)}^{٢}}{\text{أ (ر - ١)}^{٢}} = \frac{٣٦}{٩}$$

∴ ر = ٤ بالتعويض عن ر في (١) ∴ أ = ١

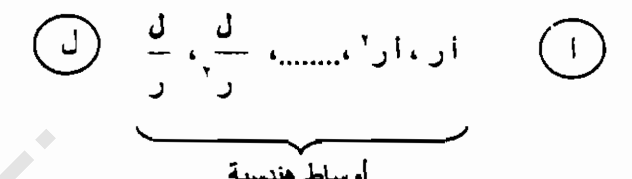
∴ الأعداد هي (١ ، ٤ ، ١٦ ، ٦٤)

النوع الرابع من المسائل:

ادخال عدة أوساط هندسية بين عددين

* إذا كان أ الحد الأول ، ل الحد الأخير

يمكن كتابة الأوساط بين أ ، ل



الوسط الأول = أ ر = $ح_٢$

الوسط الثاني = أ $ر^٢$ = $ح_٣$

الوسط الأخير $\frac{ل}{ر}$

ملاحظة: * عدد الحدود = ٢ + الأوساط

* لايجاد (ر) نستخدم ل = أ $ر^{ن-١}$

مثال: أدخل ستة أوساط هندسية بين ٢ ، ٢٥٦

الحـــل

٢ | أوساط هندسية | ٢٥٦

أ = ٢ ، ل = ٢٥٦ ، ن = ٦ + ٢ = ٨

∴ ل = أ $ر^{ن-١}$

٢٥٦ = ٢ × $(ر)^{٨-١}$ ∴ $ر^٧$ = ١٢٨

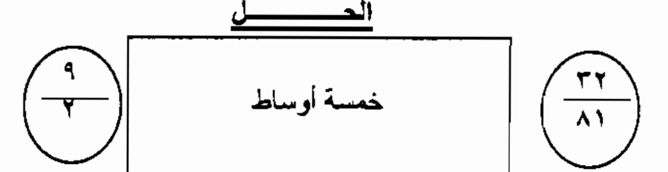
∴ $ر^٧$ = $(٢)^٧$ ∴ ر = ٢

∴ الأوساط هي: ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ....،١٢٨

مثال:

أدخل ٥ أوساط هندسية بين $\frac{٣٢}{٨١}$ ، $\frac{٩}{٢}$

الحـــــــل



أ $= \frac{٣٢}{٨١}$ ، ل $= \frac{٩}{٢}$ ، ن $=$ ٧

∴ ل = أ ر$^{\text{ن}-١}$ =

∴ $\frac{٩}{٢} = \frac{٣٢}{٨١} \times (\text{ر})^{٦}$

∴ ر^{٦} $= \frac{٩}{٢} \times \frac{٨١}{٦٤} = \frac{٧٢٩}{٦٤}$ ∴ ر $= \pm \frac{٣}{٢}$

عند ر $= \frac{٣}{٢}$

الأوساط هي

$\frac{١٦}{٢٧}$ ، $\frac{٨}{٩}$ ..... ، ٣

عند ر $= \frac{-٣}{٢}$

الأوساط هي:

$-\frac{١٦}{٢٧}$ ، $\frac{-٨}{٩}$ ، .... ، -٣

مثال:

إذا دخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ ، ١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخرين هي ١ : ٢٧ أوجد عدد الأوساط.

الحـــل

$$\boxed{2}\quad 2ر ، 2ر^2 ، \ldots\ldots ، \frac{1458}{ر^2} ، \frac{1458}{ر} \quad \boxed{1458}$$

أول وسطين ——— آخر وسطين

$$\frac{2ر + 2ر^2}{\frac{1458}{ر^2} + \frac{1458}{ر}} = \frac{1}{27}$$

$$\therefore \frac{2ر(1+ر)}{\frac{1458 + 1458ر}{ر^2}} = \frac{1}{27}$$

$$\therefore \frac{2ر^3(1+ر)}{1458(1+ر)} = \frac{1}{27}$$

$$\therefore \frac{ر^3}{729} = \frac{1}{27}$$

$\therefore$ $27ر^3 = 729$ ⇐ $ر^3 = 27$ ⇐ $ر = 3$

$\therefore$ المتتابعة هي: 2 ، 6 ، 18 ، ....،1458

$\because$ $ل = أ ر^{ن-1}$

$1458 = 2 \times (3)^{ن-1}$

$\therefore (3)^{ن-1} = 729$ $\qquad$ $\therefore (3)^{ن-1} = 3^6$

$\therefore ن - 1 = 6$ $\qquad$ $\therefore ن = 7$

$\therefore$ عدد الأوساط = 5

تمرين (٣٠)

(١) إذا كانت: أ + ١ ، أ + ٦ ، أ + ١٦ في تتابع هندسي فأوجد قيمة أ

[الجواب ٤]

(٢) إذا كانت: أ + ب ، ٢أ + ٥ب ، ٤أ + ١٩ب في تتابع هندسي

فأثبت أن: ٥أ - ٣ب ، ٥أ + ٤ب ، ٥أ + ١٨ب في تتابع هندسي

(٣) أدخل ٤ أوساط هندسية بين ٢٧ ، $\frac{١}{٩}$ [الجواب: ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$]

(٤) الوسط الهندسي بين عددين أكبر من أحدهما بمقدار ٨

وأصغر من الآخر بمقدار ٢٤ فما هما العددان؟ [الجواب: ٤ ، ٣٦]

(٥) إذا كان ثلاثة أمثال الوسط الحسابي بين عددين يساوي خمسة أمثال وسطهما الهندسي.

فأثبت أن أحد العددين تسعة أمثال الآخر.

(٦) إذا كان الفرق بين عددين ٤٨ ووسطهما الحسابي يزيد على وسطهما الهندسي بمقدار ١٨ فما هما العددان؟ [الجواب: ١ ، ٤٩]

(٧) إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع = -١٥٦ ومجموع الوسطين الثاني والثالث = ٣٦ فما هما العددان؟ الجواب: ٤٨٦ ، -٢]

(٨) إذا كانت ع هي الوسط الحسابي بين أ ، ب وكانت هـ الوسط الهندسي بينهما

فأثبت أن: أ^{٣} + ب^{٣} = ٨ع^{٣} - ٦هـ^{٢}ع

(٩) إذا كانت: أ ، ب كميتين موجبتين فأثبت أن:

أولا: $\frac{أ}{ب}$ + $\frac{ب}{أ}$ > ٢ ثانيا: ١ + أ ب > ٢ أ ب

(١٠) إذا كانت: أ ، ب ، جـ ، ء أربع كميات موجبة في تتابع هندسي فأثبت أن:

أولا: (أ + جـ) (ب + ء) > ٤ب جـ ثانيا: ٢أ + ء > ٣ب

(١١) إذا كانت: ٣أ ، ٣ب - أ ، ٢ب ثلاث كميات موجبة في تتابع حسابي فأثبت أن: أ^{٢} + ٩ب^{٢} > ١٢أ ب

(١٢) إذا كانت س ، ص ، ع في تتابع حسابي وكان س ، ص - س ، ع - س في تتابع هندسي فأثبت أن: ٣ع = ٥ص = ١٥س

النوع الخامس من المسائل:

مجموع عدد معين من حدود متتابعة هندسية

* إذا كانت المتتابعة الهندسية هي (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ....)

١] مجموع المتتابعة الهندسية بمعلومية حدها الأول والأساس هو:

(أ) $$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$ عندما ر > ١

(ب) $$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{\text{ن}})}{\text{ر} - ١}$$ عندما ر < ١

٢] مجموع المتتابعة الهندسية بمعلومية حدها الأول وحدها الأخير هو:

(أ) $$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١}$$ عندما ر > ١

(ب) $$\text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}}$$ عندما ر < ١

مثال:

أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية ٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ....

الحـــــــل

أ = ٧ ، $\text{ر} = \frac{١٤}{٧} = ٢$ ، ن = ١٠

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

$$\therefore \text{جـ}_{١٠} = \frac{٧(٢^{١٠} - ١)}{٢ - ١} = ٧١٦١$$

مثال:

كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....) ابتداء من الحد الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٢٠٤٦

الحـــــــل

$\text{أ} = ٧ \quad ، \quad \text{ر} = ٢$

$$\because \text{جـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١} \quad \therefore \frac{٢\,(٢^{\text{ن}} - ١)}{٢ - ١} = ٢٠٤٦$$

$$\therefore ٢^{\text{ن}} - ١ = ١٠٢٣ \quad \therefore ٢^{\text{ن}} = ١٠٢٤ = ٢^{١٠} \quad \therefore \text{ن} = ١٠$$

مثال:

م.هـ حدودها موجبة، $\text{ح}_٢ = ٦$ ، $\text{ح}_٣ - \text{ح}_١ = ٩$ أوجد $\text{جـ}_{١٢}$ الأولى.

الحـــــــل

$\text{ح}_٢ = ٦ \quad \therefore \text{أ ر} = ٦ \quad \Leftarrow \quad (١)$

$\text{ح}_٣ - \text{ح}_١ = ٩ \quad \therefore \text{أ ر}^٢ - \text{أ} = ٩ \quad \Leftarrow \quad \text{أ}(\text{ر}^٢ - ١) = ٩ \quad \Leftarrow \quad (٢)$

بقسمة (١) على (٢)

$$\frac{\text{أ ر}}{\text{أ}(\text{ر}^٢ - ١)} = \frac{٦}{٩} \quad \therefore \frac{\text{ر}}{\text{ر}^٢ - ١} = \frac{٢}{٣}$$

$$\therefore ٢\text{ر}^٢ - ٢ = ٣\text{ر} \quad \therefore ٢\text{ر}^٢ - ٣\text{ر} + ٢ = ٠$$

$$(\text{ر} - ٢)\,(٢\text{ر} + ١) = ٠ \quad \therefore \text{ر} = ٢ \quad \text{أو ر} = -\frac{١}{٢} \ \text{مرفوض}$$

لأن الحدود موجبة $\quad \therefore \text{ر} = ٢$

نفرض في (١) $\quad \therefore \text{أ} = ٣$

$$\text{جـ}_{١٢} \text{ الأولى} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{١٢} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{٣\,((٢)^{١٢} - ١)}{٢ - ١} = ١٢٢٨٥$$

مثال: م.هـ فيها $\text{ح}_٢ = ٥$ ، $\dfrac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٤} = \dfrac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة

الحـــــــل

$$\because \text{ح}_٢ = ٥ \quad \Leftarrow \quad \text{أ ر} = ٥ \quad \Leftarrow \quad \text{ر}^٣ = \frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٤}$$

، $\frac{ح_7}{ح_4} = \frac{1}{27}$ ⇐ $\frac{أ ر^6}{أ ر^3} = \frac{1}{27}$ ∴ $ر^3 = \frac{1}{27}$

∴ $ر = \frac{1}{3}$ نعوض في (١) بقيمة ر

∴ $\frac{1}{3}$ أ = ٥ ∴ أ = ١٥

∴ المتتابعة هي ١٥ ، ٥ ، $\frac{5}{3}$ ، .....

مثال:

اثبت أن الفرق بين مجموع الحدود العشرين الأولى في المتتابعة الهندسية ٧ ، ٢,١ ، ٠,٦٣ ، ...... والعدد (١٠) أقل من نصف قيمة الحد العشرين.

الحـــــل

$ح_1 = 7$ ، $ر = \frac{2,1}{7}$ ٠,٣

$$جـ_{20} = \frac{أ(1 - ر^ن)}{1 - ر} = \frac{7(1 - (0,3)^{20})}{1 - 0,3} = \frac{7[1 - (0,3)^{20}]}{0,7}$$

$جـ_{20} = 10 - 15 (5,3)^{19}$

المطلوب أثبات أن $جـ_{20} - 10 < \frac{1}{2} ح_{20}$

$$10 - 10 (0,3)^{20} < \frac{1}{2} \times 7 (0,3)^{19}$$

$$-10 \times 0,3 \times (0,3)19 < \frac{7}{2} (0,3)^{19}$$ ∴ $-3 < 3,5$

مثال:

متتابعة هندسية حدودها موجبة والنسبة بين مجموع التسعة حدود الأولى منها إلى مجموع الستة حدود الأولى يساوي ٧٣ : ٩ أوجد أساس المتتابعة وإذا كان الوسط الحسابي بين الحدين الثالث والخامس يزيد عن وسطهما الهندسي بمقدار ٤ أوجد المتتابعة

الحـــــل

$$\frac{\text{ج}_{٩}}{\text{ج}_{٦}} = \frac{٧٣}{٩} \quad \Leftarrow \quad \frac{\text{أ}(\text{ر}^{٩} - ١)}{\text{أ}(\text{ر}^{٦} - ١)} = \frac{٧٣}{٩}$$

$$\frac{(\text{ر}^{٣} - ١)(\text{ر}^{٦} + \text{ر}^{٣} + ١)}{(\text{ر}^{٣} - ١)(\text{ر}^{٣} + ١)} = \frac{٧٣}{٩}$$

$\therefore$ $٩\text{ر}^{٦} - ٦٤\text{ر}^{٣} - ٦٤ = ٠$ $\qquad \therefore$ $(\text{ر}^{٣} - ٨)(٩\text{ر}^{٣} + ٨) = ٠$

$\text{ر}^{٣} = ٨ \qquad \therefore \text{ر} = ٢$

، $\frac{(\text{ح}_{٣} + \text{ح}_{٥})}{٢} - \text{ح}_{٣}\,\text{ح}_{٥} = ٤$

$$\frac{\text{أر}^{٢}}{٢}(\text{أر}^{٢} + \text{أر}^{٤}) - \text{أر}^{٢} \times \text{أر}^{٤} = ٤$$

$$\frac{\text{أر}^{٢}}{٢}(١ + \text{ر}^{٢}) - (\text{أر}^{٣}) = ٤ \quad \Leftarrow \quad (١)$$

بوضع ر = ٢ في (١)

$\therefore$ $١٠\text{أ} - ٨\text{أ} = ٤ \quad \Leftarrow \quad \text{أ} = ٢$

$\therefore$ المتتابعة الهندسية هي: (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....)

مثال:

متتابعة هندسية مجموع ١٨ حداً الأولى منها يزيد على مجموع الحدود العشرة الأولى بمقدار س ومجموع الحدود السبعة الأولى مضافاً إليه يساوي مجموع عشر حداً الأولى...أوجد الأساس.

الحـــــل

$\text{ج}_{١٨} - \text{ج}_{١٠} = \text{س}$

$$\frac{\text{أ}(\text{ر}^{١٨} - ١)}{\text{ر} - ١} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{١٠} - ١)}{\text{ر} - ١} = \text{س}$$

$$\frac{\text{أ}}{(\text{ر} - ١)}(\text{ر}^{١٨} - ١ - \text{ر}^{١٠} + ١) = \text{س}$$

$$\frac{\text{أ ر}^{١٠}(\text{س}^{٨} - ١)}{(\text{ر} - ١)} = \text{س} \quad \Leftarrow \quad (١)$$

$جـ_{١٥} ÷ ص = جـ_{٧}$

$جـ_{١٥} - جـ_{٧} = ص$

$$\frac{أ(ر^{١٥} - ١)}{ر - ١} = \frac{أ(ر^{٧} - ١)}{ر - ١} = ص$$

$$\frac{١}{ر - ١} \quad (ر^{١٥} - ١ - ر^{٧} + ١) = ص$$

$$\frac{أ ر^{٧} (ر^{٨} - ١)}{(ر - ١)} = ص \qquad \Leftarrow \qquad (٢)$$

بقيمة (١) على (٢) $\frac{أر^{١٠} (ر^{٨} - ١)}{(ر - ١)} \times \frac{(ر - ١)}{أ ر^{٧} (ر^{٨} - ١)} = \frac{س}{ص}$

$\therefore ر^{٣} = \frac{س}{ص}$

$\therefore ر = \sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$

تمرين (٣١)

(١) أوجد مجموع المتتابعة الهندسية ($س^{ن-١}$ ، $أ س^{ن-٢}$ ، $أ^{٢} س^{ن-٣}$ ، ..إلى ن حداً)

الجواب [$\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$]

(٢) إذا كانت جـن = ١ - ٤ + ١٦ - ....إلى ٢ن من الحدود

فأثبت أن ١ - ٥ جـن = ١٦٠هـ

(٣) متتابعة هندسية أساسها $-\frac{٢}{٣}$ وحدها الأخير $\frac{١٦}{٩}$ ومجموعها $\frac{٢١١}{٩}$ أوجد المتتابعة.

[الجواب ٩ ، ٦ ، ٤ ، .....]

(٤) متتابعة حدها النوني = $\frac{٣}{٤}$ (٢)$^{ن+١}$ فما نوعه وما هو مجموع الخمسة حدود الأولى

منها. وكم حداً يلزم أخذه منها إبتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٥٣٣

٥) أوجد أصغر عدد من حدود المتتابعة (١ ، ٣ ، ٣^{٢} ، .....) يلزم أخذه ليكون المجموع أكبر من ١٠٠٠٠ [الجواب ١٠]

٦) أوجد أكبر عدد من حدود المتتابعة (١٠٠ ، ٥٠ ، ٢٥ ، ....) يلزم أخذه ليكون المجموع أصغر من ١٩٨ [الجواب ٦]

٧) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ومجموع الحدود الأثنى عشر الأولى منها يساوي ٢٧٣ مرة قدر مجموع الأربعة الحدود الأولى منها.

فما أساس هذه المتتابعة؟ وإذا كان الحد الخامس من هذه المتتابعة يساوي ٢٠٠ فما هو الحد الأول.

٨) إذا كان مجموع ن حداً الأولى من من متتابعة هندسية يعطي بالقانون $ج_ن$ = ٤(٣^{ن} - ١) فأوجد الأربعة حدود الأولى. وأوجد كذلك حدها السابع.

[الجواب: ٨ ، ٢٤ ، ٧٢ ، ٢١٦ ، $ح_٧$

٩) متتابعة هندسية حدها النوني = ٢($\frac{١}{٥}$)$^{١-ن}$ أوجد رتبة الحد الذي نبدأ به حتى يكون

مجموع ٨ حدود متتالية كمها مساوياً ١٧٧٧١٢٠

[الجواب $ح_٤$]

١٠) صهريج ماء سعته ٦٣٠٥ لترا كان فراغاً ملئ على عدة أيام فإذا كان ما صب فيه في اليوم الأول ١٢٨ لترا وكان ما صب فيه في كل يوم من الأيام التالية يساوي مرة قدر ما صب فيه فـ اليوم السابق مبشرة فاحسب بعدكم يوم املأ

[الجواب: ٨]

النوع السادس من المسائل:

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية

- $جـ_\infty = \frac{أ}{1 - ر} = \frac{الحد الأول}{1 - الأساس}$

بشرط $|ر| < 1$

مثال: $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها $ح_4 = 1$ ، $ح_9 = \frac{1}{243}$

أوجد المتتابعة، مجموع حدودها إلى ∞

الحـــــــل

$ح_4 = 1$ $\quad \therefore أ ر^3 = 1 \quad \Leftarrow \quad (1)$

$ح_9 = \frac{1}{243}$ $\quad \therefore أ ر^8 = \frac{1}{243} \quad \Leftarrow \quad (2)$

بقسمة (1) على (2)

$\therefore \frac{1}{243} = 1 \times \frac{243}{1}$ $\quad \therefore \frac{1}{ر^5} = 243$

$ر^5 = \frac{1}{243}$ $\quad \therefore ر^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5$ $\quad \therefore ر = \frac{1}{3}$

نفرض في (1) $\quad \therefore أ \times \frac{1}{27} = 1$ $\quad \therefore أ = 27$

$\therefore$ المتتابعة الهندسية (27 ، 9 ، 3 ، ......)

$$جـ_\infty = \frac{أ}{1 - ر} = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27 \times 3}{2} = \frac{81}{2}$$

مثال:

متتابعة هندسية لا نهائية مجموع حدودها 12 ومجموع مكعبات حدودها إلى ما لا نهاية يساوي $246 \frac{6}{7}$ أوجد المتتابعة.

الحـــــل

$\text{جـ}_{\infty} = \dfrac{\text{أ}}{1 - \text{ر}} = 12$ ⇐ (١)

$\text{أ}^3 + \text{أ}^3\text{ر}^3 + \text{أ}^3\text{ر}^6 + \ldots\ldots\ldots + \infty$

$\therefore \dfrac{\text{أ}^3}{1 - \text{ر}^3} = \dfrac{1728}{6}$ ⇐ (٢)

بتكعيب (١) ينتج $\dfrac{\text{أ}^3}{(1 - \text{ر})^3} = 1728$ ⇐ (٣)

بقسمة (٣) على (٢) $\dfrac{\text{أ} - \text{ر}^3}{(1 - \text{ر})^3} = \dfrac{1728 \times 7}{1728}$

$\therefore \dfrac{(1 - \text{ر})(1 + \text{ر} + \text{ر}^2)}{(1 - \text{ر})^3} = 7$

$7 - 14\text{ر} + 7\text{ر}^2 = 1 + \text{ر} + \text{ر}^2$

$2\text{ر}^2 - 5\text{ر} + 2 = 0$ $\therefore (2\text{ر} - 1)(\text{ر} - 2) = 0$

$\text{ر} = \dfrac{1}{2}$ بالتعويض في (١) $\text{أ} = 6$

$\therefore$ المتتابعة هي $(6 ، 3 ، \dfrac{3}{2})$

مثال:

م.هـ حدودها موجبة أي حد فيها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞. وإذا كان حدها الثاني يساوي ٢٧ أوجد المتتابعة.

الحـــــل

نفرض المتتابعة أ ، أ ر ، أ ر^2 ، ....

$\therefore \text{أ} = 2 \times \dfrac{\text{أ ر}}{1 - \text{ر}}$

$\therefore$ ١ = $\frac{٢ر}{١ - ر}$ $\therefore$ ٢ر = ١ - ر

٣ر = ١ $\therefore$ ر = $\frac{١}{٣}$

$\because$ ح٢ = ٢٧ $\therefore$ أ ر = ٢٧ $\therefore$ أ × $\frac{١}{٣}$ = ٢٧

$\therefore$ أ = ٨١

$\therefore$ المتتابعة هي ٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ......

مثال:

م.هـ فيها ح٢ = ٥ ، $\frac{ح٧}{ح٤}$ = $\frac{١}{٢٧}$ أوجد المتتابعة ثم أثبت أنه يمكن جمع عدد لا نهائي من الحدود وما هو هذا المجموع.

الحـــــل

$\because$ ح٢ = ٥ $\therefore$ أ ر = ٥ ⇦ (١)

، $\because$ $\frac{ح٧}{ح٤}$ = $\frac{١}{٢٧}$ $\therefore$ $\frac{أ ر^٦}{أ ر^٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$ $\therefore$ ر^٣ = $\frac{١}{٢٧}$

$\therefore$ ر = $\frac{١}{٣}$ بالتعويض في (١)

$\therefore$ أ × $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$ $\therefore$ أ = ١٥

ثانيا:، $\because$ ر < ١ $\therefore$ يمكن جمع المتتابعة إلى ∞

$$ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{١٥}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٤٥}{٢} = ٢٢,٥$$

مثال:

أثبت أن (ح ن) حيث حن = ٥حن + ١ هي متتابعة هندسية وأنه يمكن جمع عدد غير منته من الحدود منها وإذا كان ح١ = ٥٠ أوجد ج∞

الحـــــل

$ح_ن = ٥ ح_{ن+١}$ ∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{١}{٥}$ ∴ $(ح_ن)$ هندسية

، ∴ ر = $\frac{١}{٥}$ ∴ |ر| < ١ ∴ يمكن الجمع إلى ∞

∴ $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٥٠}{١ - \frac{١}{٥}} = ٥٠ \times \frac{١}{٥} = \frac{٢٥٠}{٤}$

مثال:

متتابعة هندسية النسبة بين مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها إلى مجموع المتتابعة إلى مالا نهاية = $\frac{٢٦}{٢٧}$ وحدها الرابع = ٩ أوجد المتتابعة - كم حدا يلزم أخذها من المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليكون الفرق بين مجموع هذه الحدود إلى مالا نهاية أقل ٠,٠٠١

الحـــــل

مجموع الثلاثة حدود الأولى = أ + أ ر + أ $ر^٢$

∴ $جـ_٣ = أ (١ + ر + ر^٢)$ ⇐ (١)

ومجموع المتتابعة إلى ما لانهاية $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}$ ⇐ (٢)

بقسمة (١) على (٢) $\frac{جـ_٣}{جـ_{\infty}} = \frac{أ (١ + ر + ر^٢) (١ - ر)}{أ}$

$\frac{٢٦}{٢٧} = ١ - ر^٣$ ∴ $ر^٣ = \frac{١}{٢٧}$ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

، ∴ المتتابعة هي (٢٤٣ ، ٨١٤ ، ٢٧ ، ....)

$$\text{جـ}_\infty - \text{جـ} = \frac{\text{أ}}{1-\text{ر}} - \frac{\text{أ} - \text{أ ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}} = \frac{\text{أ} - \text{أ} + \text{أ ر}^{\text{ن}}}{(1-\text{ر})}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ر}^{\text{ن}}}{1-\text{ر}} < 0{,}001 = \frac{243\left(\frac{1}{3}\right)^{\text{ن}}}{1-\frac{1}{3}} < 0{,}001$$

$$= \frac{3^5 \times 3^{-\text{ن}} \times 3}{2} < 0{,}001 = \frac{1}{3^{\text{ن}-6}} < \frac{1}{500}$$

$$\therefore 3^{\text{ن}-6} > 500 \qquad \therefore \text{ن} - 6 > 5 \qquad \therefore \text{ن} > 11 \qquad \therefore \text{ن} = 12$$

النوع السابع من المسائل:

المسائل اللفظية

مثال: كرة إذا سقطت من ارتفاع معين من سطح الأرض فإنها ترتد عند اصطدامها بالأرض إلى $\frac{4}{5}$ الارتفاع الذي سقطت منه فإذا سقطت هذه الكرة من ارتفاع ١٠ أقدام من سطح الأرض فاوجد مجموع المسافات التي تقطعها قبل أن تسكن.

الحـــــل

$\text{ف} = 12$

$\text{ف}_1 = 10 \times \frac{4}{5} = 8$

$\text{ف}_2 = 10 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$

$= 10 \times \frac{16}{25} = \frac{32}{5}$

∵ $ف = ف\,(\text{الأصلية}) + ٢ف_١ + ٢ف_٢ + ٢ف_٣ + ...\infty$

$$= ١٠ + ٢\left[١٠ \times \frac{٤}{٥} + ١٠ \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} + ١٠\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٣} + ...\infty\right.$$

$$= ١٠ + ٢ \times ١٠ \times \frac{٤}{٥}\left[١ + \frac{٤}{٥} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} + \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٣} + ...\infty\right.$$

$$= ١٠ + ٢ \times ١٠ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{أ}{١ - ر}$$

$$= ١٠ + ١٦ \times \frac{١}{١ - \frac{٤}{٥}} = ١٠ + ١٦ \times \frac{١}{\frac{١}{٥}}$$

$$= ١٠ + ١٦ \times ٥$$

$$= ١٠ + ٨٠ = ٩٠$$

مثال:

تعهد رجل أن يدفع أقساطا سنوية وفقا للنظام الآتي:

يدفع في السنة الأولى ١٥٠ جنيها، وفي كل سنة تالية يقل القسط بمقدار $\frac{١}{١٠}$ القسط السابق له مباشرة - أثبت أنه مهما طالت المدة فإن الرجل لن يدفع أكثر من ١٥٠٠ جنيه.

الحـــــل

∵ متتابعة الأقساط هي: ١٥٠ ، ١٥٠ (٠,٩) ، ١٥٠ $(٠,٩)^{٢}$ ، ....

∴ $جـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{١٥٠}{١ - ٠,٩} = ١٥٠٠$ جنيه

مثال:

منجم للذهب ينتج في العام ٤٠٠٠ كجم ثم يتناقص الإنتاج بعد ذلك بنسبة ٢٠٪ من أنتاج السنة السابقة.

أوجد مجموع ما ينتجه المنجم في عشر سنوات وما هو أقصى أنتاج للمنجم.

الحـــــل

∵ $أ = ٤٠٠٠$ ، $ر = ٠,٨$

∴ م.هـ هي : ٤٠٠٠ ، ٤٠٠٠ $(٠,٨)^٢$ ، ٤٠٠٠ $(٠,٨)^٢$ + ...

∴ انتاج المنجم بعد عشر سنوات هو.

$ح_{١٠} = أ ر^٩$

= ٤٠٠٠ × $(٠,٨)^٩$ = ٥٣٧ كجم.

، جملة الأنتاج بعد ١٠ سنوات

$$جـ_{١٠} = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{٤٠٠٠ (١ - (٠,٨)^{١٠})}{١ - ٠,٨} = ١٧٨٥٢$$

، أقصى أنتاج للمنجم يعني $جـ_\infty$

$$\therefore جـ_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٤٠٠٠}{١ - ٠,٨} = \frac{٤٠٠٠٠}{٢} = ٢٠٠٠٠ \text{كجم.}$$

النوع الثامن من المسائل:

الكسر العشري الدائري

٠,٣ = ٠,٣٣٣٣٠٠٠٠٠٠

= ٠,٣ + ٠,٠٣ + ٠,٠٠٣ + ... إلى ∞

= مجموع متتابعة هندسية حيث أ = ٠,٣ ، ر = ٠,١

، ٠,٢٢ = ٠,٢٢٢٢٢٠٠٠٠٠

= ٠,٢ + ٠,٠٢ + ٠,٠٠٢ + ... إلى ∞

= ٠,٢ + مجموع متتابعة هندسية لا نهائة.

حيث أ = ٠,٠٢ ، ر = ٠,١

، ٠,١٢٤ = ٠,٠١٢٤١٢٤١٢٤٠٠٠٠٠

= ٠,١٢٤ + ٠,٠٠٠١٢٤ + ٠,٠٠٠٠٠٠١٢٤ + ... ∞

= مجموع متتابعة هندسية لا نهائية

حيث أ = ٠,١٢٤ ، ر = ٠,٠٠١

ومجموع المتتابعة هو صورة الكسر الاعتيادي المناظر للكسر العشري الدائري

مثال:

ضع كلا مما يأتي على صورة كسر إعتيادي (ضع كلا مما يأتي على صورة $\frac{أ}{ب}$)

٠,٣ - ٠,٢٤ - ٣,٤١٢

الحل

$$٠,٣ = ٠,٣٣٣٣ = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠٠}$$

$$= \frac{٣}{١٠}\left[١ + \frac{١}{١٠} + \frac{١}{١٠٠} + ... \infty\right]$$

$$= \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٣}{١٠٠} \times \frac{١}{١ - \frac{١}{١٠}} = \frac{٣}{١٠} \times \frac{١٠}{٩} = \frac{١}{٣}$$

$$٠,٢٤ = ٠,٢٤٢٤٢٤$$

$$= \frac{٢٤}{١٠٠} + \frac{٢٤}{١٠٠٠٠} + \frac{٢٤}{١٠٠٠٠٠} + ...$$

$$= \frac{٢٤}{١٠٠}\left[١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + ... \infty\right]$$

$$= \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٤}{١٠٠} \times \frac{١}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{٣٨}{٣٣}$$

$$٣,٤١٢ = ٣,٤١٢١٢١٢١٢ = ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠} + \frac{١٢}{١٠٠٠٠٠} + ...$$

$$= ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠}\left[١ + \frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + ... \infty\right]$$

$$= ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠} \times \frac{١}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = ٣,٤ + \frac{١٢}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{٩٩}$$

$$= ٣,٤ \times \frac{٤}{٣٣٠} = \frac{٣٤}{١٠} \times \frac{٤}{٣٣٠} = \frac{١٣٦}{٣٣٠٠}$$

تمرين (٣٢)

١) بين أي المتتابعات الآتية يمكن جمعها إلى ∞ من الحدود مع بيان السبب:

أ) (حن) = ($٥ \times ٣^{١-ن}$)   ب) (حن) = ($٢ \times ٣^{ن+١}$)

ج) (حن) = (٢٠ - ٤ن)   د) ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣}{١٦}$ ، $\frac{٩}{٣٢}$ ، ....)

٢) ضع كل من الكسور العشرية الدائرة الآتية في صورة كسر اعتيادي:

أ) ٠,٧٤   ب) ٠,١٢٦   جـ) ٠,٢٠٩

[الجواب: $\frac{٧٤}{٩٩}$ ، $\frac{١٤}{١١١}$ ، $\frac{٢٣}{١١٠}$]

٣) اثبت أن $\sqrt[٣]{٠,٠٣٧}$ = ٠,٣

٤) مجموع حدود متتابعة هندسية غير منتهية يساوي ١٨ ومجموع مربعات حدودها يساوي ١٦٢ أوجد المتتابعة؟   [الجواب: ١٢ ، ٤ ، $\frac{٤}{٣}$ ، ....]

٥) إذا كانت س = أ + ار + أر^{٢} + ...∞

، ص = أ^{٢} + أ^{٢} ر^{٢} + أ^{٢} ر^{٤} + ...∞

اثبت أن ر = $\frac{س^{٢} - ص}{س^{٢} + ص}$

٦) إذا كانت ٢م + ١ ، م - ١ ، م - ٣ هي الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية فأوجد قيمة م وبين أن للمسألة حلين وأنه في أحدهما يمكن جمع المتتابعة إلى ما لا نهاية. ثم أوجد المجموع.

[الجواب: -١ ، -٢ ، -١٤ ، ٩ ، ٣ ، ١ ،ح∞ = $\frac{١}{٢}$ ١٣]

٧) متتابعة غير منتهية حدها الثالث = ٢٤ وحدها السادس ٣ أوجد مجموعها وكم حداً تؤخذ منها لكي يكون مجموعها أقل من مجموعها إلى ما لا نهاية بأقل من ٠,٠١؟

[الجواب: ١٩٢ ، ن = ١٥]

٨) متتابعة هندسية غير منتهية كل حد من حدودها يساوي ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له، فإذا كان مجموع المتتابعة إلى ∞ ابتداء من الحد الأول = ٤ فما هي المتتابعة؟

[الجواب: $\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٧}{١٦}$ ، $\frac{٧}{١٢٨}$ ، ....]

٩) مجموع الحدين الثاني والثالث من متتابعة هندسية يساوي ٦ وحاصل ضرب الحدين الأول والرابع يساوي ٨.

أوجد الحد الأول والأساس.

اثبت أن هناك حلين لهذه المسألة وأنه في أحد هذين الحلين يمكن جمع المتتابعة إلى ما لا نهاية وأوجد هذا المجموع.

[الجواب: أ = ٨ أ، ١ ، ر = $\frac{١}{٢}$ أ، ٢ ، $جـ_{\infty}$ =١٦]

١٠) أوجد المتتابعة الهندسية الغير منتهية التي حدها الثاني يزيد على أساسها بمقدار $\frac{٣}{٢}$

وحدها الأول ضعف مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الثالث.

[الجواب: (٤ ، ٢ ، ١،...)]

تمارين عامة على المتتابعة الهندسية

١) إذا علم أن س -٢ ، س -١ ، ٣س - ٥ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فأوجد قيمة س ، ساس المتتابعة. [الجواب: س = ٣ أ، $\frac{٣}{٢}$ ، ر = ٢ أ، -١]

٢) متتابعة حدها النوني ٣ × $٢^{ن-٣}$ فما نوعها؟ وكم حداً ابتداء من الحد الأول يكون مجموعها ٧٦٧,٢٥. [الجواب: هندسية $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، ....]

٣) أوجد أقل عدد من الحدود يمكن أخذه ابتداء من الحد الأول للمتتابعة التي حدها النوني = $٢(٣)^{ن-١}$ ليكون المجموع أكبر من ٣٠٠. [الجواب: ن = ٦]

٤) اذكر الشرط الواجب توافره حتى يمكن جمع المتتابعة الهندسية (١ ، س ، ....إلى ∞) وأوجد النسبة بين الحد العام $ح_ر$ لهذه المتتابعة ومجموع الحدود التالية له

إلى ما لا نهاية من الحدود وإذا كانت هذه النسبة = $\frac{١}{٢}$ فأوجد قيمة س وكذلك مجموع

الخمسة حدود الأولى. [الجواب: $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢١١}{٨١}$]

٥) متتابعة هندسية غير منتهية فيها الوسط الحسابي بين حديها الثاني والرابع هو ٥ ، حاصل ضرب حدها الأول في حدها الخامس يساوي ثلاثة أمثال حدها الثالث. أوجد مجموع الخمسة حدود الأولى منها. وكذلك مجموعها إلى ما لا نهاية؟

[الجواب: $\frac{١٢١}{٣}$ ، $\frac{٨١}{٢}$]

٦) متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية فإذا كان مجموع مكعبات حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية يساوي $\frac{٢٧}{٢٦}$.

فأوجد هذه المتتابعة. [الجواب: (١ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٨}$ ،.........)]

٧) تعاقد شخص مع إحدى الشركات على أن يعمل بها نظير مرتب سنوي قدره ٢٥٠ جنيهاً في السنة الأولى ويتزايد بقدر ٥ ٪ كل سنة عن مرتب السنة السابقة لها مباشرة وهناك موظف آخر يتقاضى نفس المرتب ولكن يزيد مرتبه سنوياً بمقدار ١٥ جنيهاً أوجد الفرق بين مجموع ما يتقاضاه كل منهما بعد عشرين سنة.

[الجواب ٤٢٥ جنيهاً]

٨) عاملان بدأ كل منهما العمل بمرتب سنوي قدره ٣٠٠ جنيهاً وكان الأول يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها ٢٤ جنيهاً وكان الثاني يحصل على علاوة سنوية قدرها ٤٪ من مرتبه في السنة السابقة أوجد مرتب كل منهما في السنة العشرين من بدء العمل. وكم ينبغي أن تكون العلاوة السنوية للأول حتى يتساوى مرتبه مع مرتب زميل في تلك السنة.
[الجواب: ٧٥٦ جنيهاً ، ٦٣١,٢ جنيهاً ، ١٧,٤٣ جنيهاً]

٩) كرة إذا سقطت من ارتفاع معين من سطح الأرض فإنها ترتد عند تصادمها بالأرض إلى

$\frac{٣}{٥}$ الارتفاع الذي سقطت منه فإذا سقطت هذه الكرة من ارتفاع خمسة أمتار عن سطح

الأرض أوجد:

أولاً: المسافة التي ترتدها بعد الصدمة الرابعة.

ثانياً: مجموع المسافات التي قطعتها من لحظة سقوطها حتى تكاد تسكن.

[الجواب: $\frac{٨١}{١٢٥}$ ، ٢٠٠ متراً]

١٠) الأعداد ٢ ، ٤ ، ٩ ، ١ ، -١ ، $\sqrt{٢}$ بعضها في تتابع عددي والبعض الآخر في تتابع هندسي . اكتب حدود كل من المتتابعتين في ترتيب تصاعدي ثم أوجد مجموع الاثنى عشر حداً الأولى من كل منهما.

[الجواب: (-١ ، ٤ ، ٩)، (١ ، $\sqrt{٢}$ ، ٢)، ٣١٨، ٦٣($\sqrt{٢}$ + ١)]

١١) متتابعة هندسية حدودها موجبة، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي $\frac{٧}{٤}$ حدها الثالث، الحد الخامس من نفس المتتابعة يساوي ٢٤ أوجد المتتابعة وأوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها. [الجواب: ($\frac{٣}{٢}$ ، ٣ ، ٦ ،.......،)]

١٢) إذا كانت الحدود التي رتبتها س ، ص ، ع من متتابعة هندسية تكون متتابعة هندسية فاثبت أن س ، ص ، ع تكون متتابعة حسابية.

١٣) إذا كانت أ ، ب ، جـ في تتابع هندسي وكانت ء هي الوسط الحسابي بين أ ، ب وكانت هـ هي الوسط الحسابي بين ب ، جـ فاثبت أن $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{هـ} = ٢$.

١٤) إذا كانت (أ ، ب ، جـ ، ء) متتابعة هندسية فاثبت أن لو أ ، لو ب ، لو جـ ، لو ء تكون متتابعة حسابية. وإذا كان أ = ١١ ، ء = ١٣٧٥ فاستنتج من ذلك قيمة كل من ب ، جـ.

[الجواب: ٥٥ ، ٢٧٥]

١٥) مجموع الإثنى عشر حداً الأولى من متتابعة حسابية هو ٤٨ فإذا كان الحد الأول والحد الثاني والحد الخامس منها في تتابع هندسي فما هي هذه المتتابعة؟

[الجواب: ($\frac{١}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٥}{٣}$ ، .....)]

١٦) مجموع ٣ أعداد تكون متتابعة هندسية ٧٠ وإذا ضرب العدد الأول في ٤ والعدد الثاني في ٥ والعدد الثالث في ٤ كونت حواصل الضرب متتابعة حسابية فما هي هذه الأعداد؟

[الجواب: ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠]

١٧) إذا كان مجموع ١١ حداً من متتابعة حسابية = مربع حدها السادس وكانت حدودها الرابع والسابع والحادي عشر تكون متتابعة هندسية فما هي المتتابعة الحسابية؟
[الجواب ٦ ، ٧ ، ٨ ،.........]

١٨) إذا كان ٢أ ، ٣ب ، ٤جـ في تتابع حسابي وكان ٢أ ، ٣ب-٢أ ، ٤جـ - ٢أ في تتابع هندسي فأوجد نسبة $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ [الجواب: $\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{٥}{٢}$]

١٩) ثلاثة أعداد في تتابع حسابي مجموعها ٢١ وإذا أضيف إلى العدد الأول ٤ وأضيف إلى العدد الثاني ٥ وأضيف إلى العدد الثالث ٨ فإن الأعداد الناتجة تصبح في تتابع هندسي. أوجد هذه الأعداد؟

[الجواب: (١٤ ، ٧ ، ٠)، (٤ ، ٧ ، ١٠)]

٢٠) إذا كان لو ص وسط حسابي بين لوس،
لوع اثبت أن ص وسط هندسي بين س ، ع.

٢١) اثبت أن أولا: أ + هـ ب > ٢ $\sqrt{\text{هـ أ ب}}$.

ثانياً (أ + هـ ب) (أ + $\frac{\text{ب}}{\text{هـ}}$) > ٤ أ ب

حيث أ ، ب ، هـ أعداد موجبة مختلفة.

٢٢) إذا كانت ٦أ ، ٣ب ، ٢جـ ، ٢ء كميات موجبة في تتابع حسابي فاثبت أن:
أولا: ٣ ب^{٢} > ٤ أ جـ
ثانيا: ٣ب^{٢} + ٢جـ^{٢} > ٤ أجـ + ٣بء

٢٣) إذا كانت ٤أ ، ب ، ٣جـ ، ٤ء كميات موجبة في تتابع هندسي فاثبت أن
١٢ ب جـ < (٤أ + ٣جـ) (ب + ٤ء).

٢٤) إذا كانت الكميات أ ، ب ، جـ ، ء موجبة وفي تتابع هندسي فاثبت أن:
أ + ء > ب + جـ

٢٥) متتابعتان هندسيتان الحد الأول في كل منهما يساوي ١ وأساس المتوالية الثانية يزيد على أساس المتتابعة الأولى بمقدار الواحد الصحيح. فإذا كان الحد الثالث في المتتابعة الثانية = ١٦ مرة نظيره في المتتابعة الأولى. فاثبت أن هناك حلين لهذه المسألة وأنه في أحد هذين الحلين يمكن جمع كل من المتتابعتين إلى ما لا نهاية وأن النسبة بين هذين المجموعين تساوي ١ : ٦.

٢٦) متتابعتان إحداهما هندسية والأخرى حسابية. فإذا كان الحد الأول من كل منهما = ٢ وكان الحد الثاني من المتتابعة الهندسية يساوي الحد الثالث من المتتابعة الحسابية وكان الحد الثالث من المتتابعة الهندسية يساوي الحد الثامن من المتتابعة فأوجد كلاً من المتتابعتين.

[الجواب: (٢ ، $\frac{١}{٢}$ ٥ ، ....) ، (٢ ، ٥ ، $\frac{١}{٢}$ ١٢ ،........)]

٢٧) متتابعتان هندسيتان الحد الأول في كل منهما ٨ ومجموع الحدود الثلاثة الأولى من كل منهما ١٤.

أوجد هاتين المتتابعتين ثم أوجد مجموع الحدود السبعة الأولى من كل منهما.

[الجواب: (٨ ، -١٢ ، ١٨ ، ....)، (٨ ، ٤ ، ....) ، $\frac{٤٦٣}{٨}$ ، $\frac{١٢٧}{٨}$]

٢٨) متتابعتان هندسيتان الأولى حدها الأول (أ) وأساسها (ر) والثانية حدها الأول (أ) وأساسها (ر - $\frac{١}{٣}$) فإذا علم أن مجموع المتتابعتين إلى ما لا نهاية من الحدود متساويتان وكان الحد الثالث من المتتابعة الثانية يزيد عن نظيره في المتتابعة الأولى بمقدار $\frac{١}{١٨}$ فأوجد كلا من المتتابعتين.

[الجواب: (١ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٢٥}{٣٦}$ ،......) ، (٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ،.......)]

٢٩) متتابعة هندسية حدودها الحقيقية والنسبة بين مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها إلى مجموعها إلى ما لا نهاية تساوي   وحدها الرابع يساوي ٩ أوجد المتتابعة. كم حدا يلزم أخذها من المتتابعة ابتداء من الحد الأول ليكون الفرق بين مجموع هذه الحدود ومجموع المتتابعة إلى ما لا نهاية أقل من ٠,٠٠١.

[الجواب: (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧،.....)، ن = ١٢ أو أكثر]

٣٠) مجموع متتابعة هندسية غير منتهية يساوي ١٣ $\frac{١}{١٢}$. وأي حد فيها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له بأجمعها أوجد المتتابعة وحقق أن الفرق بين مجموعها إلى ما لا نهاية ومجموع التسعة حدود الأولى منها أقل من $\frac{١}{١٠٠٠}$.

[الجواب: (٩ ، ٣ ، ١ ، ......)]

٣١) متتابعة هندسية عدد حدودها ن وحدها الأول أ وحدها الأخير ب أثبت أن حاصل ضرب حدود هذه المتتابعة يساوي $(\text{أ ب})^{\frac{\text{ن}}{٢}}$

٣٢) إذا كانت س مجموع ن حداً متتالياً من المتتابعة هندسية، ص حاصل ضرب هذه الحدود، ع مقلوبات هذه الحدود. فاثبت أن $\left(\frac{\text{س}}{\text{ع}}\right)^{\text{ن}} = \text{ص}^{٢}$.

٣٣) إذا كانت $\sqrt[٣]{\text{س}} = \sqrt[٥]{\text{ص}} = \sqrt[٧]{\text{ع}}$ اثبت أن س ، ص ، ع في تتابع هندسي.

٣٤) إذا كانت ن عدداً فردياً فاثبت أن حاصل ضرب ن من الحدود المتتالية في متتابعة هندسية يساوي $\text{س}^{\text{ن}}$ حيث س الحد الأوسط وإذا كان حاصل ضرب هذه الحدود = ٢٤٣ والحد الأوسط يساوي ٣ والحد الرابع في المتتابعة = ٩ فما مجموع هذه المتتابعة؟ [الجواب: $\frac{١٢١}{٣}$]

٣٥) س ، ص عددان موجبان. أدخل بينهما وسطان هندسيان موجبان كما أدخل بين س ، ص أيضاً وسطان حسابيان أخريان وكان مجموع الوسطين الهندسيين يساوي ١٨ ومجموع الوسطين الحسابيين يساوي ٢٧ أوجد قيمتي س، ص. [٣ ، ٢٤]

٣٦) أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (١ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٩}{٢٥}$ ، ......) ليكون المجموع أصغر من مجموع حدود المتتابعة إلى ما لا نهاية بأقل من ٠,٠٠٠١
[الجواب: ٢٠]

٣٧) إذا كانت س ، ص ، ع أعداد موجبة في تتابع حسابي وكانت أ هي الوسط الهندسي بين س ، ص وكانت ب هي الوسط الهندسي بين ص ، ع فاثبت ان $\text{ص}^{٢}$ اكبر من أب.

٣٨) إذا كانت س عدداً أكبر من الواحد فاثبت أن $س + \frac{١}{س} > ٢$.

٣٩) يتناقص إنتاج منجم فحم سنوياً بحيث يكون الإنتاج في سنة ما أقل ١٣٪ عن السنة السابقة لها مباشرة فإذا كان إنتاج الفحم في السنة الأولى ٤٠٠٠ كجم فأوجد مجموع ما ينتجه المنجم خلال العشرة سنين الأولى وأوجد الحد الأقصى لمجموع إنتاجه.
[الجواب: ٢٣١٢٩,٢٣ ، ٣٠٧٦٩,٢٣ كجم]

٤٠) إذا كانت أ ، ب ، جـ تكون متتابعة هندسية وكان ع ، هـ هما الوسطان الحسابي والهندسي بين أ ، ب على الترتيب وكان و ، ي هما الوسطان الحسابي والهندسي بين ب ، جـ على الترتيب. فاثبت أن ع : هـ = و : ي

٤١) أربعة أعداد مجموعها ٤٢ ومجموع العددين الأوسطين منها= ٢٠ فإذا كانت الثلاثة أعداد الأولى في تتابع حسابي وكانت الثلاثة أعداد الأخيرة في تتابع هندسي فما هي هذه الأعداد؟

[الجواب: ١٧,٥ ، ١٢,٥ ، ٧,٥ ، ٤,٥ أو ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٦]

٤٢) حل المعادلة $١ + أ + أ^{٢} + ... + أ^{س} = (١+أ)\,(١+أ^{٢})\,(١+أ^{٤})\,(١+أ^{٨})$

[الجواب: ١٥]

٤٣) متتابعة هندسية مكونة من ٤ن حداً والنسبة بين مجموع حدودها الزوجية الرتبة وبين مجموع حدودها الفردية الرتبة تساوي ٢ فإذا كان الوسط الحسابي بين $ح_{ن}$ ، $ح_{ن+٢}$ = ٢٠

وكان $جـ_{٤ن} - جـ_{٣ن} = ٣٢\,(جـ_{٢ن} - جـ_{ن})$ أوجد المتتابعة.

[الجواب: ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، .....)]

٤٤) متتابعتان هندسيتان حاصل ضرب أساسيهما يساوي الواحد الصحيح والحد الأول من المتتابعة الأولى تسعة أمثال الحد الأول من المتتابعة الثانية. فإذا كان مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الأولى = ٥٢ ومجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الثانية = ١٤٠٤ فأوجد كلاً من المتتابعتين ثم اثبت أن مجموع الحدود ابتداء من الحد السابع إلى ما لا نهاية في المتتابعة الأولى = $\frac{١}{١٤}$.

إجابة تمارين الكتاب

إجابة تمرين (١)

المجموعة الأولى :

(١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣\right)$

الحل

بالتعويض المباشر $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \left(\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣\right) = (٣)^{٢} - ٤ \times ٣ + ٣$

$= ٩ - ١٢ + ٣ =$ صفر

(٢) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+٤} = \dfrac{٢\times ٣}{٣^{٢}+٤} = \dfrac{١٦}{١٣}$

(٣) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٩}{\text{س}-٣}$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٣) = \dfrac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والاختصار $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{(\text{س}-٣)} = ٣+٣=٦$

(٤) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}-٤}{\text{س}^{٢}-\text{س}-١٢}$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٤) = \dfrac{٠}{٠}$

بتحليل المقام والاختصار $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}+٣)} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{١}{\text{س}+٣} = \dfrac{١}{٤+٣} = \dfrac{١}{٧}$

(٥) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٣}-٢٧}{\text{س}^{٢}-٩} =$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٣) = \dfrac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والمقام والاختصار $= \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٣)(\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٩)}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} =$

$\dfrac{٣^{٢}+٣\times ٣+٩}{٣+٣} = \dfrac{٩+٩+٩}{٦} = \dfrac{٢٧}{٦} = \dfrac{٩}{٢}$

(٦) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢}-٤٩}{\text{س}^{٢}-٩\text{س}+١٤}$ بالتعويض المباشر $\text{د}(٧) = \dfrac{٠}{٠}$

بتحليل البسط والمقام والاختصار $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٧)(\text{س}+٧)}{(\text{س}-٧)(\text{س}-٢)} = \dfrac{٧+٧}{٧-٢} = \dfrac{١٤}{٥}$

(٧) $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س}^٢ - ٧ + ١٢} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٤)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٣} \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٤} = \dfrac{٣+٣}{٣-٤} = -٦$

(٨) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ٢ - ٣} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)} = \dfrac{١}{٣+١} = \dfrac{١}{٤}$

(٩) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{\text{س}^٣ - ١}{\text{س} - ١} = \lim\limits_{\text{س}\to ١} \dfrac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\text{س} - ١} = ١+١+١ = ٣$

(١٠) $\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٣ + ٢٧}{\text{س} + ٣} = \lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{(\text{س} + ٣)(\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٩)}{\text{س} + ٣} =$

$\lim\limits_{\text{س}\to -٣} \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٩}{١} = (-٣)^٢ - ٣ \times -٣ + ٩ = ٩+٩+٩ = ٢٧$

(١١) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{س}^٣ + ٧\text{س}}{\text{س}} = \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \dfrac{\text{س}(\text{س}^٢ + ٧)}{\text{س}} = ٠ + ٧ = ٧$

(١٢) $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \dfrac{٢\text{س}^٢ - \text{س}}{٢\text{س}^٢ + \text{س}}$ بقسمة البسط والمقام على أكبر أس وهو $\text{س}^٢ = ١$

(١٣) $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{س} + ١٠^{٩}}{\text{س}^٣ + ٩}$ بالقسمة على $\text{س}^٣$

$= \dfrac{٠+٠+٠}{١+٠} = \dfrac{٠}{١} =$ صفر

(١٤) $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \dfrac{\text{س}^٣ + ٨}{١٢\text{س}^٢ + ٩} = \dfrac{١+٠}{٠+٠} = \dfrac{١}{٠} = \infty$

(١٥) $\lim\limits_{\text{ن}\to \infty} \dfrac{\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ١٠٠٠}{٢\text{ن}^٢ + \text{ن} + ٧}$ بالقسمة على $\text{ن}^٢$ $= \dfrac{١+٠+٠}{٢+٠+٠} = \dfrac{١}{٢}$

(١٦) $\lim\limits_{\text{س}\to \infty} \dfrac{\text{س}^٣ + ٩\text{س}}{٣\text{س}^٣ - ٧\text{س} + ٤} = \dfrac{١+٠}{٣-٠+٠} = \dfrac{١}{٣}$

(١٧) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣س-٢}{٩س+٧}$ بالقسمة على س $= \frac{٣-٠}{٩-٠} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

(١٨) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٦س^{٢}+٢س+١}{٦س^{٢}-٣س+٧} = \frac{٦+٠+٠}{٦-٠+٠} = ١$

(١٩) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{٢}+س-٢}{٤س^{٣}-١}$ = صفر

(٢٠) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}+١} = \lim\limits_{س \to \infty} \frac{٢}{١+٠} = ٢$

(٢١) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{س^{٤}+س^{٣}-س^{٢}-٥س+٤}{س^{٣}-س^{٢}-س+١}$ بالتعويض المباشر نجد أن د(١) $= \frac{٠}{٠}$

لاحظ أن كلا من البسط والمقام مقادير جبرية ذات رتب عالية فتكون عملية تحليلها معقدة نسبياً فنستخدم التحليل بالتقسيم .

البسط = س^{٤} + س^{٣} - س^{٢} - ٥ س + ٤

= س^{٤} - س^{٢} + س^{٣} -٥ س +(٤ +١) -١

= (س^{٤} - س^{٢}) + (س^{٣} – ١) -٥س + ٥

= س^{٢} (س^{٢} - ١) + (س^{٣} -١) -٥ (س -١)

= (س-١) [س^{٢} (س+١) +(س^{٢} +س+١) -٥]

= (س-١) [س^{٣} +س^{٢} +س^{٢} +س +١-٥]

= (س-١) [س^{٣} +٢س^{٢} +س -٤]   ∵ -٤=-١-٢-١

= (س-١) [س^{٣} +٢س^{٢} +س -١-٢-١]

= (س-١) [(س^{٣} -١)+ (٢س^{٢}-٢) +(س-١)]

= (س-١)^{٢} [س^{٢} +س +١ +٢ (س+١) +١]

البسط = (س-١)^{٢} [س^{٢} +٣س +٤]

المقام = س^{٣} – س^{٢} ـص-س+١

= س^{٢} (س-١) –(س-١) = (س-١) [س^{٢} -١]

= (س-١) (س-١) (س+١)

$$\lim_{س \to \infty} \frac{س^4+س^3-س^2-5س+4}{س^3-س^2-س+1} = \lim_{س \to \infty} \frac{(س-1)^2(س^2+3س+4)}{(س-1)^2(س+1)}$$

$$= \frac{1^2+3\times1+4}{1+1} = \frac{8}{2} = 4$$

(٢٢) $\lim_{ن \to \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{ن} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\infty} =$ صفر

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{أس^4 + ب س^2 + جـ}{ءس^5 + هـ س^3 + و س}$ = بقسمة البسط والمقام على $س^5$

$= \frac{0}{ء} =$ صفر

(٢٥) $\lim_{س \to 0} \frac{(2-3س)^2 - 4}{3س}$ بالتعويض المباشر نجد أن د(٠) $= \frac{0}{0}$

$$\lim_{س \to 0} = \frac{4-12س+9س^2-4}{3س} = \frac{-12+9\times0}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

(٢٦) $\lim_{ن \to \infty} \frac{3^{ن} - 2\times5^{ن} + 2\times7^{ن}}{2^{ن} + 8\times3^{ن} + 5\times7^{ن}}$ بقسمة البسط والمقام على $7^{ن}$

$$= \frac{0-2\times0+2}{0+8\times0+5} = \frac{2}{5}$$

(٢٧) اوجد $ح_{ن}$ في المتسلسلة: $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \ldots$.ثم اثبت أن $\lim_{ن \to \infty} ح_{ن} = \frac{2}{3}$

الحل

نلاحظ أن المتسلسلة لست هندسية ولا حسابية فلا يمكن إيجاد حدها النوني مباشرة إلا بعد إيجاد الحد النوني للبسط على حده والمقام على حدة .

البسط ١ ، ٣ ، ٥ ، .... فهو متوالية حسابية أساسها ٢ وحدها الأول : $أ_{ن} = أ_1 + (ن - 1)ء$

أما المقام ٢ ، ٥ ، ٨ ، ..... فهو متوالية حسابية حدها الأول ٢ وأساسها ٣

حدها العام $أ_{ن} = 2 + (ن-1)3 = 2 + 3ن - 3 = 3ن - 1$

الحد العام للمتسلسلة = $\frac{\text{الحد النوني للبسط}}{\text{الحد النوني للمقلم}}$

$$ح_ن = \frac{٢ن - ١}{٣ن - ١}$$

$$\text{نها}_{ن \leftarrow \infty} ح_ن = \text{نها}_{ن \leftarrow \infty} \frac{٢ن - ١}{٣ن - ١} = \text{نها}_{ن \leftarrow \infty} \frac{٢ - \frac{١}{ن}}{٣ - \frac{١}{ن}} = \frac{٢}{٣}$$

(٢٨)اثبت أن مجموع المتسلسلة اللانهائية الآتية هو الواحد الصحيح :

$$د(س) = \frac{س^٢}{س^٢ + ١} + \frac{س^٢}{[س^٢ + ١]^٢} + \frac{س^٢}{[س^٢ + ١]^٣} + \dots\dots\dots$$

$$د(٠) = \frac{٠}{٠ + ١} + \frac{٠}{(٠ + ١)^٢} + \frac{٠}{(٠ + ١)^٣} + \dots\dots\dots = \text{صفر}$$

د(٠) = صفر

نلاحظ أن الدالة هى متسلسلة هندسية حدها الأول ($\frac{س^٢}{س^٢ + ١}$)

$$\text{وأساسها} = \frac{\frac{س^٢}{(س^٢ + ١)^٢}}{\frac{س^٢}{س^٢ + ١}} = \frac{١}{س^٢ + ١} = ر$$

المجموعة الثانية

$$(١) \quad \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٦ - ٦٤}{س - ٢} = \text{نها}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٦ - ٢^٦}{س - ٢} = \frac{٦}{١} (٢)^{٦-١} = ٦ \times (٢)^٥ = ١٩٢$$

$$(٢) \quad \text{نها}_{س \leftarrow ١} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \frac{٢}{١} (١)^{٢-١} = ٢$$

(٣) $\underset{س \to \frac{١}{٣}}{\text{نهـا}} \frac{٢٧س^{٣} - ١}{٣س - ١} = \underset{٣س \to ١}{\text{نها}} \frac{(٣س)^{٣} - ١^{٣}}{٣س - ١} = \frac{٣}{١} (١)^{٣-٢} = ٣$

(٤) $\underset{س \to \frac{١}{٥}}{\text{نهـا}} \frac{٦٢٥س^{٤} - ١}{٥س - ١} = \underset{٥س \to ١}{\text{نها}} \frac{(٥س)^{٤} - ١^{٤}}{٥س - ١} = \frac{٤}{١} (١)^{٤-١} = ٤$

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١+س)^{٢} - ١}{س} = \underset{١+س \to ١}{\text{نها}} \frac{(١+س)^{٢} - ١^{٢}}{١+س-١} = \frac{٢}{١} (١)^{٢-١} = ١$

(٦) $\underset{ص \to ٠}{\text{نها}} \frac{(ص+٨)^{\frac{١}{٣}} - ٢}{ص} = \underset{ص+٨ \to ٨}{\text{نها}} \frac{(ص+٨)^{\frac{١}{٣}} - ٨^{\frac{١}{٣}}}{(ص+٨)-٨} = \frac{\frac{١}{٣}}{١} (٨)^{\frac{١}{٣}-١} = \frac{١}{٣} (٨)^{-\frac{٢}{٣}}$

$= \frac{١}{٣(٨)^{\frac{٢}{٣}}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{٨^{٢}}} = \frac{١}{٤ \times ٣} = \frac{١}{١٢}$

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س^{م} - ب^{م}}{س^{ن} - ب^{ن}} = \frac{م}{ب} (ب)^{م-ن}$

(٨) $\underset{و \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + و)^{٤} - س^{٤}}{(س + و) - س} = \frac{٤}{١} (س)^{٤-١} = ٤ س^{٣}$

(٩) من تعريف النهاية اثبت ان :

$\underset{س \to ١}{\text{نها}} (٤س^{٣} + ٢س^{٢} - ٢٤س + ٢٢) = ٤(١)^{٣} + ٢(١)^{٢} - ٢٤(١) + ٢٢$

$= ٤+٢-٢٤+٢٢ = ٤$

<u>اوجد</u> <u>$\underset{و \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(و) في كل من الحالات الآتية</u> :

(١٠) $د(و) = \frac{\sqrt{٣+و} - \sqrt{و}}{و}$

$\therefore \underset{و \to ٠}{\text{نهـا}} د(و) = \underset{و \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٣+و} - \sqrt{و}}{و}$

ويمكن حل هذا المثال بأستخدام الضرب في مرافق الجذر في البسط

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt{٣+و} - \sqrt{و}}{و} \times \frac{\sqrt{٣+و}\ \sqrt{٣}}{\sqrt{٣+و} + \sqrt{٣}}$$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{(٣+و) - (٣)}{و\left(\sqrt{٣+و} + \sqrt{٣}\right)} = \lim_{و \to ٠} \frac{و}{و\left(\sqrt{٣+و} + \sqrt{٣}\right)} = \frac{١}{\sqrt{٣+٠} + \sqrt{٣}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$$

ويكون الحل بأستخدام النظرية :

$$\lim_{٣+و \to ٣} = \frac{\frac{١}{٢}}{١} (٣)^{\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢} (٣)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$$

(١١) $\lim_{٢+و \to ٢} \frac{(٢+و)^٣ - ٨}{و} = \lim_{٢+و \to ٢} \frac{(٢+و)^٣ - ٢^٣}{٢+و-٢} = \frac{٣}{١}(٢)^{٣-١} = ٣(٢)^٢ = ١٢$

(١٢) $\lim_{٢+و \to ٢} \frac{(٢+و)^٣ - ٤}{و} = \lim_{٢+و \to ٢} \frac{(٢+و)^٢ - ٢^٢}{٢+و-٢} = \frac{٢}{١}(٢)^{٢-١} = ٢ \times ٢ = ٤$

(١٣) $\lim_{و \to ٠} \frac{(س+و)^٢ - س^٢}{و} = \lim_{و \to ٠} \frac{(س+و)^٢ - س^٢}{(س+و) - س} = \frac{٢}{١}(س)^{٢-١} = ٢س$

(١٤) $\lim_{و \to ٠} \frac{\frac{١}{س} + \frac{١}{س+و}}{و} = (-١) \lim_{و \to ٠} \frac{\frac{١}{س+و} - \frac{١}{س}}{و}$

$$= (-١) \lim_{س+و \to س} \frac{(س+و)^{-١} - س^{-١}}{(س+و) - س} = (-١)\frac{-١}{١}(س)^{-٢} = \frac{١}{س^٢}$$

أوجد $\lim_{و \to ٠} \frac{د(س+و) - د(س)}{و}$ في كل من الحالات آلاتية :

(١٥) $د(س) = ٢س^٢$

$د(س+و) = ٢(س+و)^٢$

$$\underset{و \to 0}{\text{نها}} \frac{٢(س+و)^{٢} - ٢س^{٢}}{و} = ٢ \underset{س+و \to س}{\text{نها}} \frac{(س+و)^{٢} - س^{٢}}{(س+و) - س} = ٢ \times \frac{٢}{١} (س)^{٢-١} = ٤س$$

(١٦) د(س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٣}

(١٧) د(س) = $\frac{١}{س}$

(١٨) د(س) = س^{٤}

(١٩) د(س) = $\sqrt{س}$

(٢٠) د(س) = س^{٢} − ٣س

إجابة تمرين (٢)

المجموعة الأولى :-

(١) ١ ـ حتا ٢ س = ٢حا^2 س ∴ $\frac{١}{٣}$ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{٢حا^٢ س}{س^٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ نها $\frac{حا^٢ س}{س^٢}$

= $\frac{٢}{٣}$ (١) = $\frac{٢}{٣}$

(٢) بالقسمة على س = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\dfrac{\frac{٥س}{س} + \frac{حا ٠س}{س}}{\frac{٧س}{س} - \frac{طا ٠س}{س}}$ = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\dfrac{٥ + \frac{حا ٠س}{س}}{٧ - \frac{طا ٠س}{س}}$

= $\frac{٥+١}{٧-١}$ = $\frac{٦}{٦}$ = ١

(٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{١- حتا ٢ س}{س^٢}$ ، ١- حتا ٢ س = ٢ حا^2 س

= $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{٢ حا^٢ س}{س^٢}$ = ٢ نها $\frac{حا^٢ س}{س^٢}$ = ٢(١)^2 = ٢

(٤) نها $\frac{٥}{س^٢ قتا^٢ س}$ ، قتا س = $\frac{١}{حا س}$ = ٥ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{حا^٢ س}{س^٢}$ = ٥(١)=٥

(٥) $\underset{س \leftarrow \frac{ط}{٢}}{\text{نها}}$ $\dfrac{حا\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}{\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}$ بوضع $\frac{ط}{٢}$ - س = ع

= $\underset{ع \leftarrow ٠}{\text{نها}}$ $\frac{حا ع}{ع}$ = ١

(٦) $\underset{أ\leftarrow ٠}{نها} \frac{١ - حتا أ}{أ^٢}$ ، $١ - حتا أ = ٢ حا^٢ \frac{أ}{٢}$ = $\underset{أ\leftarrow ٠}{نها} \frac{٢ حا^٢ \frac{أ}{٢}}{أ^٢}$

نضع $ع = \frac{أ}{٢}$ ، $أ = ٢ ع$ ، $أ^٢ = ٤ ع^٢$ وعندما $أ \leftarrow ٠$ فإن $ع \leftarrow ٠$

$= نها \frac{٢ حا^٢ ع}{٤ ع^٢} = \frac{١}{٢} \underset{ع\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا^٢ ع}{ع^٢} = \frac{١}{٢} (١) = \frac{١}{٢}$

<u>طريقة أخرى</u> بالضرب في مرافق ١- حتا أ $= نها \frac{١ - حتا أ}{أ^٢} \times \frac{١ + حتا أ}{١ + حتا أ}$

ولكن $١ - حتا^٢ أ = حا^٢ أ$ = $\underset{أ\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا^٢ أ}{أ^٢} \times \underset{أ\leftarrow ٠}{نها} \frac{١}{١ + حتا أ}$

$= ١ \times \frac{١}{١ + حتا ٠} = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$

(٧) $\underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا س + س^٢}{س} = \underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا س}{س} + \underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{س^٢}{س} = \underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا س}{س}$

$+ \underset{س\leftarrow ٠}{نها} س = ١ + ٠ = ١$

(٨) $نها ٢ س \times نها \frac{طا ٣ س}{٣س} = قا٢ (٠) \times ١ = \frac{١}{حتا ٠} = ١$

(٩) $\underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{حتا\left(\frac{ط}{٢} - س\right)}{س}$ ، $حتا (\frac{ط}{٢} - س) = حا س$

$= \underset{س\leftarrow ٠}{نها} \frac{حا س}{س} = ١$

(١٠) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}}$ بالضرب والقسمة على س

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \left[\text{س} \times \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}} \right] = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \text{س} \times \text{نها} \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}^2} = 0 \times 1 = 0$$

(١١) نضع $\text{ع} = \frac{1}{2}\text{س}$ $\text{س} = 2\,\text{ع}$ ، $\text{س}^2 = 4\,\text{ع}^2$ وعندما $\text{س} \leftarrow 0$

فإن $\text{ع} \leftarrow 0$ ، $\underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^2\text{ع}}{4\text{ع}^2} = \frac{1}{4} \frac{\text{حا}^2\text{ع}}{\text{ع}^2} = \frac{1}{4} = (1)\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(١٢) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حتا } 2\text{ س} - 2 \text{ حتا س} + 1}{\text{س}^2}$ ، $\text{حتا}2\text{س} = 1 - 2\text{حا}^2\text{ س}$

$$= \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{1 - 2\text{حا}^2\text{ س} + 1 - 2 \text{ حتا س}}{\text{س}^2} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{2 - 2 \text{ حتا س} - 2 \text{ حا}^2\text{س}}{\text{س}^2}$$

$= 2 \left(\text{نها} \frac{1 - \text{حتا س}}{\text{س}^2} - \text{نها} \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \right)$ ولكن $1 - \text{حتا س} = 2 \text{ حا}^2 \frac{\text{س}}{2}$

$= 2 \left(\text{نها} \frac{2 \text{ حا}^2 \frac{\text{س}}{2}}{\text{س}^2} - \text{نها} \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \right)$ نضع $\frac{\text{س}}{2} = \text{ع}$

$$= 2 \left(\underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \frac{2 \text{ حا}^2 \text{ع}}{\text{س}^2} - \underset{\text{س}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \underset{\text{ع}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{حا}^2\text{ع}}{\text{س}^2} - \text{نها} \frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) = -1$$

(١٣) بقسمة البسط والمقام على س^2،

المقدار = $\text{نها}\ \dfrac{١ + \dfrac{\text{حا}٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}{١ + \left(\dfrac{\text{حتا}٢\text{س}}{\text{س}}\right)^{٢}} = \dfrac{٤}{١+٤} = \dfrac{٤}{٥}$

(١٤) بقسمة البسطوالمقام على س

المقدار = $\dfrac{\text{نها}\ ٢ \times \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} + ٣\ \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}}}{٥\ \text{حتا}\ ٢\ \text{س}} = \dfrac{٢ \times ١ + ٣ \times ١}{٥ \times ١} = ١$

(١٥) بقسمة البسط والمقام على س^{٣}

المقدار = $\dfrac{\text{نها}\ ٢ + \dfrac{\text{حا}\ ٢\ \text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}}}{\text{س} - \left(\dfrac{\text{ظا}\ ٢\ \text{س}}{\text{س}}\right)^{٣}} = \dfrac{٤}{-٨} = -\dfrac{١}{٢}$

المجموعة الثانية

(١) $= \dfrac{١}{٢}\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{حا س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \text{ظا س} = \dfrac{١}{٢} \times ١ \times ٠ = ٠$ (√)

(٢) $\dfrac{٥}{٦}\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{ظا}٢\text{س}}{٢\ \text{س}} \times \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{حا}\ ٣\ \text{س}}{٣\ \text{س}} = \dfrac{٥}{٦}$ (X)

(٣) $= ٥\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{حا}\ ٣\ \text{س}}{\text{س}} = ١٥\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{حا}\ ٣\ \text{س}}{٣\ \text{س}} = ١٥$ (√)

(٤) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{١ - \left(١ - \text{حا}^{٢}\text{س}\right)}{\text{س}^{٢}} = ٢\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \dfrac{\text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}} = ٢$ (X)

(٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \left(\dfrac{١}{٢} + \dfrac{\text{حا}\ ٣\ \text{س}}{٢\ \text{س}}\right) = \dfrac{١}{٢} + \dfrac{٣}{٢} = ٢$ (√)

(٦) المقدار = ٣ (X)

(٧) (X)

(٨) (X)

(٩) (√)

(١٠) (√)

اجابة تمرين (٣)

(١) (أ) ت (هـ) = د (٢ + هـ) – د(٢) = (٢ + هـ)^{٢} + ٢ + هـ – (٤+٢)

= هـ^{٢} + ٥ هـ

∴ ت(٠,٠١) = ٠,٠٥٠١

(ب) م(هـ)$_{س=٢}$ = $\frac{هـ^{٢} + ٥ هـ}{هـ}$ = هـ + ٥ ∴ م(٠,٠١) = ٥,٠١

(جـ) معدل التغير$_{س=٢}$ = نهــــا$_{هـ \leftarrow ٠}$ (م(هـ)) = ٥

(٢) ت(هـ) = (س$_{١}$+هـ)^{٢} – ٣(س$_{١}$+هـ) + ١ –(س$_{١}^{٢}$ – ٣ س$_{١}$+١)

=٢س$_{١}$هـ + هـ^{٢} – ٣هـ

∴ م(هـ) = $\frac{هـ(٢ س١+هـ – ٣)}{هـ}$ = ٢ س١+هـ – ٣

(أ) م(٠,٣) = ٢×٥ + ٠,٣ – ٣ = ٧,٣

(ب) م(– ٠,٥) = ٢×٨ – ٠,٥ –٣ =١٢,٥

(٣) نحسب د(١+هـ) – د(١) = ١ + هـ – ١

∴ دالة التغير للدالة د عند س$_{١}$ =١ هى = م(هـ) = $\frac{د(١+هـ) – د(١)}{هـ}$

= $\frac{\sqrt{١ + هـ – ١}}{هـ}$

(٤) (أ) س$_{١}$ = ٢ ، س$_{١}$ + هـ = ٣ ∴ هـ = ١

د(٣) = ٢×٣+٣=٩ ، د(٢) = ٢×٢+٣=٧

ت(١) = ٩ – ٧ = ٢ ∴ م(١) = ١/٢ = ٢

(ب) س$_{١}$ = ٤، س$_{١}$ + هـ = ٠,٥ ∴ هـ = ٠,٥

د(٤,٥) = (٤,٥)^{٢} = ٢٠,٢٥ ، د(٤) = (٤)^{٢} = ١٦

ت(٠,٥) = ٢٠,٢٥ – ١٦ = ٤,٢٥

∴ م(٠,٥) = ٤,٢٥ / ٠,٥ = ٨,٥

(٥) ت(هـ) = د(٣+هـ) ــ د(٣)

= [أ (٣+هـ)^٢ + ب(٣+هـ) +٤] ــ [٩ أ +٣ب +٤]

= ٦أهـ + أ هـ^٢ + ب هـ

ت(١/٢) = ٦أ/٢ + ١أ/٤ + ١ب/٢ ∴ ٧/٤ = ١٢أ/٤ + أ/٤ + ٢ب/٤

∴ ٧ = ١٣ أ + ٢ ب ⟵ (١)

ولكن د(٣) = ٩ أ + ٣ ب + ٤

∴ ٤ = ٩ أ + ٣ ب + ٤ ∴ ٩ أ + ٣ ب = ٠

∴ ٣ أ + ب = ٠ ⟵ (٢)

و بحل المعادلتين (١) ، (٢) ∴ أ = ١ ، ب = ــ ٣

(٦) (أ) س١ =١ ، هـ = ١,٣ ــ ١ = ٠,٣ >٠

∴ د (س) = ٥ ــ ٢س

∴ م (٠,٣) = (٥-٢×١,٣) ــ (٥-٢×١) / ٠,٣ = -٠,٦ / ٠,٣ = -٢

لان م (٠,٣) = د (١,٣) ــ د (١)

(ب) س١ ، هـ = ٠,٦٤ ــ ١ = -٠,٣٦ < ١

∴ د(س) = √س

م (-٠,٣٦) = د(٠,٦٤) ــ د(١) / -٠,٣٦ = √٠,٦٤ ــ (٥ ــ ٢ × ١) / -٠,٣٦ = ٥٥ / ٩

(٧) (أ) د(١) = ٢(١)^٢ +٣=٥ ∴ هـ > ٠

∴ د(١+هـ) = ٦ ــ ٥(١+هـ) = ١ ــ ٥هـ

م(هـ) = (د(١+هـ) − د(١)) / هـ = [illegible] / هـ = [illegible] / هـ

هـ > ٠ ∴ د(١+هـ) = ٢(١+هـ)^{٢} +٣ = ٥+٤هـ + هـ^{٢}

م(هـ) = (٤ هـ +٢هـ^{٢}) / هـ = ٤+٢هـ

(ب) د(٣) = ٣ − ٣ = ٠ هـ > ٠ ∴ د(٣+هـ) = ٣+هـ +٣= هـ

م(هـ) = (هـ − ٠) / هـ = ١

هـ < ٠ ∴ د(٣+هـ) = ٦ − ٥ (٣+هـ) = − ٩ − ٥ هـ

م(هـ) = (− ٩ − ٥ هـ) / هـ

(٨) م(هـ) = (د(٠+هـ) − د(٠)) / هـ

= { (هـ٢ +٢ − ٠) / هـ ، هـ > ٠ ؛ (هـ٢ +٢ − ٠) / هـ ، هـ < ٠ }

∴ م(هـ)$_{س}$ = { هـ٢ +٢ ، هـ >٠ ؛ هـ + ٢ ، هـ <٠ }

نهـــا م (هـ) = نهـــا م (هـ) = ٢
هـ ⟵ ٠ هـ ⟵ ٠

∴ معدل التغير = ٢

(٩) نفرض طول نصف القطر = نق ، مساحة سطح القرص = ح

∴ $\text{ح} = \text{د}(\text{نق}) = \text{ط نق}^{٢}$

$$\text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(٧+\text{هـ}) - \text{د}(٧)}{\text{هـ}} = \frac{\text{ط}(٧+\text{هـ})^{٢} - ٤٩\ \text{ط}}{\text{هـ}} = \text{ط}(١٤ + \text{هـ})$$
$\text{نق}=٧$

∴ معدل تغير المساحة عند نق = ٧ = $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \text{ط}(١٤ + \text{هـ}) = ١٤\ \text{ط}$

$$= ١٤ \times \frac{٢٢}{٧} = ٤٤$$

(١٠) $\text{ق} = ١٠٠٠\ \text{س}^{٢}$

الطاقة = $(\text{ق})_{\text{س}=٢} = ١٠٠٠\ (٢)^{٢} = ١٠٠٠ \times ٤ = ٤٠٠٠$ أرج

الدفع = معدل تغير الطاقة بالنسبة الى التظاغط

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{١٠٠(\text{س}+\text{هـ})^{٢} - ١٠٠٠\text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= ١٠٠٠ \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س هـ} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= ١٠٠٠ \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٢\text{س}+\text{هـ})}{\text{هـ}} = ١٠٠٠\ (٢\text{س})$$

∴ الدفع = ٢٠٠٠ س

∴ الدفع = ٢٠٠٠ × ٢ = ٤٠٠٠ ارج/ سم

إجابة تمرين (٤)

المجموعة الأولى :-

أوجد المشتقة الأولى للدالة الآتية :

(١) $د(س) = (س^{٣} - س)(س^{٢} + ٤)$

$د'(س) = (س^{٣} - س)(٢س) + (س^{٢} + ٤)(٣س^{٢} - ١)$

(٢) $د(س) = (س^{٢} + ٢س + ٣)(٢س^{٢} - ٥س + ١)$

$د'(س) = (س^{٢} + ٢س + ٣)(٤س - ٥) + (٢س^{٢} - ٥س + ١)(٢س + ٢)$

(٣) $د(س) = (٤س^{٥} - ٦س^{٢})(٣س^{٢} - س^{٣})$

$د'(س) = (٤س^{٥} - ٦س^{٢})(٦س - ٣س^{٢}) + (٣س^{٢} - س^{٣})(٢٠س^{٤} - ١٢س)$

(٤) $د(س) = (٢س - ٢)(٤س - ١)$

$د'(س) = (٢س + ١)(٣س - ٢)(٤) + (٢س + ١)(٤س - ١)(٣) + (٣س - ٢)(٤س - ١)(٢)$

(٥) $د(س) = (٣س - ١)(٢س - ٣)(٤س + ١)$

$د'(س) = (٣س - ١)(٢س - ٣)(٤) + (٣س - ١)(٤س + ١) \times (٢) + (٢س - ٣)(٤س + ١)(٣)$

(٦) $د(س) = (٣س + ٢)^{٣}$

$د'(س) = = ٣(٣س + ٢)^{٣-١} \times (٣)$

$د'(س) = = ٩(٣س + ٢)^{٢}$

(٧) $د(س) = \frac{٤}{س+١}$ بشرط أن $س \neq -١$

$د'(س) = \frac{(س+١)(٠) - (٤)(١)}{(س+١)^{٢}} = \frac{-٤}{(س+١)^{٢}}$

(٨) $د(س) = \frac{٢س}{س^{٢}+٣}$

$د'(س) = \frac{(س^{٢}+٣)(٢) - (٢س)(٢س)}{(س^{٢}+٣)^{٢}} = \frac{٢س^{٢}+٦-٤س^{٢}}{(س^{٢}+٣)^{٢}} = \frac{٦-٢س^{٢}}{(س^{٢}+٣)^{٢}}$

(٩) $د(س) = \frac{\sqrt{س}}{١-س}$ بشرط ان $س \neq ١$

$$د'(س) = \frac{(1-س) \times \frac{1}{2\sqrt{س}} - \sqrt{س}\,(-1)}{(س-1)^2} = \frac{\frac{1-س}{2\sqrt{س}} + \sqrt{س}}{(1-س)^2}$$

(١٠) $د(س) = \frac{1-س+س^2}{1+س+س^2}$

$$د'(س) = \frac{(1+س+س^2)(-1+2س) - (1-س+س^2)(1+2س)}{(1+س+س^2)^2}$$

$$د'(س) = \frac{-1-س-س^2+2س+2س^2+2س^3-1+س-س^2-2س+2س^2-2س^3}{(1+س+س^2)^2}$$

$$د'(س) = \frac{-2+2س^2}{(1+س+س^2)^2}$$

$$د(س) = \frac{2س^2-2}{(1+س+س^2)^2}$$

١١) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى الذي معادلته

$ص = (2س^2 + 3)(1 - س^2)$ عندما $س = 1$

الحل

عندما $س = 1$ تكون $ص = (2(1) + 3)(1-1) = 0$

النقطة هي $(1 ، 0)$

$$\frac{دص}{دس} = (2س^2+3)(-2س) + (1-س)(4س)$$

$$\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=1} = (2+3)(-2(1)) + (1-1)(4\times1)$$

$$\frac{دص}{دس} = -10 + 0$$

$$= -10$$

معادلة المماس : $ص - ص_1 = م(س - س_1)$

ص - ٠ = -١٠ (س - ١)

ص = -١٠س + ١٠

معادلة المماس : ص + ١٠س - ١٠ = ٠

معادلة العمودي : ص - ٠ = $\frac{١}{١٠}$ (س - ١)

١٠ص = س-١

١٠ ص - س + ١ = ٠

١٢) أوجد النقطة الواقعة على المنحنى الذي معادلته :

ص= $\frac{س + ١}{س^{٢} + ٢س + ٥}$ والتي يكون المماس عندها موازيا المحور السيني

الحل

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{(س^{٢}+٢س+٥)(١) - (س+١)(٢س+٢)}{(س^{٢}+٢س+٥)^{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{س^{٢}+٢س+٥-٢س^{٢}-٢س-٢س-٢}{(س^{٢}+٢س+٥)^{٢}}$

$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-س^{٢}-٢س+٣}{(س^{٢}+٢س+٥)^{٢}}$

يكون المماس // محور السيني عندما $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ أي البسط = صفر

$-س^{٢}$ - ٢ س - ٣ = ٠

$س^{٢}$ + ٢س - ٣ = ٠

(س + ٣) (س - ١) = ٠

س = -٣   س = ١

وبالتعويض   ص = $\frac{-١}{٤}$ ، ص = $\frac{١}{٤}$

النقطتان هما (-٣ ، $\frac{-١}{٤}$) ، (١ ، $\frac{١}{٤}$)

١٣) أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته

$$\text{ص} = \frac{\text{٤س}}{\text{س}^{٢}+٤}$$ عند نقطة الأصل والنقطة (٢ ، ١)

الحل

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{(\text{س}^{٢}+٤)(٤)-(\text{٤س})(\text{٢س})}{(\text{س}^{٢}+٤)^{٢}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{٤س}^{٢}+١٦-\text{٨س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+٤)^{٢}} = \frac{١٦-\text{٤س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+٤)^{٢}}$$

$$\left.\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right|_{(٠،٠)} = \frac{١٦-٠}{(٠+٤)^{٢}} = \frac{١٦}{١٦} = ١$$

$$\left.\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right|_{(٢،١)} = \frac{١٦-١٦}{٦٤} = \frac{٠}{٦٤} =$$

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

$$\text{ص} = \frac{\text{٥س}}{\text{س}^{٢}+١}$$ عندما س = ٢

الحل

عندما يكون س = ٢ تكون $\text{ص} = \frac{٥\times٢}{١+٢^{٢}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$

النقطة هى (٢ ، ٢)

نوجد $$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٥+\text{٥س}^{٢}-\text{١٠س}^{٢}}{(١+\text{س}^{٢})^{٢}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٥-\text{٥س}^{٢}}{(١+\text{س}^{٢})^{٢}}$$

$$\left.\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right|_{(٢،٢)} = \frac{-١٥}{٢٥} = \frac{-٣}{٥}$$

معادلة المماس : $\text{ص} - ٢ = \frac{-٣}{٥}(\text{س} - ٢)$

$\text{٥ ص} - ١٠ = -٣\text{ س} + ٦$

$\text{٥ ص} + ٣\text{ س} - ١٦ = ٠$

ميل العمود = $\frac{٥}{٣}$

معادلة العمودي : ص - ٢ = $\frac{٥}{٣}$ (س - ٢)

٣ص - ٦ = ٥س - ١٠

٣ص - ٥س + ٤ = ٠

١٥) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى المعرف بالمعادلة :

ص = $\frac{٢س+١}{٣-س}$ عندما س = ٥

الحل

نوجد الاحداثي السيني للنقطة بمعلومية إحداثيها الصادي

٥ = $\frac{٢س+١}{٣-س}$

١٥ - ٥س = ٢س + ١

١٤ = ٧ س   س = ٢

النقطة هي (٢ ، ٢)

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{(٣ - س)(٢) - (٢س + ١)(-١)}{(٣ - س)^{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس}\Big|_{(٢،٥)} = \frac{٥+٢}{١} = ٧$

معادلة المماس : ص - ٥ = ٧ (س - ٢)

ص - ٧ س + ٩ = ٠

معادلة العمود : ص - ٥ = $\frac{-١}{٧}$ (س - ٢)

٧ ص - ٣٥ = - س + ٢

٧ص + س - ٣٧ = ٠

المجموعة الثانية

١ - أ - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١١٢س - ١٠٠

ب- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} + ٤س + ١

جـ - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (س^{٢} - ٢س+١) × ٦س^{٢} + (٢س^{٣} + ٥) (٢ س - ٢)

د - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٣س^{٢} - ٤ س - ٥

هـ - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (س^{٤} + ٢ س - ٣) (٦ س^{٥} - ٣٥ س^{٤} + ٢٤س^{٢} + ١٨ س) +
(س^{٦} - ٧ س^{٥} + ٨ س^{٣} + ٩ س^{٢} +١) (٤س^{٣} + ٢)

و - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٦س^{٥} - ٢٠س^{٤} - ٨س^{٣} + ٢٤س^{٢}

ل - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٢س}^{٢}\text{-٤}}{\text{س}^{٢}}$

م - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٣س}^{٤}\text{ - ٤ - ٨س}^{٣}\text{ ٦س}^{٢}}{\text{س}^{٦}}$

ن- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٢٣}}{\text{(٤س+٣)}^{٢}}$

ك- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{-٤س}}{\text{(س}^{٢}\text{-١)}^{٢}}$

ي - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{١-س}^{٢}}{\text{(س}^{٢}\text{+١)}^{٢}}$

٢- د$'$ (س) = $\frac{\text{-٢أ}}{\text{(س - أ)}^{٢}}$

د$'$(٢) = $\frac{\text{-٢أ}}{\text{(٢ - أ)}^{٢}}$ = -٢

∴ أ = ٤-٤أ+أ^{٢} أ^{٢} - ٥ أ + ٤ = ٠ (أ - ٤) (أ - ١) = ٠

∴ أ = ٤ أو أ = ١

٣- د (٠) = $\frac{جـ}{٢}$ = ٢   ∴ جـ = ٤ ....(١)

د$'$(س) = $\dfrac{(س^{٢}+٣س+٢) (٢ س + ب) - (س^{٢}+ب س +جـ) (٢ س + ٣)}{(س^{٢}+٣س+٢)^{٢}}$

د$'$(٠) = $\dfrac{٢ ب - ٣ جـ}{٤}$ = -٤   ٢ب - ١٢ = -١٦

٢ ب = -٤   ب = -٢

٤- أ - معادلة المماس : ٢٤س -ص + ١٢٠ = ٠

معادلة العمودي : س + ٢٤ص +٥ = ٠

ب- معادلة المماس : س - ص +٢ = ٠

معادلة العمودي : س + ص = ٠

جـ - معادلة المماس : ٥ س - ص - ٧ = ٠

معادلة العمودي : س + ٥ ص - ١٧ = ٠

المجموعة الثالثة

١- أ - ٧ (س + ٢)^{٦}

ب - ١٥ (٣س - ١)^{٤}

جـ ٤ (٢س + ٣) (س^{٢} = ٣ س - ٢)^{٣}

ء - ٣س^{٤} (٤ س + ٥) (س + ٣)^{٦}

هـ (س^{٢}+ ٢ س - ٢)^{١٥} (٢س + ٥)^{١٢} [٢٦ (س^{٢} +٢س - ٣) + ٣٢ (٢ س + ٥) (س + ١)]

و - $\dfrac{-(س + ٩) (س +١)^{٣}}{(س - ١)^{٦}}$

م- $\dfrac{(س^{٢} + ١)^{٥} (٣ س - ٨)^{٨}}{(س^{٢} + ٥ س - ٤)^{٦}}$ ($\dfrac{١٠س}{س^{٢}+١}$ + $\dfrac{٢٤}{٣س-٧}$ - $\dfrac{٦ (٢ س + ٥)}{س^{٢} +٥س-٤}$)

٢ أ - ٢٤(٢ س + ٥)^{١١}

ب - $\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ٣}}$

جـ - $\frac{١٢١٥ س^{٤}}{(٢ س + ١)^{٦}}$ حيث $س \neq -\frac{١}{٢}$

د - $\frac{-٢٣ س (س^{٢} + ١)^{٧}}{(س^{٢} - ١)^{٩}}$ حيث $س \neq \pm ١$

٣- أ - $\frac{-س^{٣}}{٤ ص^{٣}}$

ب - $\frac{٤ س - ٣ ص + ١}{٣ س - ٢ ص - ٢}$

جـ - $\frac{-(٣ س^{٢} + ٤ س ص - ص^{٢})}{٢ س^{٢} - ٢ س ص + ٦ ص^{٢}}$

د - $\frac{-(٥ س^{٤} - ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٣ ص^{٤})}{-٤ س^{٣} ص + ١٢ س ص^{٣} - ٥ ص^{٤}}$

هـ - $\frac{ب^{٢} س}{أ^{٢} ص}$

و - ١

م - $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(١ ، ٢)} = ٣$

المجموعة الرابعة

١) $ص = \left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}\right)^{ن} \longrightarrow \frac{دص}{دس} = ن \left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}\right)^{ن - ١} \times$

$$\frac{(س^{٢} - ١) \times ٢ س - (س^{٢} + ١) \times ٢ س}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$$

$$= ن \left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}\right)^{ن} \left(\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}\right) \times \frac{-٤ س}{(س^{٢} - ١)^{٢}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ن ص \frac{-٤س}{س^٢-١}$$

$$(١-س^٢)\frac{ءص}{ءس} = ٤ ن س ص$$

٢) $د'(س) = ٣س^٢ - ٦س - ٢٤$

$= ٣س^٢ - ٦س - ٢٤ = ٠$ ∴ $٣(س^٢ - ٢س - ٨) = ٠$

$٣(س-٤)(س+٢) = ٠$ ∴ $س = ٤$ أو $س = -٢$

٣) أ- $ص = (س-١)^٢(س+١)$

∴ $ص' = (س-١)(٣س=١)$

ب- $ص' = س × \frac{-٢س}{٢\sqrt{١-س^٢}} + \sqrt{١-س^٢} = \frac{١-٢س^٢}{\sqrt{١-س^٢}}$

٤) $ص' = ٦س^٢\sqrt{٣س-٦} + \frac{٣}{٢\sqrt{٣س-٦}} × ٢س^٣$

∴ $د'(٠) = ٦×٢٥\sqrt{٩} + \frac{٣}{\sqrt{٩}} × ١٢٥ = ٥٧٥$

٥) $\frac{ءص}{ءس} = (٢س)(س^٣+٢س)(س^٤+٥س^٢) + (س^٢+١)(٣س^٢+٢)$

$(س^٤+٥س^٢) + (س^٢+١)(س^٣+٢س)(٤س^٣+١٠س)$

٦) $\frac{ءص}{ءس} = ن(س^٢-١)^{ن-١} × ٢س$

الطرف الأيمن = $٢ن س ص + (١-س^٢)\ ٢ن س(س^٢-١)^{ن-١}$

$= ٢ن س(س^٢-١)^٢ - ٢ن س(س^٢-١)^ن =$ صفر

٧) $ص = \frac{٣-٢س}{٣+٢س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{(-٢)(٣+٢س) - (٣-٢س)×٢}{(٣+٢س)^٢} = \frac{-١٢}{(٣+٢س)^٢}$

$\therefore \frac{-٤}{٣} = \frac{-١٢}{(٣+س^{٢})^{٢}}$ ومنها س = صفر أو - ٣

٨) $ص = (٣س)^{\frac{١}{٢}} + (٣س)^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}} \times ٣ - \frac{١}{٢}(٣س)^{-\frac{٣}{٢}} \times ٣$ نأخذ عامل مشترك

$= \frac{٣}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}}\left[١ - (٣س)^{-١}\right] = \frac{٣}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}}\left(١ - \frac{١}{٣س}\right)$

$= \frac{٣}{٢}(٣س)^{-\frac{١}{٢}}\left(\frac{٣س - ١}{٣س}\right) = \frac{٣س - ١}{٢ س \sqrt{٣س}}$ بالضرب في $\sqrt{٣س}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{(٣س - ١)\sqrt{٣س}}{٦س^{٢}}$

٩) $ص = \left(\frac{س^{٢} - ٢}{س^{٢} + ١}\right)^{ن}$

إجابة تمرين (٥)

(١) ص/ = ٢ س+ ٥ – (-حا س) = ٢ س + ٥ + حا س

(٢) ص/ = حتا (٥ س^٢ + ٣س + ١) × (١٠س + س) = (١٠س + س) حتا (٥ س^٢ + ٣ س + ١)

(٣) ص/ = - حا (٥ س + ٣) × ٥ = - ٥ حا (٥ س + ٣)

(٤) ص/ = ٥ [حتا(٣ س + ١)]^٤ × (- حا (٣ س + ١) × ٣
= -١٥ حتا^٤ (٣ س + ١) حا(٣س + ١)

(٥) ء/ءس (طا ٢س)^٦ = ٦ (طا٢س)^٥ قا^٢ ٢ س× ٢ = ١٢ طا^٥ ٢ س قا^٢ ٢ س

(٦) ءص/ءس = حا (٣س + ١) (- حا٧ س) × ٧ + حتا ٧س×حتا(٣س+١) × ٣
= - ٧ حا (٣ س + ١) حا ٧ س + ٣ حتا ٧ س × حتا (٣ س + ١)

(٧) <u>الطريقة الأولى</u> : ص = حتا ٥ س حا ٣ س

ءص/ءس = حتا ٥ س حتا ٣س × ٣ + حا ٣ س (-حا ٥ س) × ٥ = ٣ حتا ٥ س حتا ٣ س – ٥ حا ٣ س حا ٥ س

<u>الطريقة الثانية</u> : استخدام حتا أ حا ب = ١/٢ [حا (أ + ب) – حا (أ – ب)]

ص = ١/٢ [حا ٨ س – حا ٢ س]

ءص/ءس = ١/٢ [٨ حتا ٨ س – ٢ حتا ٢ س] = ٤ حتا ٨ س – حتا ٢ س

وباستخدام القاعدتين : حتاأ حتاب = ١/٢ [حتا (أ + ب) + حتا (أ – ب)]

حاأ حاب = ١/٢ [حتا (أ – ب) – حتا (أ + ب)]

ءص/ءس = ٣/٢ [حتا ٨ س + حتا ٢ س] - ٥/٢ [حتا ٢ س – حتا ٨ س]

= ٣/٢ حتا ٨ س + ٣/٢ حتا ٢ س + ٥/٢ حتا ٨ س

= ٨/٢ حتا ٨ س - ٢/٢ حتا ٢س = ٤ حتا ٨ س – حتا ٢ س

(٨) (أ) $\frac{ء}{ءس}$ (طا ٤٥) = $\frac{ء}{ءس}$ (١) = صفر

(ب) $\frac{ء}{ءس}$ جا ٣ ك = ٠

(جـ) $\frac{ء}{ءس}$ (حا^{٢} ٥س + حتا^{٢} ٥ س) = $\frac{ء}{ءس}$ (١) = صفر

(٩) (أ) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{س٥حا٥ -س ٣حتا٣}}{\sqrt[١٠]{(\text{ س٥حتا + س ٣حا })^{٩}}}$

(ب) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٥ [حتا $\sqrt[٧]{\text{س}^{٢} + ١}$]^{٤} × - حا $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ١}$

× $\frac{\text{س ٢}}{٧ \sqrt[٧]{(\text{ س}^{٢} + ١)^{٢}}}$

(١٠) $\frac{ء}{ءس}$ [-حتا ٢ $(\frac{\text{س}}{٢})$] = $\frac{ء}{ءس}$ [-حتا س] = - (- حا س) = حا س

(١١) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣طا^{٢} (٢س – ٥) قا^{٢} (٢س – ٥) × ٢

= ٦طا^{٢}(٢س – ٥) قا^{٢} (٢س – ٥)

(١٢) ص = حتا س = حا ($\frac{\text{ط}}{٢}$ - س) ولكن تفاضل حا س = حتا س

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = حتا($\frac{\text{ط}}{٢}$ - س) × (-١) =حاس

(١٣) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = حتا^{٢} × ٣س^{٢} = ٣س^{٢} حتاس^{٢}

ص$'$ = ٣حتا^{٢} (٣-س) × [-حا (٣-س)] × (-١)

= $\frac{٣}{٢}$ حتا (٣-س) [٢حا (٣ -س) حتا (٣ - س)]

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{٣}{٢}$ حا٢(٣-س) حتا (٣-س) وعند س = ٣٣

(١٤) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{٣}{٢}$ حا ٢ (-٣٠) حتا (-٣٠) = $\frac{٣}{٢}$ (- حا ٦٠) × حتا ٣٠

= - $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{-٩}{٨}$

(١٥) حا س + حتا ص = س + ص بالتفاضل الضمني

حتا س – حا ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ١ + $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{حتا س - ١}}{\text{حا ص + ١}}$

(١٦) س (ـ حا ص) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + حتا ص = حتا (س + ص) (١ + $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$)

-[حتا (س + ص) ـ حتا ص] = [س حا ص + حتا (س + ص)] $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{حتا ص - حتا (س+ ص)}}{\text{س حا ص + حتا (س + ص)}}$

(١٧) ص = حا^{٣} (س ـ ٦)^{٢}

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ حا^{٢} (س ـ ٦)^{٢} حتا (س ـ ٦)^{٢} × ٢ (س ـ ٦) × ١

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣ (س ـ ٦) حا (س ـ ٦)^{٢} وعند س = $\frac{\text{ط}}{\text{ه}}$ = ٣٦

∴ د/ ($\frac{\text{ط}}{\text{ه}}$) ٣($\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$) حا (٣٠)^{٢} حا ٢ × (٣٠)^{٢} = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ حا ٩٠٠ حا٢×٩٠٠ = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

حاهطحا١٠ط = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ × ٠ = صفر

(١٨) ص = حا٩٠ + حتا $\sqrt{\text{س}}$ = ١ + حتا $\sqrt{\text{س}}$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ـحا $\sqrt{\text{س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ = ـ حا $\sqrt{\text{س}}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

(١٩) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = حتا س ـ $\frac{١}{٣}$ × ٣ حا^{٢} س حتا س = حتاس [١ ـ حا^{٢} س]

= حتا س حتا^{٢} س = حتا^{٣}س

(٢٠) س = ص طا ٢س

١ـص(٢قا^{٢} ٢س) + طا ٢ س ($\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$)

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ طا ٢ س + ٢ ص قا^{٢} ٢ س = ١

إجابة تمرين (٦)

(١) ق (جـ) = ٥٩ ° ∴ $= \frac{150}{\text{جا } 48} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } 73} = \frac{\text{جـ}'}{\text{جا } 59}$

∴ ب´ = ١٩٣سم ، جـ´ = ١٧٣ سم ∴ محيط Δ = ٥١٦ سم

(٢) ق (< جـ) = ٣٠° ∴ $= \frac{\text{أ}'}{\text{جا } 105} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } 45} = \frac{20}{\text{جا } 30}$

∴ أ´ = ٤٠ جا ١٠٥ = ٣٩سم ، ب´ = ٢٨سم

(٣) ق (< ب) = ٤٠° ∴ $= \frac{\text{أ}'}{\text{جا } 82} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } 40} = \frac{42{,}4}{\text{جا } 58} =$ ٢نق

∴ ب´ = ٣٢,١٤ سم

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ٠,٥ × ٣٢,١٤ × ٢٤,٤ × جا ٨٢ = ٦٧٤,٨سم^2

، ٢ نق = $\frac{42{,}4}{\text{جا } 58}$ = ٥٠ ∴ نق = ٢٥سم

(٤) < (جـ) = ٦٣° ∴ $\frac{\text{أ}'}{\text{جا } 21' \ 62°} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا } 39' \ 54°} = \frac{9{,}25}{\text{جا } 63}$

∴ أ´ = ٩,٢ سم ، ب´ = ٨,٤٦ سم ∴ محيط Δ = ٢٦,٩١ سم

(٥) ∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } 110} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } 45} = \frac{12{,}5}{\text{جا } 25}$

∴ أ جـ = ٢٧,٨ ، ب جـ = ٢٠,٩ = أ ء = ٥٠,٢ سم^2

∴ مساحة المتوازي = ٢Δ أ ب جـ = ٢ × $\frac{1}{2}$ × ١٢,٥ × ٢٠,٩ × جا ١١٠

= ٢٤٥,٦ سم^2

(٦) القطران يتقاطعان في م ∴ Δ أم ب فيه: < (م) = ٤٠´ ٩٨°

∴ $\frac{\text{أ م}}{\text{جا } 58' \ 44°} = \frac{\text{ب م}}{\text{جا } 22' \ 36°} = \frac{20}{\text{جا } 40' \ 98°}$

∴ أم = ١٤,٣ ، أ جـ = ٢٨,٦ ∴ ب م = ١١,٩ ∴ ب ء = ٢٣,٨

∴ مساحة المتوازي = ٤Δ أ م ب = ٤ × ٠,٥ × ١٤,٣ × ١١,٩ × جا ٤٠´

(٧) ∴ ظا ب = ٤ / ٣ ∴ ∠(ب) = 48َ ٧ ٥٣ْ

∴ ظا جـ = ٨ / ١٥ ∴ ∠(ب) = ٢٠ً ٤َ ٢٨ْ ∴ ∠(أ) = ٥٢ً ٤٧َ ٩٨ْ

∴ ١٣,٥ / جا ٤٧َ ٩٨ْ = بَ / جا ٧َ ٥٣ْ = جـَ / جا ٤َ ٢٨ْ ∴ بَ = ١٠,٩ سم ، جـَ = ٦,٤ سم

(٨) ∠ب = ٢٧َ ٧٣ْ

∴ أَ / جا ١٥َ ٦٤ْ = بَ ١٢,٦ / جا ٢٧َ ٧٣ْ = جـَ / جا ١٨َ ٤٢ْ

∴ أَ = ١١,٨٤ ، جـَ = ٨,٨٥ ∴ المحيط = أَ + بَ + جـَ = ٣٣,٢٩

مساحة∆ = ٠,٥ × ١١,٨٤ × ١٢,٦ × جا ١٨َ ٤٢ْ = ٥٠,٢ سم٢

، نق = بَ / ٢جا ب = ١٢,٦ / ٢× جا ٢٧َ ٧٣ْ = ٦,٥٧ سم

(٩) ∠(جـ) = ١٠ْ ∴ بَ / جا ب = جـَ / جا جـ ∴ بَ = ٣٩,٩ سم

نق = ٤ / جا ١٠ = ٢٣,٠٩ مساحة ∆ = ٠,٥ × ٣٩,٩ × ٨ × جا ٥٠

= ١٢٢,٢ سم٢

(١٠) ∠(جـ) = ٥٣ْ

∴ أَ / جا ٨٠ = بَ / جا ٤٧ = ٧,٦ / جا ٥٣

∴ أَ = ٩,٤ سم ، بَ = ٧ سم ∴ محيط ∆ = ٢٤ سم

∴ جـَ / جا جـ = ٢ نق ∴ ٧,٦ / جا ٥٣ = ٢ نق

∴ نق = ٤,٨

إجابة تمرين (٧)

(١) أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} − ٢ ب´ جـ´ جتا أ   (١١,٣)^{٢}+(١٥,٢)^{٢} -٢×١١,٣×١٥,٢× جتا ٧٠

∴ أ´ = ١٥,٥ سم

(٢) أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع وهي جـ جتا أ = $\frac{(٥٠)^{٢} + (٦٠)^{٢} - (٨٠)^{٢}}{٢ \times ٥٠ \times ٦٠}$ = - $\frac{١}{٢}$

(٣) ∴ المحيط = ٢٢   ∴ نصف المحيط = ١١

∴ أ ب + أ ء = ١١   ∴ نفرض أ ب = س   ∴ أ ء = ١١ − س

Δ أ ب ء فيه:

(ب ء)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ ء)^{٢} − ٢أب جتا أ   دائري

٤٩ = س^{٢} + (١١-س)^{٢} − ٢× س× (١١-س) جتا ٦٠   ∴ س^{٢} − ١١ س + ٢٤ = ٠

∴ (س- ٣) (س − ٨) = ٠   ∴ س = ٣ ، س = ٨

∴ أ ب = ٣ سم أ، ٨ سم   أ ء = ٨ سم أ، ٣ سم

(٤) أ´^{٢} = ب´^{٢} + جـ´^{٢} − ٢ ب´ جـ´ جتا أ = (١٠)^{٢}+(٨)^{٢} - ٢ ×١٠ × ٨ × $\frac{٢}{٥}$ = ١٠٠

∴ أ´ = ١٠ سم

(٥) Δ أ ب جـ فيه : ∠ ب أ جـ = ٧٨   ∴ $\frac{ب جـ}{جا ٧٨}$ = $\frac{أ ب}{جا ٧٣}$

∴ أ ب = $\frac{٢٠ جا ٧٣}{جا ٧٨}$ = ١٩,٥٥

في Δ أ ء ب

(أء)^{٢} = (بء)^{٢} + (أب)^{٢}- ٢× بء× أب جتا ٢٩ = (١٠)^{٢} + (١٩,٥٥)^{٢}-٢ ×١٠×١٩,٥٥ جتا ٢٩

أ ء = ١١,٨٤ سم

أ
جـ   ٧٣°   ء   ٢٩°   ب

(٦) Δ أ ب جـ جتا ب = $\frac{٨١+٢٥-١٢١}{٢ \times ٧ \times ٢٥}$ = - $\frac{١}{٦}$

Δ أ جـ ء جتا ء = $\frac{٨١+٦٤-١٢١}{٢ \times ٩ \times ٨}$ = $\frac{١}{٦}$

∴ ∠ ب ، ∠ ء متكاملتان ∴ الشكل دائري

(٧) Δ أ ب جـ قائم لأن : $\overline{أب}^2 + \overline{جـ أ}^2 = \overline{ب جـ}^2 = ٦٢٥$

∴ ق (> أ) = ٩٠° .. أ ء متوسط من رأس القائمة

∴ أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ = $١٢\frac{١}{٢}$ جتا جـ = $\frac{٤٩ + ٦٢٥ - ٥٧٦}{٢ \times ٧ \times ٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

∴ > (جـ) = ٤٤َ ٧٣° Δ أ جـ ء : $\overline{ء}^2 = \overline{أجـ}^2 + \overline{جـء}^2 - ٢ \times$ أ جـ × جـء جتا جـ

= ٤٩ +(١٢,٥)^2 - ٢×٧×١٢,٥ = ١٥٦,٢٥ .. أ ء = ١٢,٥ سم

(٨) $\frac{جا أ}{٣}$ = $\frac{جا ب}{٤}$ = $\frac{جا جـ}{٦}$ ــــ (١)

، $\frac{أ}{جا أ}$ = $\frac{ب}{جا ب}$ = $\frac{جـ}{جا جـ}$ ــــ (٢) بضرب (١) × (٢)

$\frac{أ}{٣}$ = $\frac{ب}{٤}$ = $\frac{جـ}{٦}$ = ك ∴ أ = ٣ ك ، ب = ٤ك ، جـ = ٦ك

جتا ب = $\frac{٣٦ك^2 + ٩ك^2 - ١٦ك^2}{٢ \times ٦ك \times ٣ك}$ = $\frac{٢٩}{٣٦}$ ∴ ق(> ب) = ٢٠َ ٣٦°

جتا جـ = $\frac{٩ك^2 + ١٦ك^2 - ٣٦ك^2}{٢ \times ٣٦ك \times ٤ك}$ = $\frac{-١١}{٢٤}$ ∴ ق(> جـ) = ١٦َ ١١٧°

(٩) Δ أ م ب : (أ ب)^2 = (ام)^2 + (م ب)^2 - ٢ام × م ب جتا أ م ب

= ٦٤ + ١٠٠ - ٢×٨×١٠ جتا ٥٠ = ٦١,١٥٤ ∴ أ ب = ٧,٨ سم

Δ أ م ء : ٦٤+١٠٠-٢×٨×١٠ جتا ١٣٠ = ٢٦٦,٨ ∴ أ ء = ١٦ سم

(١٠) أ : ب :جـ = ٣ : ٥ : ٧ ∴ أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك ، جـ = ٧ ك

∴ أكبر زاوية هي جـ

∴ جتا جـ = $\frac{٩ك^2 + ٢٥ك^2 - ٤٩ك^2}{٢ \times ٣ك \times ٥ك}$ = - $\frac{١}{٢}$ ∴ ق(> جـ) = ١٢٠°

إجابة تمرين (٨)

(١) جـ´٢ = أ´٢ + ب´٢ - ٢أ´ب´ جتا جـ ، (٣٢)٢ + (٤٠)٢ - ٢ × ٣٢ × ٤٠ جتا ٢٨´ ٢ ١١٢°

∴ جـ´ = ٦٠,٠٢سم ، $\frac{\text{أ´}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا جـ}}$

∴ جا ب = $\frac{\text{٤ × جتا ٢٨´ ٢ ١١٢°}}{\text{٦٠,٠٢}}$ ∴ ق (< ب) = ١´ ٣٨° ∴ ق (< أ) = ٣١´ ٢٩°

(٢) جـ´٢ = أ´٢ + ب´٢ - ٢أ´ب´ جتا جـ = ٢٥٠٠ + ٦٤٠٠ - ٢ × ٥٠ × ٨٠ × جتا ٧٢

∴ جـ´ = ٨٠,١٧ سم ، $\frac{\text{٥٠}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٨٠,١٧}}{\text{جا ٧٢}}$ ∴ ق (< أ) = ٢٣´ ٣٦°

(٣) (٣٧)٢ + (٥٦)٢ - ٢ × ٢٧ × ٢٦ جتا ١٦´ ٤٣° = ١٤٨,٥ ∴ جـ´ = ٣٨,٦ سم

$\frac{\text{٣٧}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٣٨,٦}}{\text{جا ٢٣´ ٣٦°}}$ ∴ ق (< أ) = ٧´ ٤٨°

(٤) ق (< جـ) = ٥٣´ ١٤°

$\frac{\text{١٨,٥٩}}{\text{جا ٢´ ٥٧°}} = \frac{\text{ب´}}{\text{جا ٥´ ١٠٨°}} = \frac{\text{جـ´}}{\text{جا ٥٣´ ١٤°}}$ ∴ ب´ = ٢١,٤٧ سم ، جـ´ = ٥,٨

(٥) جتا أ = $\frac{\text{(٢٦)٢ – (١٤)٢ + (١٨)٢}}{\text{١٤ × ١٨ × ٢}}$ ∴ ق (< أ) = ٢´ ١٠٨°

جتا ب = $\frac{\text{(١٨)٢ – (٢٦)٢ + (١٤)٢}}{\text{٢ × ١٤ × ٢٦}}$

∴ ق (< ب) = 15″ ١٠´ ٤١° ∴ ق (< جـ) = ١٤″ ٤٧´ ٦٠°

(٦) جتا س = $\frac{\text{٢٥ + ٤٩ - ٩}}{\text{٢ × ٥ × ٧}} = \frac{\text{١٣}}{\text{١٤}}$ ∴ ق (< س) = ٤٧´ ٢١°

جتا ص = $\frac{\text{٤٩ + ٩ - ٢٥}}{\text{٢ × ٧ × ٣}}$ ∴ ق (< ص) = ١٣´ ٣٨°

جتا ع = $\frac{\text{٩ + ٢٥ – ٤٩}}{\text{٢ × ٣ × ٥}}$ ∴ ق (< ع) = ١٢٠°

(٧) جـ´ ^٢^ = أ´ ^٢^ + ب´ ^٢^ ـ ٢ أ´ ب´ جتا = ١٢٩٦ + ٧٢٩ ـ ٢ × ٣٦ × ٢٧ × جتا ٢٨°

∴ جـ´ = ٣٠,٨ سم $\qquad \dfrac{\text{١٨,٥٩}}{\text{جا ٢´ ٥٧}} = \dfrac{\text{ب´}}{\text{جا ٥´ ٥١٠٨}} = \dfrac{\text{جـ´}}{\text{جـ ٥٣´ ٥١٤}}$

∴ ق (< أ) = ٥٧´ ٥٤٦ ، ق (< ب) = ٥٩´ ٥٧٦

(٨) مساحة سطح Δ = $\dfrac{١}{٢}$ س´ص´ جا ع = $\dfrac{١}{٢}$ × ٥ × ص´ جا ٦٠ = ٥ $\sqrt{٣}$

∴ ب´ = ١٢ سم جتا ع = $\dfrac{\text{س - ٢ ´ص + ٢´}}{\text{٢´ع}}$ ∴ جتا ٦٠ = $\dfrac{\text{٢٥ + ١٤٤ ـ ع´}^{٢}}{\text{٢ × ٥ × ١٢}}$

∴ ع´ ^٢^ = ١٠٩ ، ع ^٢^ = ١٠,٤٤ سم $\quad \dfrac{\text{٥}}{\text{جا س}} = \dfrac{\text{١٢}}{\text{جا ص}} = \dfrac{\text{١٠,٤٤}}{\text{جا ٦٠}}$

ومنها ق (< أ) = ٣٠´ ٥٢٤ ∴ ق (< ب) = ٣١´ ٥٨٤

(٩) جتا أ = $\dfrac{\text{(٢٩)}^{٢} + \text{(١٧)}^{٢} - \text{(٢٠)}^{٢}}{\text{٢ × ٢٩ × ١٧}}$

ق (< ب) = ١٤´ ٥٤٢ ق (< جـ) = ١٨٠ ـ

(٥١´ ٥٢٤ + ١٤´ ٥٤٣) = ٥٥´ ٥١٠٢

(١٠) د (س) = ٥٧٠

∴ $\dfrac{\text{١٠}}{\text{جا ٧٠}} = \dfrac{\text{ص´}}{\text{جا ٦٢}} = \dfrac{\text{ع´}}{\text{جا ٤٨}}$ ∴ جـ´ = ٧,٩ سم

إجابة تمرين (٩)

(١) Δ أجـء: ∠(جـ أ ء) = ٨° ٣٧′

أجـ / جا ٢٧° ١٢′ = ١٦ / جا ٨° ٣٧′ ∴ أجـ = ٤٨,٨١

Δ أ ب جـ: أ ب / جا ٣٥° ٤٩′ = أ جـ / جا ٩٠ ∴ أب = ٢٨,٥٦

(٢) Δ أء جـ: ∠(ء أ جـ) = ٢٥° ١٥′ ، أ ء / جا ٤٢° ١٥′ = ٢٣٥ / جا ٢٥° ١٥′ ∴ أء = ٣٧٠,٤

Δ أب ء: أ ء / جا ٩٠ = ع / جا ١٧° ٣٠′ ∴ ع = ٣٤٢

(٣) Δ أ ب جـ: ٧٠ / جا٤٥ = أ′ / جا٤٥ = جـ′ / جا٩٠ ∴ أ′ = ٧٠ متر

Δ أ ء جـ: ب′ = ٩٩ ∴ ٩٩ / جا ٢٠ = أ جـ / جا ٢٥ ∴ ء جـ = ١٢٢متر

(٤) Δ أ ء جـ: أ ء / جا ١٢° ٣٥′ = ٧٥ / جا ٥٤° ٥٣′ ∴ أ ء = ١٩١,٩ متر

Δ أبء: أب / جا ١٧° ٢٨′ = ١٩١,٩ / جا ٩٠° ∴ أ ب = ٣٥,٩ (ارتفاع البرج)

(٥) Δ أ ب ء: ∠(أ) = ٣٥° ٣٤′ ق(∠ أ ب ء) = ١١° ١٤′

∴ ٨,٢٥ / جا ١١° ١٤′ = ب ء / جا ٣٥° ٣٤′ ∴ ب ء = ٢٤,٦٣

Δ ب جـ ء قائم ∴ ء جـ = ب ء جا ٤٣° ١٢′ = ١٧ متر (ارتفاع البرج)

(٦) Δ أ ب ء : ق (∠أ) = ٢٤° ٣٦′ ق(∠ب ء أ) = ٢٧° ٢٤′

ب ء / جا ٢٤° ٣٦′ = ٢٠ / جا ٢٧° ٢٤′ ∴ ب ء = ١٨,٠٩

Δ ب جـ ء: ب ء / جا ٩٠ = ع / جا ٣٨ ∴ ع = ١٨,٠٩ × جا ٣٨ = ١١,٤ متر

(٧) Δ أ هـ ء : هـ ء = ب جـ = ٦٠° ق (∠ أ هـ ء)= ٣٠° ، ∴ ق(∠ هـ أ ء) = ٦٠°

∴ أ هـ / جا ٣٠ = ٦٠ / جا ٦٠ ∴ أ هـ = ٣٤,٦ ب هـ = ١٥٠ ـ ٣٤,٦ = ١١٥,٤

، ∵ ب هـ = ء جـ ∴ ارتفاع البرج الأول = ١١٥,٤

أ
هـ
ء
البرج الأول
البرج الثاني
ب
د

(٨) Δ أ ب جـ: $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٤٨' ٢٢°} = \frac{٣٠}{\text{جا } ١٢' ٣٢°}$ ∴ ب جـ = ١,٨١٦

Δ ب ء جـ: ع = ب جـ جا ٣٥
= ١,٨١٦ × جا ٣٥ = ١٢,٥

(٩) < أ جـ ب = ٥٧°

Δ أ ب جـ: $\frac{\text{ب}'}{\text{جا } ٥٧} = \frac{١٥٠٠}{\text{جا } ٥٧}$ ∴ ب' = ١٧٢٧,٦ Δ أ جـ ء قائم

∴ جـ ء = أ جـ جا أ = ١٧٢٧,٦ × جا ٤٨ = ١٢٨٤ متر

(١٠) البرج جـ ء ، المئذنة أ ب ق(< جـ أ هـ) = ٢٧' ٣٢° ق(< جـ ب ء) = ٥٢' ٥٧°

ق(< أ جـ ب) = ٥٢' ٥٧° - ٢٧' ٣٢° ∴ < أ جـ ب = ٢٥' ٢٥°

ق(< ب أ جـ) = ٩٠ + ٢٧' ٣٢° = ٢٧' ١٢٢° Δ أ ب جـ $\frac{٣٧}{\text{جا } ٢٥' ٢٥°} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا } ٢٥' ١٢٢°}$
ب جـ = ٧٢,٧٤ ∴ Δ ب جـ ء قائم
∴ ارتفاع البرج جـ ء جا ٥٢' ٥٧° = ٧٢,٧٤ × جا ٥٢' ٥٧°

(١١) أ ب = ١٠٠٠ متر في Δ أ ب جـ: < أ ب جـ = ١٠٦ ، < أ جـ ب = ٤٩

∴ $\frac{١٠٠٠}{\text{جا } ٤٩} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا } ١٠٦}$ ∴ أ جـ = $\frac{١٠٠٠ \times \text{جا } ١٠٦}{\text{جا } ٤٩}$ —— (١)

Δ أ ء جـ قائم جا ٢٥ = $\frac{\text{ع}}{\text{أ جـ}}$ ∴ ع = أ جـ جا ٢٥ (٢)

∴ ع = $\frac{١٠٠٠ \times \text{جا } ١٠٦}{\text{جا } ٤٩}$ × جا ٢٥ = ٥٣٨,٣

وهي ارتفاع الصخرة

(١٢) Δ س ص ع:

$\frac{\text{س ع}}{\text{جا } ٤١' ٧٤°} = \frac{١٥}{\text{جا } ٥١' ٣°}$

∴ س ع = $\frac{١٥ \text{ جا } ٤١ \ \ ٧٤}{\text{جا } ٥١ \ \ ٣}$

Δ س م ع: $\frac{\text{م ع}}{\text{س ع}}$ = جتا ٢٨' ١١°

(١٣) Δ أ ب جـ: < ب أ جـ = ٢٠ $\frac{٥٠٠}{\text{جا } ٢٠} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٣٣}$ أ ب = $\frac{٥٠٠ \times \text{جا } ٣٣}{\text{جا } ٢٠}$
Δ أ ب ء: ع = أ ب جا ١٤' ٥°



= (٥٠٠× جا ٣٣) / (جا ٢٠) × جا ١٤´ ٥٥° = ٧٢,٦١

∴ ارتفاع التل = ٧٣ متر

(١٤) ∆ أ ب جـ: < أ جـ ب = ١٨´ ٣٧° (١٢٠) / (جا ١٨´ ٣٧°) = (أ جـ) / (جا ٣٠´ ٦٥°)

أ جـ = (١٢٠× جا ٣٠´ ٦٥°) / (جا ١٨´ ٣٧°) ∆ أ جـ ء قائم في جـ ∴ ع = أ جـ ظا ٣٨´ ١٢°

∴ ع = (١٢٠× جا ٣٠´ ٦٥°) / (جا ١٨´ ٣٧°) × ظا ٣٨´ ١٢°

∴ ع = ٤٠,٣٨ = ٤٠ قدم

(١٥) ∆ أ ب ء:

ق (< ب أ ء) = ٩٠ - ٣٥ = ٥٥°

∴ ظا ٥٥ = (ب ء) / (أ ب) ∴ ب ء = ١٥ ظا٥٥

∴ أ هـ = ١٥ ظا٥٥ ____ (١) ∆ جـ هـ أ: ظا٦٧ = (جـ هـ) / (هـ أ)

∴ جـ هـ = جـ أ ظا٦٧ بالتعويض في (١)

جـ هـ = ١٥ ظا ٥٥ ظا ٦٧

∴ جـ هـ = ٥٠,٤٦

∴ ارتفاع البرج (جـ ء) = جـ هـ + هـ ء = جـ هـ + أ ب

∴ ارتفاع البرج (جـ ء) = ٥٠,٤٦ + ١٥ = ٦٥,٤٦

(١٦) ∆ أ ب جـ: (أ جـ) / (جا ١٤٢) = (٢٠٠) / (جا ٤٨)

∴ أ جـ = (٢٠٠ جا ١٤٢) / (جا ٤٨) ∆ أ ء جـ: (ء جـ) / (أ جـ) = جا ٤٢

∴ ء جـ = أ جـ جا ٤٢ ع = (٢٠٠ جا ١٤٢) / (ج ٤٨) جا ٤٢ = ٢٩٨,٨ متر

(١٧) ∆ أ جـ ب: (أ جـ) / (جا ٦٠) = (٦٠) / (جا ١٠٥) = (٦٠× جا ٦٠) / (جا ١٠٥) = ٥٣,٨ متر

(١٨) < أ ب جـ = ١٨٠ - [٣٦ ٤١ + ٤٢ ٣٢] = ٤٢´ ١٠٥°

∴ < جـ ب ء = ١٨´ ٧٤° جـ ء = ٥١٠ جا ١٨´ ٧٤° = ٥٠٠

ب ء = ٥١٠ جتا ١٨´ ٧٤° = ١٣٨ ∴ ظا أ = (جـ ء) / (أ ء) = (٥٠٠) / (٣٨٥+١٣٨) = ٠,٩٥٦٠

∴ ق (< أ) = ٤٢´ ٤٣° ∴ ق (< هـ جـ أ) = ق (< جـ أ ء)

= ٤٢ ٤٣ - ٤٢ ٣٢ = ١١°

إجابة تمرين (١٠)

∵ قا أ = $\frac{١٧}{٨}$ ∴ جتا أ = $\frac{٨}{١٧}$ ∵ قتا ب = $\frac{٥}{٤}$ ∴ جا ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ المطلوب ج (أ + ب) = $\frac{٧٧}{٨٥}$ ∴ جا(أ + ن) = جتاأ جتا ب + جتا أ جاب

= $\frac{٤٥}{٨٥}$ + $\frac{٣٢}{٨٥}$ = $\frac{٧٧}{٨٥}$

---

٢) جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب = $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ - $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

= $\frac{١}{\sqrt{٥٠}}$ - $\frac{٦}{\sqrt{٥٠}}$ = $\frac{-٥}{\sqrt{٥٠}}$ = $\frac{-٥}{٢\sqrt{٢}}$ = - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∵ Δ أ ب جـ أ + ب + جـ = ١٨٠

∴ ء جـ = ١٨٠ - (أ + ب) ∴ جتا جـ = جتا١٨٠ - (أ + ب)]

= جتا (أ + ب) = - × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ∴ جتا جـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ق(جـ) = ٤٥°

٣) ظا(أ + ب) = $\frac{\frac{٤}{٣} + \frac{-٥}{-١٢}}{١ - \frac{٤}{٣} + \frac{-٥}{-١٢}}$ = $\frac{٦٣}{١٦}$ ظا (أ - ب) = $\frac{\frac{٤}{٣} - \frac{١}{١١}}{١ + \frac{٢٥}{٣٦}}$ = $\frac{٣٣}{٥٦}$

---

٤) نثبت أ + ب = ٤٥ أو ظا (أ + ب) = ظا ٤٥

∴ ظا (أ + ب) = $\frac{\frac{٤}{٣} + \frac{-٥}{-١٢}}{١ - \frac{٤}{٣} + \frac{١}{١٠}}$ = ١ ⇐ (١)

∵ ظا ٤٥ = ١ ∴ ظا (أ + ب) = ٤٥ ∴ أ + ب = ٤٥

---

٥) نثبت أن: أ + ب = ٤٥ - جـ أو ظا (أ + ب) = ظا (٤٥ - جـ) ∴ الأيمن = ظا (أ + ب)

= $\frac{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٥}}$ = $\frac{٧}{٩}$ ⇐ (١)

∴ الأيسر = ظا (٤٥ - جـ) $= \dfrac{1 - \frac{1}{8}}{1 + 1 \times \frac{1}{5}} = \dfrac{7}{9}$

∴ الطرفين متساويان

٦) ٥ جا أ = -٣ ∴ جا أ = $\dfrac{-3}{5}$ ∴ جتا ب = $\dfrac{7}{25}$ (الربع الرابع)

قتا (أ - ب) = $\dfrac{1}{\text{جا (أ - ب)}}$ ∵ جا (أ - ب) = $\dfrac{-3}{5} \times \dfrac{7}{25} - (\dfrac{-4}{5}) \times$

$(\dfrac{-24}{25}) = \dfrac{-21}{125} - \dfrac{96}{125} = \dfrac{-117}{125}$ ∴ قتا (أ - ب) = $\dfrac{-125}{117}$

---

٧) ∴ أَ : بَ : جَـ = جا أ : جا ب : جا جـ

جا أ = $\dfrac{3}{5}$ ، جا ب $\dfrac{12}{13}$ ∴ جا (أ + ب) = جا جـ

$= \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{13} + \dfrac{4}{5} \times \dfrac{12}{13} = \dfrac{15}{65} + \dfrac{48}{65} = \dfrac{63}{60}$

∴ جا جـ = $\dfrac{63}{65}$ ∴ أَ : بَ : جَـ = $\dfrac{3}{5} : \dfrac{12}{13} : \dfrac{63}{65}$

بالضرب في ٦٥ = ٣٩ : ٦٠ : ٦٣ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

---

٨) الأيمن= جا(٣٠ - ٧) + جتا(٦٠ - ٧)

= جا٣٠ جتا٧ - جتا٣٠ جا٧ + جتا٦٠ جتا٧ + جا٦٠ جا٧

= $\dfrac{1}{2}$ جتا ٧ - $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ جا٧ + $\dfrac{1}{2}$ جتا٧ + $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ جا٧ = جتا٧ = الأيسر

---

٩) ظا ٧٥ = ظا (٤٥ + ٣٠) $= \dfrac{\text{ظا ٤٥ + ظا ٣٠}}{\text{١ - ظا٤٥ ظا٣٠}}$ ظا٧٥ = $\dfrac{\text{١ + ظا ٣٠}}{\text{١ - ظا ٣٠}}$

∴ ظا٧٥ - ظا٣٠ ظا٧٥ = ١ + ظا٣٠ ∴ ظا٧٥ - ظا٣٠ ظا٧٥ = ١

١٠) $\text{ظا}\frac{٧\text{ط}}{١٢} = \frac{٣ + ١}{١ - ٣ \times ١} = ١٠٥$ ظا١٠٥ = ظا(٦٠ + ٤٥)

$$= \frac{\text{ظا }٦٠ + \text{ظا }٤٥}{١ - \text{ظا}٦٠ \text{ ظا}٤٥} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣}}$$

بالضرب في المرافق

$$\frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢} = -(٢ + \sqrt{٣})$$

١١) ظا١٥ = ظا(٤٥ - ٣٠) $= \frac{١ - \frac{١}{٣}}{١ + ١ \times \frac{١}{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$

$\text{ظا}\frac{٧\text{ط}}{١٢}$ = ظا (٦٠ + ٤٥) $= \frac{\sqrt{٣} + ١}{١ - \sqrt{٣}}$

---

١٢) ظا٥٥ = ظا (٤٥ + ١٠) $= \frac{\text{ظا }٤٥ + \text{ظا }١٠}{١ - \text{ظا}٤٥ \text{ ظا}١٠} = \frac{١ + \text{ظا }١٠}{١ - \text{ظا }١٠}$ = الأيسر

١٣) جتا ٨٢ = جا ٨ (زويتان متتاليتين) المقدار = جا٣٧ جتا٨ + جتا٣٨ جا٨

= جا (٣٧ + ٨) = جا٤٥ $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$

---

١٤) المقدار = جتا١٠٥ جتا١٥ + حا١٠٥ جا١٥ (جتا٧٥ = جا١٥)

= جتا (١٠٥ - ١٥) = جتا٩٠ = صفر

---

١٥) المقدار = ظتا (٤٠ - ١٧٥) = ظتا (-١٣٥) = - ظتا١٣٥ = - (-١) = ١

١٦) المقدار = جتا(—— + ——) = جتا —— = جتا —— =جتا٩٠ = صفر

١٧) المقدار = ظتا (١٥ - ١٥٠) = (-١٣٥) = - ظتا١٣٥ = -(-١)=١

١٨) المقدار = جا٣٤جا٧٩ + جتا٣٤جتا٧٩ = جتا(٧٩ - ٣٤) = جتا٤٥ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

١٩) المقدار = $\frac{\text{جتا}(٤٢ - ١٣)}{\text{جا}(٢٥ + ٣٥)} = \frac{\text{جتا}٣٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{١} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢٠) صورة البسط جتا(أ - ب) ، صورة المقام جا(أ + ب)

∴ المقدار = $\frac{\text{جتا}(٤٣ - ١٣)}{\text{جا}(٣٠\ ٢٢^\circ + ٣٠\ ٢٢)} = \frac{\text{جتا}\ ٣٠}{\text{جا}\ ٤٥} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٢}}{١} = \frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢١) الأيمن = ظا(٤٥ + أ) = $\frac{\text{ظا}\ ٤٥ + \text{ظا}\ أ}{١ - \text{ظا}٤٥\ \text{ظا}\ أ} = \frac{١ + \frac{\text{جا}\ أ}{\text{جتا}\ أ}}{١ - \frac{\text{جا}\ أ}{\text{جتا}\ أ}}$

$= \frac{\frac{\text{جتا}\ أ + \text{جا}\ أ}{\text{جتا}\ أ}}{\frac{\text{جتا}\ أ - \text{جا}\ أ}{\text{جتا}\ أ}} = \frac{\text{جتا}\ أ + \text{جا}\ أ}{\text{جتا}\ أ - \text{جا}\ أ}$

---

٢٢) ∵ أ + ب + جـ = ١٨٠ ∴ أ + ب = ١٨٠ - جـ ظا(أ + ب) = - ظا جـ

∴ $\frac{\text{ظا}\ أ + \text{ظا}\ أ}{١ - \text{ظا}\ أ\ \text{ظا}\ ب}$ = - ظا جـ ∴ ظا أ + ظا ب = - ظا جـ

∴ ظا أ + ظا ب = - ظا جـ + ظا أ ظا ب ظا جـ

∴ ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا ب ظا جـ

---

٢٣) $\frac{\text{جا}(س + ص)}{\text{جا}(س - ص)} = \frac{٣}{٤} \times \frac{٢}{١}$ ∴ $\frac{\text{جا}(س + ص)}{\text{جا}(س - ص)} = \frac{٣}{٢}$

$\frac{\text{جا س جتا ص + جتا س جا ص}}{\text{جا س جتا ص - جتا س جا ص}} = \frac{٣}{٢}$

٣جا س جتا ص - ٣ جتا س جا ص = ٢جا س جتا ص + ٢ جتا ص جا ص

∴ جا س جتا ص = ٥ جتا س جا س ∴ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{٥ جا ص}}{\text{جتا ص}}$

∴ ظا س = ٥ ظا ص

٢٤) الأيمن = (جا أ جتا ب + جتا أ جا ب) (جا أ جتا ب - جتا أ جا ب)

= جا^2 جتا^{2}ب - جتا^{2}ب . جتا^{2}أ جا^{2}ب (فرق بين مربعين)

= جا^2 أ(١ - جا^{2}ب) - جا^{2}ب(١ - جا^{2}أ) = جا^{2}أ - جا^{2}أجا^{2}ب - جا^{2}ب - جا^{2}ب + جا^{2}أ

جا^{2}ب = جا^{2}أ - جا^{2}ب = الأيسر

٢٥) > أ + > ب + > جـ = ٩٠ ∴ > أ + > ب = ٩٠ - > جـ

ظا (أ + ب) = ظا(٩٠ - جـ) ∴ ظا(أ + ب) = ظتا جـ

∴ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}} = \frac{\text{١}}{\text{ظا جـ}}$ ∴ ظا أ ظا جـ + ظا ب ظا جـ = ١ - ظا أ ظا ب

∴ ظا أ ظا ب + ظا أ ظا جـ + ظا ب ظا جـ = ١

إجابة تمرين (١١)

١) جتا ٣جـ = جتا (٢جـ + جـ) = جتا ٢جـ جتا جـ - جا ٢جـ جا جـ

= ٢جتا³ جـ - ٢جـ جـ (١ - جتا²جـ) = ٤ جتا³ جـ - ٣ جتا جـ

٢) الأيمن = $\frac{\text{١ - ظا س}}{\text{١ - ١ × ظا س}} - \frac{\text{٢ ظا س}}{\text{١ - ظا}^2\text{س}} = \frac{\text{(١ + ظا س)}^2\text{ - ٢ظا س}}{\text{١ - ظا}^2\text{س}} = \frac{\text{١ + ظا}^2\text{س}}{\text{١ - ظا}^2\text{س}}$

$= \frac{\text{١ + }\frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}}{\text{١ - }\frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}} = \frac{\text{جتا}^2\text{س + جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س - جا}^2\text{س}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا٢س}} = \text{قا ٢س}$

٣) ١ - (١ - ٢جا² ٢س)² = ٢ (٢ جا س جتا س)²

٤) الأيمن: $= \frac{\text{١}}{\text{جتا}^2\text{ب}} \div \left(\text{٢ - }\frac{\text{١}}{\text{جتا}^2\text{ب}}\right) = \frac{\text{١}}{\text{جتا}^2\text{ب}} \times \frac{\text{جا}^2\text{ب}}{\text{٢جتا}^2\text{ب - ١}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا٢ب}}$

---

٥) $\frac{\text{١ + ٢جتاهـ}}{\text{١ + جتاهـ + ٢ جتا}^2\text{هـ - ١}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا هـ}} = \text{قا هـ}$

٦) بتربيع الطرفين (جتا هـ - جا هـ)² = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ∴ جتا²هـ + جا²هـ - ٢جاهـ جتاهـ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

∴ ١ - جا٢هـ = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ ∴ جا٢هـ = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ، جتا٤هـ = ١ - ٢جا² ٢هـ

= ١ - ٢ × $\frac{\text{٩}}{\text{١٦}}$ = - $\frac{\text{١}}{\text{٨}}$

---

٧) $\frac{\text{١ - (١ - ٢جا}^2\,\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\text{)}}{\text{١ + (٢ جتا}^2\,\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}\text{ - ١)}} = \text{ظا}^2\,\frac{\text{هـ}}{\text{٢}}$

٨) الأيمن = $\left(1 + 2\,\text{جتا}^2 \frac{\text{جـ}}{2} - 1\right) \times \dfrac{\text{جا}\,\frac{\text{جـ}}{2}}{\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{2}} = \text{جا جـ}$

٩) جتا٢س = جتا س ∴ ٢س = ٣٦٠ - س ∴ ٣س = ٣٦٠° ∴ س = ١٢٠

١٠) $\text{جتا}^2\text{أ}\ \text{جتا}^2\text{ب} - \text{جا}^2\text{أ}\ \text{جا}^2\text{ب} = \text{جتا}^2\text{أ}\ (1 - \text{جا}^2\text{ب}) - (1 - \text{جتا}^2\text{أ})\ \text{جا}^2\text{ب}$

$= \text{جتا}^2\text{أ} - \text{جتا}^2\text{أ}\ \text{جا}^2\text{ب} - \text{جا}^2\text{ب} + \text{جتا}^2\text{أ}\ \text{جا}^2\text{ب}$ = الطرف الأيسر.

---

١١) الأيمن = $\dfrac{\text{ظا}45 + \text{ظا س}}{1 - \text{ظا}45\ \text{ظا س}} = \dfrac{1 + \text{ظا س}}{1 - \text{ظا س}}$

١٢) $\dfrac{1}{\text{جا س}} + \dfrac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \dfrac{1 + 2\text{جتا}\,\frac{\text{س}}{2} - 1}{2\text{جا}\,\frac{\text{س}}{2}\ \text{جتا}\,\frac{\text{س}}{2}} = \text{ظتا}\,\frac{\text{س}}{2}$

---

١٣) الأيسر = $\dfrac{2\text{جاهـ} - 2\text{جاهـ جتاهـ}}{2\text{جاهـ} + 2\text{جاهـ جتاهـ}}$

$= \dfrac{2\,\text{جاهـ}\left(1 - 1 + \text{جا}^2 \frac{\text{هـ}}{2}\right)}{2\,\text{جاهـ}\left(1 + 2\ \text{جتا}^2 \frac{\text{هـ}}{2} - 1\right)} = \text{ظا}^2\,\frac{\text{هـ}}{2}$

---

١٤) الأيمن = $\dfrac{1 + \text{جتا أ} + 2\text{جتا}^2\text{أ} - \text{[illegible]}}{1 + 2\text{جتا}^2\text{هـ}}$ = جتا أ

---

١٥) جا ٤أ - ٢جا ٢أ = ٢جا٢أ جتا ٢أ - ٤ جا أ جتا أ = ٤ جا أ جتا أ (جتا٢أ - ١)

$= 4\text{جا أ جتا أ}\ (1 - 2\ \text{جا}^2\text{أ} - 1) = 8\text{جا}^3\text{أ جتا أ}$

---

١٦) $2\text{جتا}^2\text{أ} - 4\ \text{جتا أ} + 3 = 2(\text{جتا أ} - 1)^2 = 2\left(1 - 2\ \text{جا}^2\,\frac{\text{أ}}{2} - 1\right)^2$

$= ٨\text{جا}^{٤}\,\frac{\text{أ}}{٢}$

---

١٧) $٢\text{جاهـ جتاهـ} \times \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}} - \text{جا٢هـ} \times \frac{\text{جتا٢هـ}}{\text{جا٢هـ}}$

$= ٢\text{جتا}^{٢}\text{هـ} - (٢\ \text{جتا}^{٢}\text{هـ} - ١) = ١$

١٨) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ} + \text{جا}^{٢}\text{هـ} + ٢\text{جاهـ جتاهـ}} = \frac{(\text{جتاهـ} - \text{جاهـ})\,(\text{جتاهـ} - \text{جاهـ})}{(\text{جتاهـ} + \text{جاهـ})^{٢}}$

$\frac{\text{جتاهـ} - \text{جاهـ}}{\text{جتا هـ} + \text{جا هـ}}$ بالقسمة على جتا هـ بسطاً ومقاماً $= \frac{١ - \text{ظاهـ}}{١ + \text{ظاهـ}}$

---

١٩) $\frac{١ - \text{جتا٢أ}}{١ + (٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١)} = \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\text{أ})}{١ + (٢\text{جتا}^{٢}\text{أ} - ١)} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{أ}}{\text{جتا}^{٢}\text{أ}} = \text{ظا}^{٢}\text{أ}$

٢٠) الأيمن

$= ١ + ١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\text{هـ} + ٢\text{جا}^{٢}\text{هـ} = ٢ =$ الأيسر.

---

٢١) $\frac{٢\text{جا س جتا س}}{\text{جتا س}} + \frac{١ - ٢\ \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا س}} = ٢\text{جا س} + \frac{١}{\text{جا س}} - ٢\text{جا س} = \text{قتا س}$

٢٢) $\text{جا جـ جتا جـ}\ (\text{جتا}^{٢}\text{جـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}) = \frac{١}{٤} \quad \therefore \frac{١}{٢} \times \text{جا٢جـ} \times \text{جتا٢جـ} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}\,\text{جا٤جـ} = \frac{١}{٤}$

٢٣) حاول بنفسك .

---

٢٤) $\frac{١ + \text{جتاجـ} + ٢\text{جتا}^{٢}\text{جـ} - ١}{\text{جا جـ} + ٢\text{جا جـ جتا جـ}} = \frac{\text{جتاجـ}\,(١ + ٢\text{جتا جـ})}{\text{جاجـ}\,(١ + ٢\ \text{جتا جـ})} = \text{ظتا جـ}$

٢٥) الطرف الأيمن = ١ - ٢جا^{٢} ($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{هس}{٢}$) = جتا٢ ($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{هس}{٢}$)

= جتا ($\frac{ط}{٤}$ - هس) = جاهس = الطرف الأيسر

---

٢٦) الطرف الأيمن = $\frac{\text{جاأجتاب + جتاأجاب + جاأجتاب - جتاأ جاب}}{\text{جتاأ جتاب - جاأ جاب + جتاأ جتاأ + جاأ جاب}}$

= $\frac{\text{٢جا أ جتا ب}}{\text{٢ جتا أ جتا ب}}$ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$ = ظا أ = الأيسر.

٢٧) الطرف الأيمن: $\frac{\text{جا٣جـ جتا جـ - جتا٣جـ جا جـ}}{\text{جا جـ - جتا جـ}}$

= $\frac{\text{جا(٣جـ - جـ)}}{\text{جا جـ جتا جـ}}$ = $\frac{\text{جا٢جـ}}{\text{جا جـ جتا جـ}}$ = $\frac{\text{٢جا جـ جتا جـ}}{\text{جا جـ جتا جـ}}$ = ٢ = الأيسر

٢٨) الطرف الأيمن = جتا^{٢} ٢جـ + ٤جتا^{٢}جـ = (٢جتا^{٢} جـ - ١)^{٢} + ٤جتا^{٢}جـ

= ٤جتا^{٤}جـ - جا^{٤}جـ + ١ + ٤جتا^{٢}جـ = ٤جتا^{٤}جـ + ١ = الأيسر

---

٢٩) جتا^{٤}جـ - جا^{٤}جـ = (جتا^{٢} + جا^{٢}جـ) (جتا^{٢}جـ - جا^{٢}جـ) = ١ × جتا٢جـ = جتا٢جـ

٣٠) الطرف الأيمن: $\frac{\text{(جتا هـ + جا هـ)}^{٢}\text{(جا هـ - جتاهـ)}^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ - جا}^{٢}\text{هـ}}$

= $\frac{\text{٢جتا هـ × ٢جا هـ}}{\text{جتا}^{٢}\text{هـ}}$ = $\frac{\text{٢جا٢هـ}}{\text{جتا٢هـ}}$ = ٢ظا٢هـ

اجابة تمارين (١٢)

(١)

١- المجال = [٢ ؛ ٥] ، المدى = [٧ ، ٧]

٢- المجال = [- ٢ ، ∞ [، المدى= [٠ ، ∞ [

٣- المجال = [-٣ ، ٥] ، المدى = [-٤ ، ٥]

٤- المجال = ح ، المدى =] - ∞ ، ٤]

(٢)

١- المجال = ح ، المدى = { ١ }

٢- المجال = ح ، المدى = { -٣ }

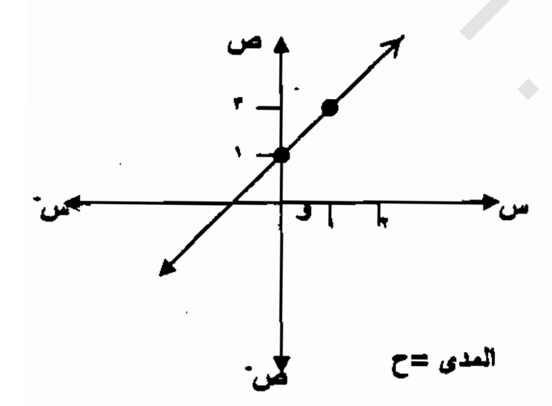
٣- المجال = [-٣ ، ٤] ، المدى = { ٢ }

٤- المجال = ح ، المدى = { ٢ ، -٥}

(٣)

أ)

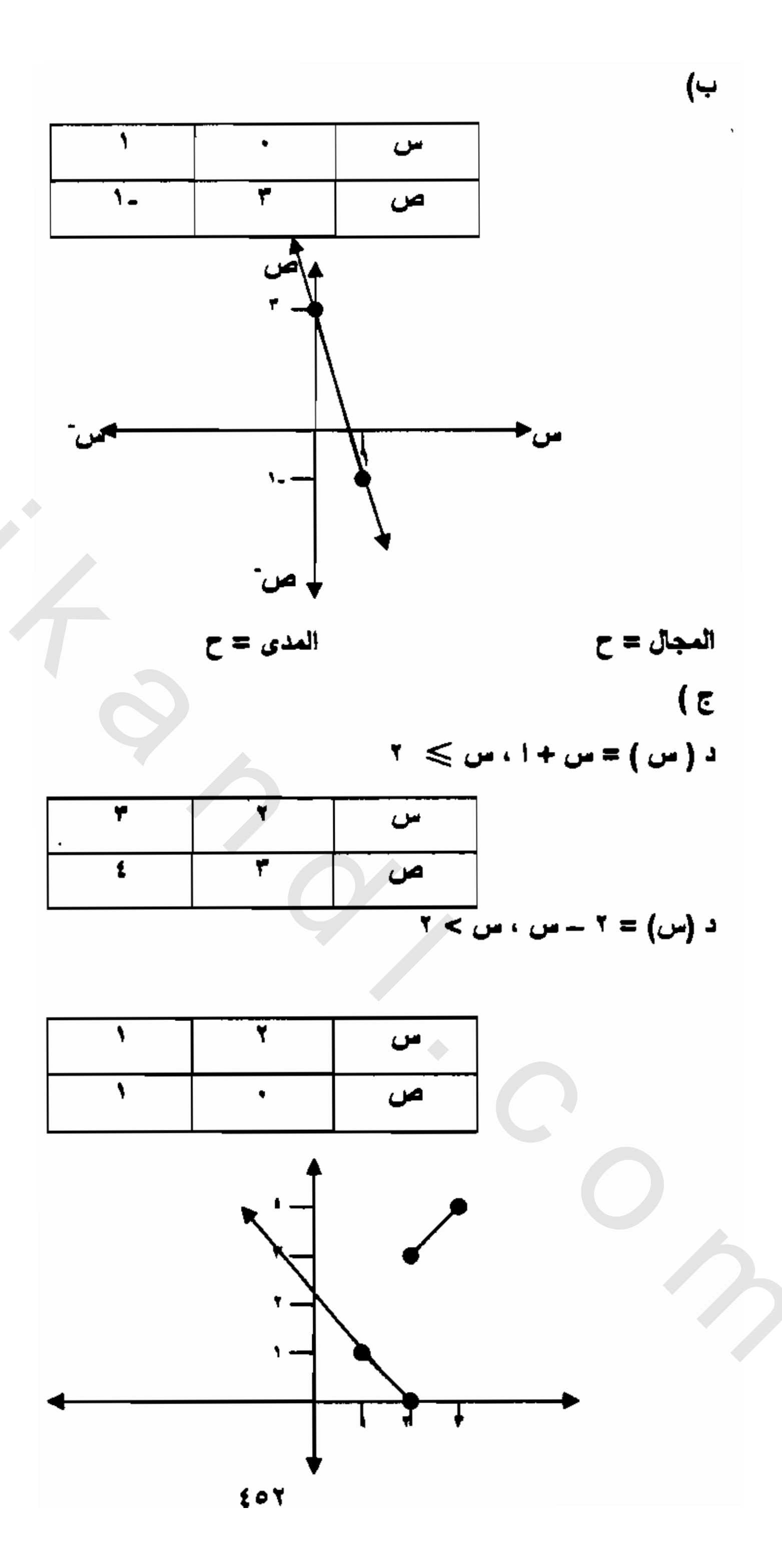
س	٠	١
ص	١	٣



المجال = ح المدى =ح

ب)

س	٠	١
ص	٣	١-



المجال = ح

المدى = ح

ج)

د (س) = س + ١ ، س $\geqslant$ ٢

س	٢	٣
ص	٣	٤

د (س) = ٢ – س ، س < ٢

س	٢	١
ص	٠	١

(٤)

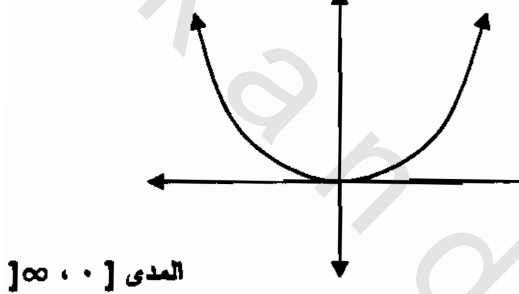
١) المجال = ح ، المدى = ح

٢) المجال = ح ، المدى = ح

(٥)

١) س = $\frac{ب}{٢أ}$ - ب = $\frac{٠}{٢}$ = ٠

س	٢	١	٠	-١	-٢
ص	٤	١	٠	-١	٤



المجال = ح المدى [٠ ، ∞[

ب)

س	٢	١	٠	-١	-٢
ص	-٤	-١	٠	-١	-٤

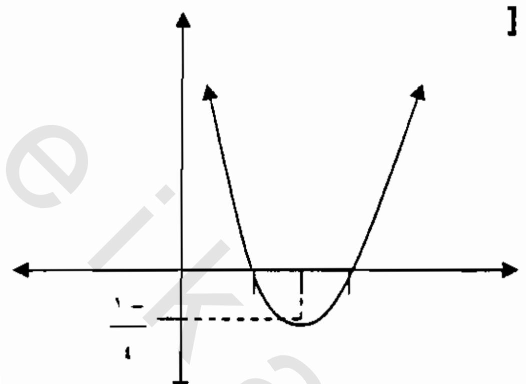
المجال = ح ، المدى =] - ∞، ٠]

ج) $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{٥}{٢}$ ، $د(\frac{٥}{٢}) = \frac{٢٥}{٢} - ٥ \times \frac{٥}{٢} + ٦ = \frac{-١}{٤}$

:. رأس المنحنى ($\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{-١}{٤}$) ، :. أ > ٠ :. الفتحة لأعلى

توجد أصفار الدالة (س − ٣) (س − ٢) = ٠ :. س = ٣ ، ٢

المجال = ح ، المدى [$\frac{-١}{٤}$ ، ∞ [

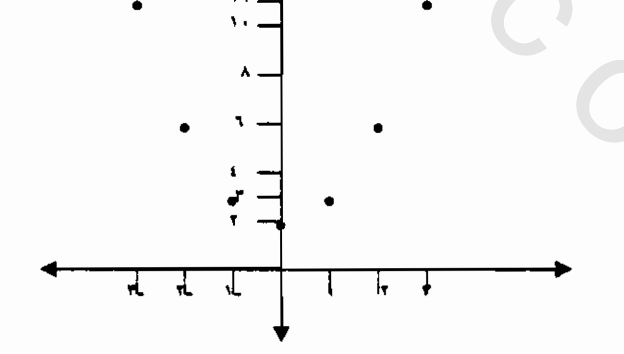


٦) :. المجال عبارة عن مجموعة وليس فترة

:. المدى يكون ايضاً مجموعة والشكل البيانى يكون نقط

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١

المجال = { -٣، -٢ ، -١، ٠، ١، ٢ ، ٣ } المدى = { ١١، ٦ ، ٣ ، ٢ }



٧)

المجال = [- ١ ، ٥]

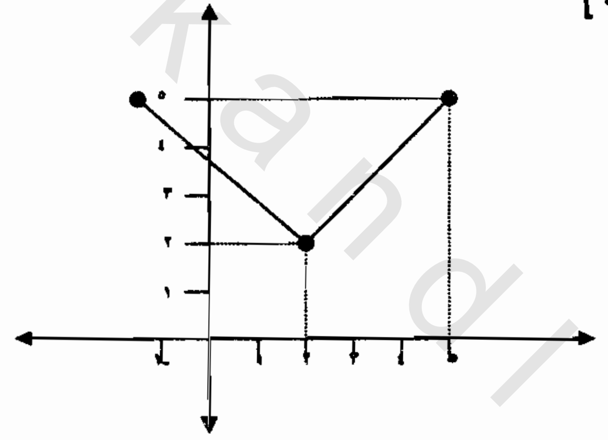
د (س) = ٤ – س ، -١ ≥ س > ٢ (دالة خطية)

س	- ١		(٢)
ص	٥		(٢)

د (س) = س ، ٢ ≥ س > ٥

س	٢		٥
ص	٢		٥

المدى = [٢ ، ٥]



د (س) = ٤ – س ، س ∈ [-١ ، ٢]

د (-١) = ٤ + ١ = ٥

د (٠) = ٤ – ٠ = ٤

د (١) = ٤ – ١ = ٣

د (٢) غير معروفة

د(س) = س ، س∈ [٢ ، ٥]

د (٢) = ٢

د (٣) = ٣

د (٥) = ٥

٨)

المجال = ح

د (س) = ٢ س ، س ≥ ٢

س	٢	٣
ص	٤	٦

د (س) = س + ٢ ، س < ٢

س	(٢)	١
ص	(٤)	٣

المدى = ح

د (س) = ٢ س ، س ≥ ٢

د (٢) = ٤

د (٣) = ٦

د (٤) = ٨

د (س) = س + ٢ ، س < ٢

د (١) = ٣

د (٠) = ٢

د (-١) ١

د (- ٤) = -٢

٩)

د (س) { س + ٢ عندما س > ٠ ؛ -١ عندما س < ٠ }

المجال = ح * = ح - { ٠ }

المدى =] ٢ ، ∞[U {-١}

١٠)

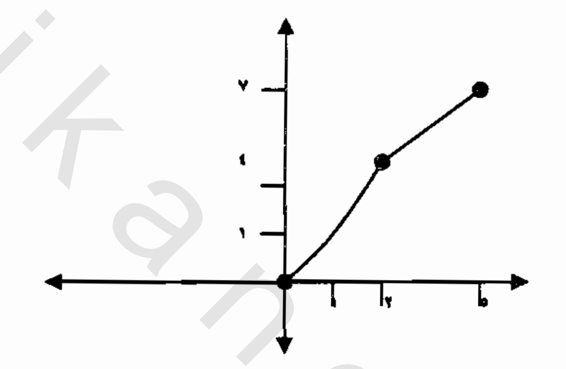
د (س٩ = س ^{٢} (منحنى) تعين جميع نقط الفترة

س	٠	١	٢
ص	٠	١	٤

د (س) = س+ ٢ (خطية) ب البداية ، النهاية)

س	(٢)		٥
ص	(٤)		٧

المجال = [٠ ، ٥]   المدى = [٠ ، ٧]



١١)

المجال = [٠ ، ٩]   المدى = [٠ ، ٣]

١٢)

المجال = ح

د (س) = ٢ س + ٣ ، س < -١

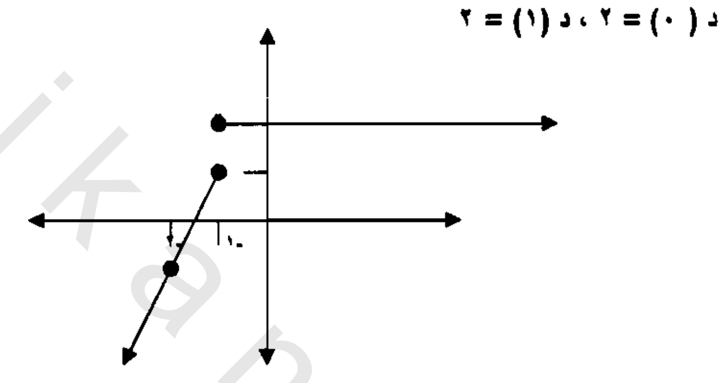
س	(-١)	-٢
ص	(١)	-١

المدى =] - ∞ ، ١ [U { ٢ }

د (-٣) = -٦ + = -٣

د (-٢) = - ٤ + ٣ = -١

د (٠) = ٢ ، د (١) = ٢

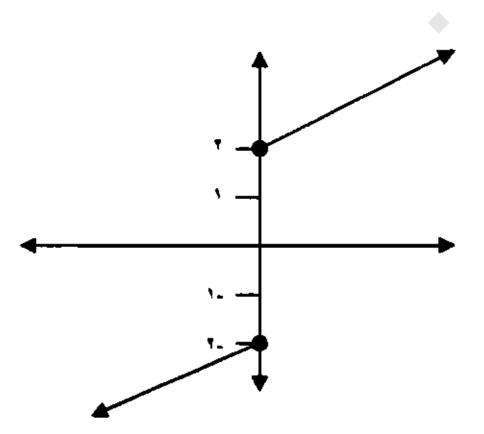


١٣)

المجال = ح * = ح – { ٠ }

المدى =] - ∞ ، -٢] U [٢ ، ∞ [

= ح –] -٢ ، ٢ [



(١٤

د١ = √(س-٣)

معرفة شرط س − ٣ ≥ ٠

س ≥ ٣

م١ = [٣ ، ∞ [

د٢ = ٥

م٢ = ح

مجال د١ + د٢ = م١ ∩ م٢ = [٣ ، ∞ [∩ ح = [٣ ، ∞ [

∴ مجال د (س) = [٣ ، ∞ [

(١٥

د١ = √(٥-س)

معرفة شرط ٥ − س ≥ ٠

∴ − س ≥ -٥

س ≤ ٥

م١ =] -∞ ، ٥]

د٢ = ∛(س+١)

الدالة معرفة دائماً

م٢ = ح

مجال (د١ − د٢) = م١ ∩ م٢ =] -∞ ، ٥] ∩ ح =] -∞ ، ٥]

∴ مجال د (س) =] -∞ ، ٥]

(١٦

د١ = √(س+٢)

معرفة شريط س + ٢ ≥ ٠

س ≥ -٢

م١ = [-٢ ، ∞ [

د٢ = √(س-٢)

معرفة شرط س − ٢ ≥ ٠

س ≥ ٢

م٢ = [٢ ، ∞ [

مجال د١/د٢ = م١ ∩ م٢ - { اصفار المقام }

= [-٢ ، ∞ [∩ [٢ ، ∞ [- { ٢ }

=] ٢ ، ∞ [- { ٢ } =] ٢ ، ∞ [

١٧) ∴ مجال د (م١) = ح ن مجال د (م٢) = ح

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س) ، مجال (د + ر) م١ ∩ م٢ = ح ∩ ح = ح

،

(د + ر) (س) = { ٢ س – ١ ، ١

المدى = [١ ، ∞ [

(د + ر) (٣) = ٦ – ١ = ٥

(د + ر) (-٢) = ١

(د – ر) (-٢) = { -١ ، -٢ س + ١

المدى = [-١ ، ∞ [

(د – ر) (-٥) = -٢ × -٥ + ١ = ١١

(د × ر) (س) = { س^{٢} – س ، -س^{٢} + س

(د × ر) (-٢) = - ٤ – ٢ = -٦

(د × ر) (-١) = -١ – ١ = -٢

، د (س) مجال – مجال د ∩ مجال ر – { اصفار المقام }

= ح – { صفر }

د (س) = { (س - ١) / س ، (- س + ١) / س

$\therefore \frac{\text{د}}{\text{ر}} (-٤) = \frac{١+٤}{-٤} = -\frac{٥}{٤}$

مجال $\frac{\text{ر}}{\text{د}}$ = مجال ر $\cap$ مجال < ٠ { اصفار المقام }

= ح − { ١ }

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{د}} (\text{س}) = \begin{cases} \frac{\text{س}}{\text{س}-١} \\ \frac{\text{س}}{-\text{س}+١} \end{cases}$$

$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{د}} (٥) = \frac{٥}{٥-١} = \frac{٥}{٤}$

إجابة تمارين (١٣)

١)

عندما س ⩾ ٠

د (س) = ٢ س ــ ٣

س	ص
٠	٣ ـ
١	١ـ
٢	١

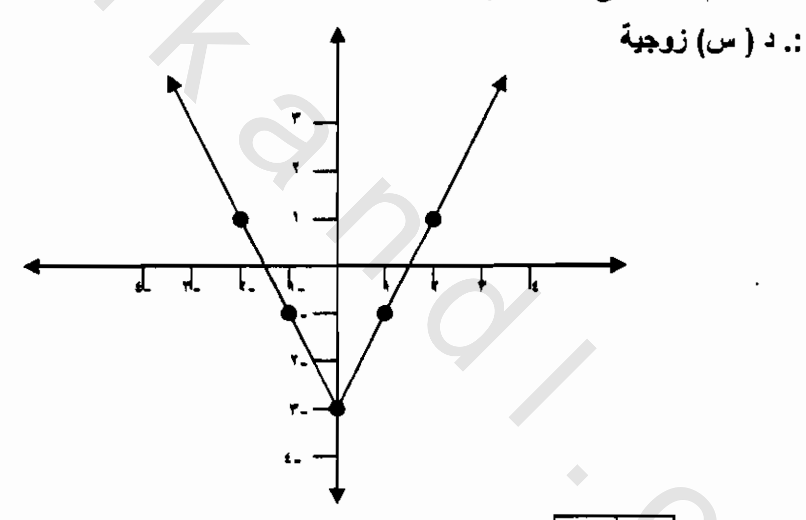
عندما س < ٠

د (س) = ـ٢ س ـ٣

س	ص
(٠)	(٣ـ)
١ـ	١ـ
٢ـ	١

من الرسم : المنحنى متماثل حول الصادات

.: د (س) زوجية



٢)

س > ٣

د (س) = ٣ـس

س	ص
٣	٠
٤	١ـ
٥	٢ـ

س	ص
٣	٠
٢	١-
١	٢-

س ⩾ ٣

د (س) س ـ٣

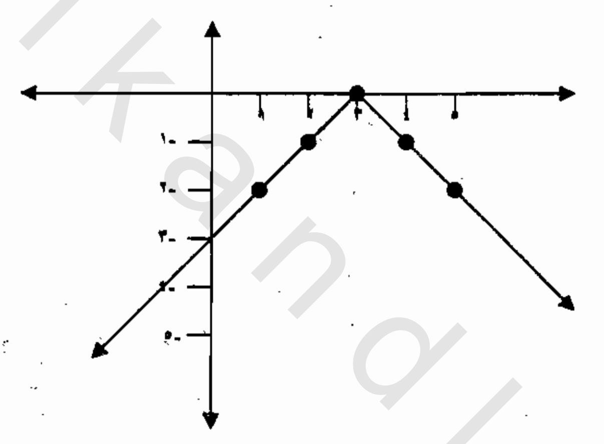
من الرسم يتضح ان

د تزايدية فى الفترة] - ∞ ، ٣] د تناقصية فى الفترة [٣ ، ∞ [

المدى =] -∞ ، ٠]

منحنى الدالة ليس متماثل عند الصادات ، نقطة الأصل

:. الدالة ليست زوجية وليست فردية



٣)

د (س) = - ٣] -∞ ، ٠ [

د (س) = س ـ٣ [٠ ، ∞ [

س	٠	١-	٢-	٠	١	٢
د(س)	٣-	٣-	٣-	٣-	٢-	١-

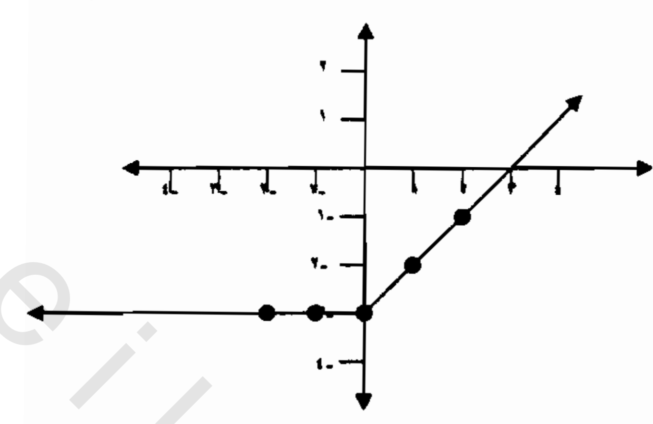
الدالة ليست زوجية ولافردية

[لآن المنحنى لها غير متماثل حول محور الصادات او حول نقطة الأصل]

المدى = [-٣ ، ∞ [

المجال =] -∞ ، ∞ [= ح

د (س) = تزايدية فى الفترة] ٠ ، ∞ [وثابتة فى الفترة] - ∞ ، ٠]



٤)

د (س) = ٢ س – ٣

[٠ ، ∞ [

د (س) –٢ س –٣

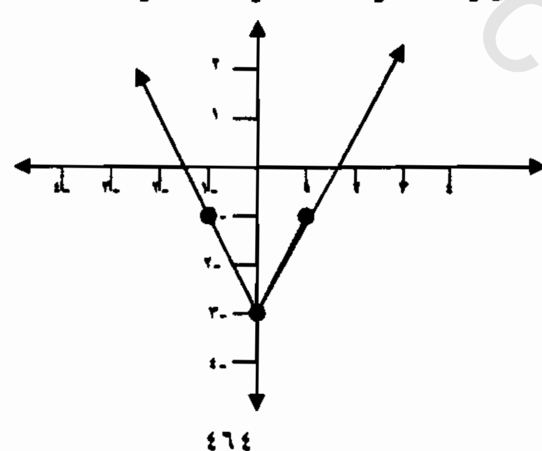
] -∞ ، ٠]

س	٠	١	٠	١-
د(س)	٣-	١-	٣-	١-

∴ المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ د (- ب) دالة زوجية

المدى = [- ٣ ، ∞ [

د (س) تزايدية فى [٠ ، ∞ [وتناقصية] -∞ ، ٠]



٥)

د (س) = ٢

] -١ ، ١ [

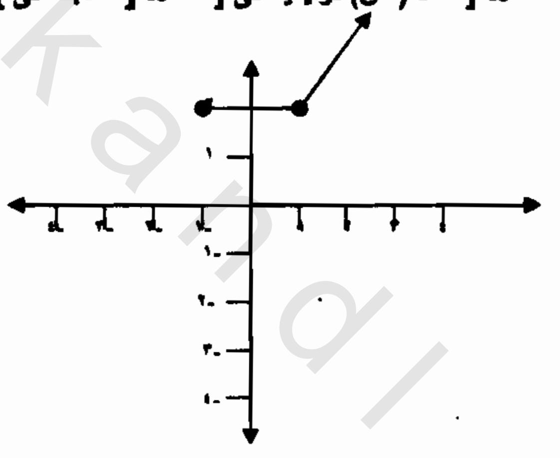
د (س) = ٢س

[١ ، ∞ [

س	-١	٠	١	١	٢	٣
د (س)	٢	٢	٢	٢	٤	٦

د (س) ليست تزايدية ولاتناقصية

المدى = [٢ ، ∞ [، د (س) تزايدية فى [١ ، ∞ [، ثابتة فى] -١ ، ١ [



٦)

د (س) = س^{٢}

[٠ ، ∞ [

د (س) = - س^{٢}

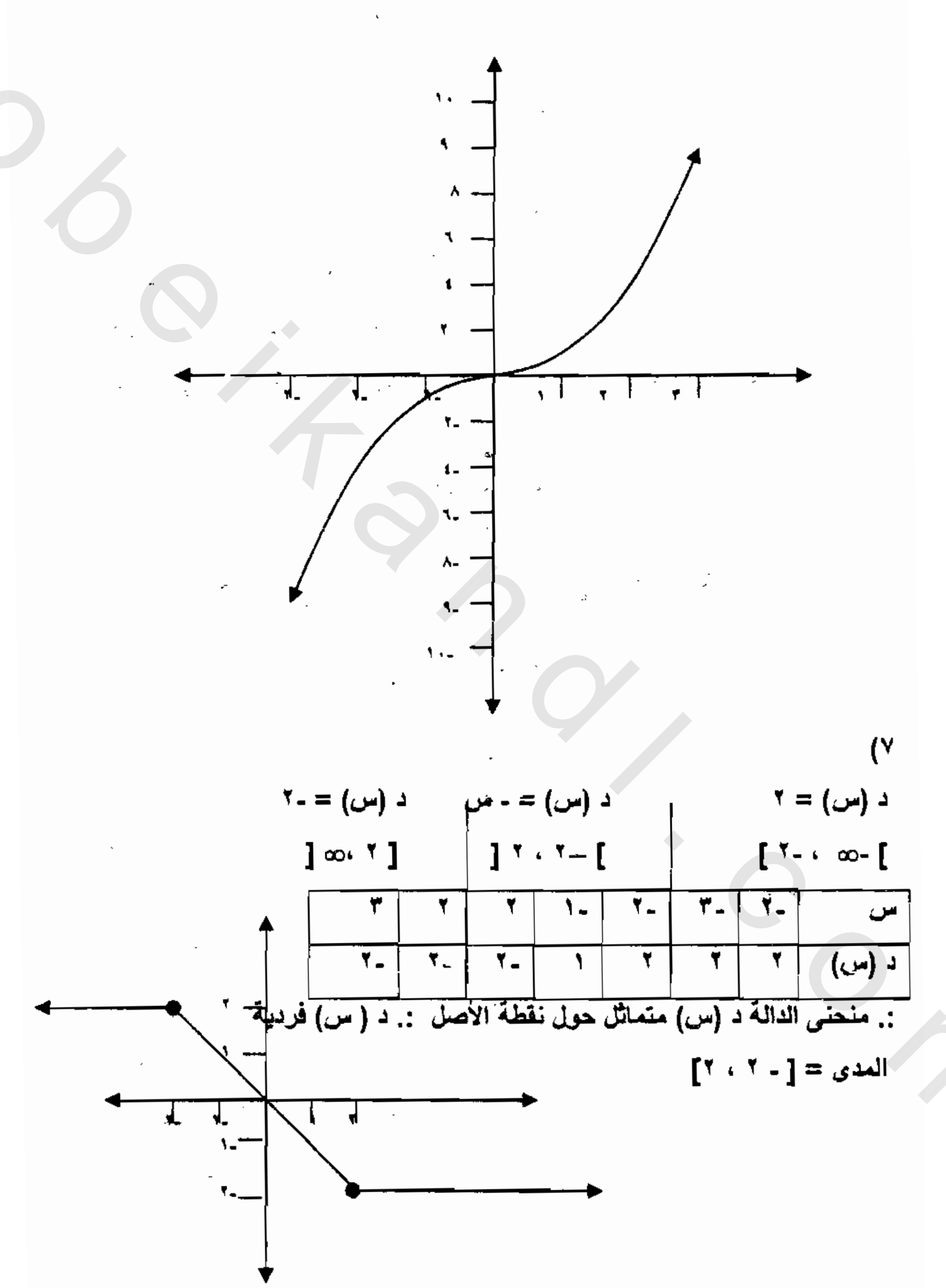
] - ∞ ، ٠]

س	٠	١	٢	٣	٠	-١	-٢	-٣
د(س)	٠	١	٤	٩	٠	-١	-٤	-٩

∴ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة زوجية   المدى =] - ∞ ، ∞ [= ح

الدالة تزايدية س ∋ ح



(٧

د (س) = ٢   د (س) = ـ س   د (س) = ـ٢

] -∞ ، -٢ [[-٢ ، ٢]   ] ٢ ، ∞ [

س	-٢	-٣	-٢	-١	٢	٢	٣
د (س)	٢	٢	٢	١	-٢	-٢	-٢

:. منحنى الدالة د (س) متماثل حول نقطة الأصل :. د (س) فردية

المدى = [ـ ٢ ، ٢]

٨)

∴ ٣ د (- س) + د (س) = ٤ س^{٣} + ٢ س (١)

٣ د (س) + د (- س) = - ٤ س^{٣} – ٢ س (٢)

(١) + (٢)

---

٤ د (- س) + ٤ د (س) = ٠   بالقسمة ÷ ٤

د (- س) + د (س) = ٠

د (- س) = - د (س)   ∴ دالة فردية

٩)

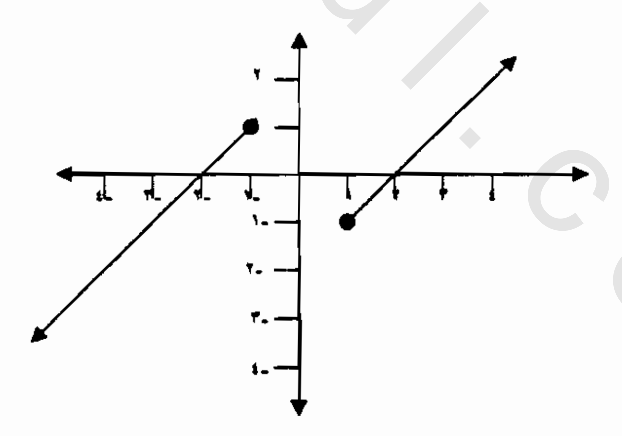
د (س) = س – ٢   د (س) = س + ٢

] ١ ، ∞ [   ] - ∞ ، -١]

س	١	٢	٣	-١	-٢	-٣
د(س)	-	٠	١	١	٠	-١

∴ المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ∴ الدالة فردية

المدى = ح   الدالة تزايدية فى الفترة ح -] -١ ، ١ [



(١٠

د (س) = $\frac{١٢}{س+٢}$] ٠ ، ∞ [

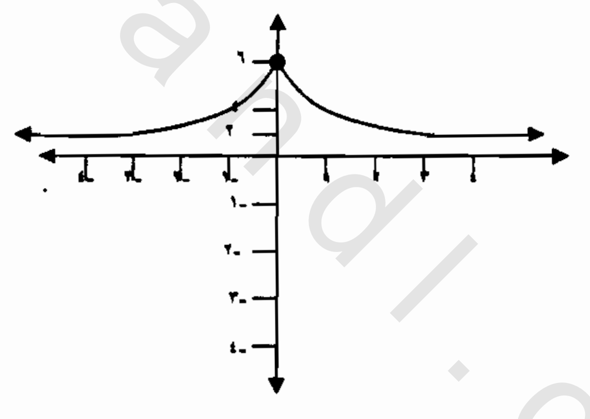
د (س) = $\frac{١٢}{س-٢}$] -∞ ، ٠ [

س	٠	١	٢	٠	-١	-٢
د (س)	٦	٤	٣	٦	٤	٣

∴ المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ د (س) زوجية

المدى =] ٠ ، ٦ [

د (س) تزايدية فى] -∞ ، ٠ [لا تزايدية فى] ٠ ، ∞ [



(١١

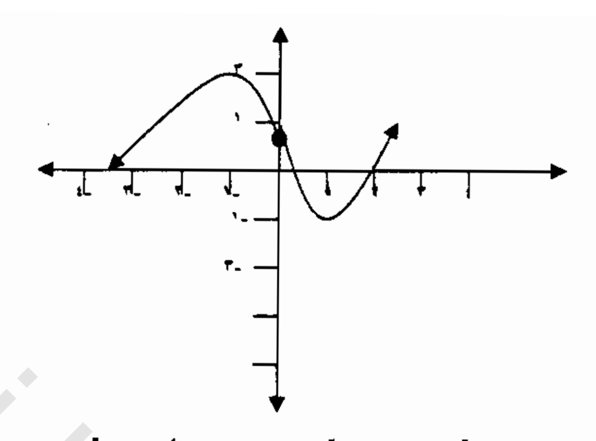
د (س) = س ٢ – ٣ س + ١] ٠ ، ∞ [

د (س) = - س٢ – س = ١] - ∞ ، ٠ [

س	٠	١	٢	٠	-١	-٢
د (س)	١	-١	-١	١	٣	٣

د (س) ليست زوجية ولافردية

المدى = ح



د(س) = ٢(- س) ٢ + (- س)٢ – ١ = ٢ س٤ – س٢ – ١

الدالة زوجية

١٣) د (- س) = ٣   د (-س) = د (س)   الدالة زوجية

١٤) د (- س) = $\frac{س^{٢}+٩}{س^{٤}-٣}$ الدالو زوجية

١٥) د(- س) = (-١٧)١٧ + ٧ (- س)٥ + (- س)

= - س١٧ – ٧ س٥ – س = - (س١٧ + ٧ س ٥ + س)

الدالة فردية

١) د(-س) = [٣ – (- س)]٢ = [٣ + س]٢ الدالة ليست زوجية ولا فردية

٢) د(-س) = (- س)٣ – حا (- س) = - س٣ + حا س

- (س٣ – حا س) = - د(س)   الدالة فردية

١٩) د(-س) = ٥ × ٥ س + ٥ × ٥ -س ولان الجمع إبدالي

د(- س) = د (س)   الدالة زوجية

٢٠) د (- س) = $\frac{١}{س^{٢}+١}$ الدالة زوجية

٢١) $\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{1}{(-\text{س})^{3} + (-\text{س})} = \dfrac{1}{-\text{س}^{3} - \text{س}} = \dfrac{1}{-(\text{س}^{3}+\text{س})} = -\text{د}(\text{س})$

الدالة فردية

٢٢) $\text{د}(-\text{س}) = \dfrac{-\text{س}}{(-\text{س})^{3} + (-\text{س})} = \dfrac{-\text{س}}{-\text{س}^{3} - \text{س}} = \dfrac{-\text{س}}{-(\text{س}^{3}+\text{س})} = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{3}+1}$

$= \text{د}(\text{س})$ الدالة زوجية

٢٣) $\dfrac{-\text{س}}{(-\text{س})^{2} - 9} = \dfrac{-\text{س}}{\text{س}^{2} - 9} = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{2} - 9} = -\text{د}(\text{س})$ فراية

٢٤) $\dfrac{1}{-\text{س}+3} + \dfrac{1}{-\text{س}-3} = \dfrac{1}{-(\text{س}-3)} + \dfrac{1}{-(\text{س}+1)} \left(\dfrac{1}{\text{س}-3} + \dfrac{1}{\text{س}+3}\right)$

$= -\text{د}(\text{س})$ فردية

٢٥) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{(-\text{س})^{2}\,\text{جتا}^{3}(-\text{س})}{(-\text{س})^{2}+5} = \dfrac{\text{س}^{2}\,\text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{س}^{2}+5} = \text{د}(\text{س})$ زوجية

٢٦) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{(-\text{س})^{2}\,\text{جتا}^{3}(-\text{س})}{(-\text{س})^{2}+5} = \dfrac{\text{س}^{2}\,\text{جتا}^{3}\text{س}}{\text{س}^{2}+5} = -\text{د}(\text{س})$ فردية

٢٧) $\text{د}(\text{س}) = \text{ه}^{\text{س}} - \text{ه}^{-\text{س}}$ ، $\text{د}(-\text{س}) = \text{ه}^{-\text{س}} - \text{ه}^{\text{س}}$

$\text{د}(-\text{س}) = -(\text{ه}^{\text{س}} - \text{ه}^{-\text{س}})$ ، $\text{د}(-\text{س}) = -\text{د}(\text{س})$

الدالة فردية

٢٨)

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س} - 1 & \text{عندما س} > 0 \\ -\text{س} + 1 & \text{عندما س} < 0 \end{cases}$$

$$\text{د}(-\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - 1 & \text{عندما س} > 0 \\ \text{س} + 1 & \text{عندما س} < 0 \end{cases}$$

$\text{د}(-\text{س}) = \text{د}(\text{س})$ الدالة زوجية

٢٩) $\text{د}(-\text{س}) = (-\text{س})^{2} + \text{ظا}(-\text{س})$

$= \text{س}^{2} - \text{ظا س} = -(-\text{س}^{2} + \text{ظا س})$

$\text{د}(-\text{س}) \neq \pm\,\text{د}(\text{س})$ الدالة ليست زوجية ولا فردية

٣٠) د (- س) = ٤ (- س)^{٣} + ٣ جا^{٢} (- س)

= - ٤ س^{٣} + جا^{٢} س = - (٤ س^{٣} – ٣ جا^{٢} س)

د(- س) ≠ ± د (س) الدالة ليست زوجية ولا فردية

إجابة تمارين (١٤)

(١

د (س) =-١   د (س ٩ = ٢

] - ∞ ، ٠ ب   ] ٠ ، ∞ [

س	(٠)	٢	٠	٣
د (س)	١-	١-	٢	٢

المدى =] ـ١ ، ٢ [

(٢

د (س) =ـ٢   د (س) =٢

]-٣ ، ١[[١ ، ٤]

س	-٣	(١)	١	٤
د (س)	-٢	(-٢)	٢	٢

المجال = [-٣ ، ٤]   المدى = [-٢ ، ٢]

٣)

د (س) = ٤ د (س) = ٢ ـ س

[٢ ، ∞ [ ] - ∞ ، ٢]

س	٢	٣	(٢)	١
د (س)	٤	٤	(٠)	١

المجال = ح المدى + [٢ ، ∞ [

٤)

د (س) =٤ د (س) س + ٤

] - ، ∞ [ ] -∞ ، ٠ [

س	٠	١	(٠)	١ـ
د(س)	٤	٤	(٤)	٣

المجال = ح المدى =] - ∞ ، ٤ [

٥)

د (س) = س ـ ٢   د (س) = ٢ ـ س

[٢ ، ∞ [   ] -∞ ، ٢ [

س	٢	٣	٤	(٢)	١	٠
د (س)	٠	١	٢	(٠)	١	٢

المجال = ح   المدى = [٢ ،∞ [

٦)

د (س) = س   د (س) = ٣ س ـ ٢

] -∞ ، ١ [[١ ، ∞ [

س	(١)	٠	-٢	١	٢	٣
د(س)	(١)	٠	-٢	١	٤	٧

المجال = ح   المدى =] -∞ ، ∞ [= ح

٧)

د (س) = ٢ س – ١   د (س) =٥

] -∞ ، ٣]   ] ٣ ، ∞ [

س	٣	٢	١	(٣)	٤	٥
د (س)	٥	٣	١	(٥)	٥	٥

المجال = ح   المدى =] - ∞ ، ∞ [= ح

٨)

د (س) = ٢ + س   د (س) = ٢س

[-٢ ، ٢ [[٢ ، ٤]

س	-٢	١	(٢)	٢	٣	٤
د (س)	٠	٣	(٤)	٤	٦	٨

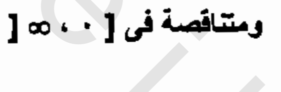
المجال = [-٢ ، ٤]   المدى = [٠ ، ٨]

٩)

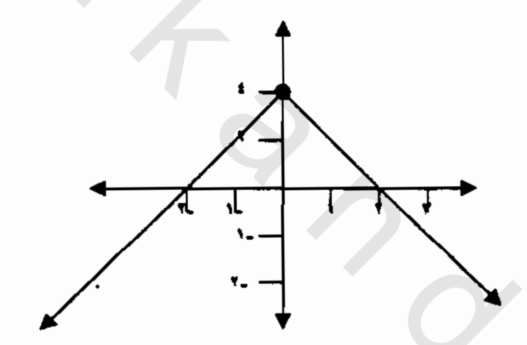
القاعدة الأولى	القاعدة الثانية
د (٠) = ٤	د (٠) = ٤
د (١) = ٢	د (-١) =٢
د (٢) = ٠	د (-٢) =٠

المدى =] - ∞ ، ٠]

الأطراد : متزايدة ف] - ∞ ٠]


ومتناقصة فى [٠ ، ∞ [

الدالة زوجية

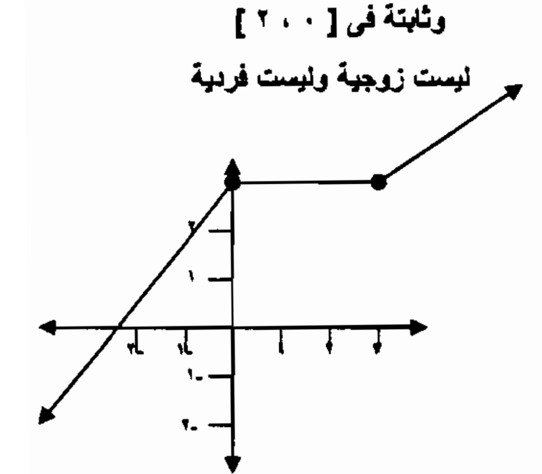


١٠) المجال = ح المدى = ح

ألأطراد : متزايدة فى] - ∞ ، ٠]

وثابتة فى [٠ ، ٢]

ومتزايدة فى [٢ ، ∞ [


ليست زوجية وليست فردية

(١١)

المجال = ح ، المدى = ح

د (س) ٢ – س^{٢} ، س ≥ ٠			
س	٠	-١	-٢
ص	٢	١	-٢

د (س) = -٣ + ٢ ، س < ٠			
س	٠	١	٢
ص	٢	-١	-٤

د (٠) = ٢ – ٠ = ٢

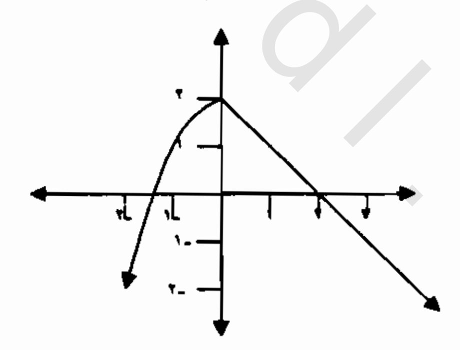
د (٣) = -٩ + ٢ = -٧

د (-٢) ٢ – ٤ = -٢

المدى =] -∞ ، ٢]

الأطراد : متزايدة فى] - ∞ ، ٠] ومتناقصة فى [٠ ، ∞ [

ليست زوجية وليست فردية



١٢)

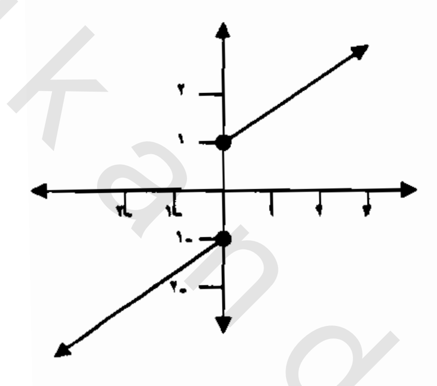
المدى =] - ∞ ، ١-] U { ٠ } U [١ ، ∞ [

الأطراد : تزايدة فى] - ∞ ، ٠ [

وتزايدية فى] ٠ ، ∞ [

وثابتة عندما س = ٠

النوع : فردية من التماثل حول نقطة الأصل



إجابة تمرين (١٥)

١)

اس-٢ا= ٣

∴ س - = ٣ او س ـ٢ = -٣

س = ٣+ ٢ . س = -٣ + ٢

س = ٥ ، س = -١ ∴ س ∈ { ٥ ، -١}

٢)

∴ ا٢س ـ ٣ا= -٩

س = Ø

٣)

∴ ا ٢ س + ٤ ا = ١ ـ ١٥

∴ ا ٢ س + ٤ ا = ٥

٢ س + ٤ = ٥ او ٢س + ٤ ـ ٥

٢ س = ٥ ـ ٤ ٢ س = -٥ ـ ٤

٢س = ١ ٢س = -٩

س = $\frac{١}{٢}$ س = ٤,٥

س ∈ { ٠,٥ ، -٤,٥ }

٤)

ا ٣ س ـ٤ ا + ٧= ٠

∴ ا ٣س ـ ٤ا = -٧

∴ س = Ø

(٥

∴ ا س ـ ٣ا = ا س ـ٧ ا

اذ ا س ـ ٣ = س ـ٧ او س ـ ٣ = س + ٧

س – ٣ – س + ٧ = ٠ او س- ٣ + س – ٧ = ٠

٢ س – ١٠ = ٠ ٢س = ١٠ س = ٥

٦)

:. | ٢س – ٣| = | س + ٢ |

اما ٢س – ٣ = س + ٢ او ٢س – ٣ = -س ٢

٢ س –٣ – س ٢ = ٠ ٢ س - + س + ٢ =٠

س –٥= ٠ ٣ س – ١ =٠س = ٥ ٣ س = ١ س = $\frac{١}{٣}$

س ∋ { ٥، $\frac{١}{٣}$ }

٧) :. | ٢س – ٥ | + ٣س – ٧ = ٠ ا دا ٢س س + ٣س – ٧ =٠ أ)

أو ٢س – ٥ –٣ س + ٧ = ٠

ب) من لمعادلة أ) ٥ س – ١٢ =٠ ٥س = ١٢ :.س= $\frac{١٢}{٥}$

وهى لاتحقق معادلة المقياس

من المعادلة ب) - س + ٢ =٠ - س = -٢ س = ٢ :. س ∋ { ٢}

٨)

٣|س+٤| + ٩ – ٢ س = ٠ اما ٣ س + ٤ + ٩ – ٢ س = ٠ (أ)

أو ٣س + ٤ – ٩ + ٢ س = ٠ (ب)

من (أ) س + ١٣ = ٠ س = -١٣ (ب) ٥ س – ٥ = ٠

٥ س = ٥ س = ١ مجموعة الحل Ø

٩)

|س|^{٢} – ٧|س| + ١٢ = ٠ (|س| - ٤)(|س|-٣) = ٠

|س| - ٤ = ٠ س=±٤

|س| - ٣ = ٠ |س| = ٣ س= ± ٣

س ∋ { ± ٤ ، ± ٣}

١٠)

|س|٢ + ٦ |س| + ٨ = ٠   (|س| + ٢) (|س| + ٤) = ٠

|س| + ٢ = ٠ |س| = -٢   س = Ø

|س| + ٤ = ٠ |س| = - ٤   س = Ø

١١)

|س|٢ - ٥ |س| - ١٤ = ٠   (|س| - ٧) (|س| + ٢) = ٠

|س| - ٧ = ٠ |س| = ٧   س = ± ٧

|س| + ٣ = ٠ |س| = -٢   س = Ø   س ∈ { ٧ ، -٧ }

١٢)

|س|٢ +٨ |س| - ٢٠ = ٠   (|س| + ١٠) (|س| - ٢) = ٠

|س| + ١٠ = ٠ |س| = -١٠   س = Ø

|س| - ٢ = ٠ |س| = ٢   س = ± ٢   س ∈ { ٢ ، - ٢ }

١٣)

|س|٢ - |س| = ٠ |س| (|س| - ١) = ٠ |س| = ٠   س = ٠

|س| - ١ = ٠ |س| = ١   س = ± ١   س ∈ { ١ ، - ١ }

١٤)

س |س| + ٣ = ٠   س (|س| + ٣) = ٠   س = ٠ |س| + ٣ = ٠

|س| = -٣ ، = Ø   س { ٠ }

١٥)

٢س – ٦ = ٠   س = ٣

د (س) = { ٢س – ٦ + ٤ س ≥ ٣ ؛ - ٢ + ٦ + ٤ س < ٣ } = { ٢ س – ٢ س ≥ ٣ ؛ -٢ س + ١٠ س < ٣ }

د ١ (س)= ٢ س – ٢ | د (س) = - س + ١٠

س	٣	٤
ص	٤	٦

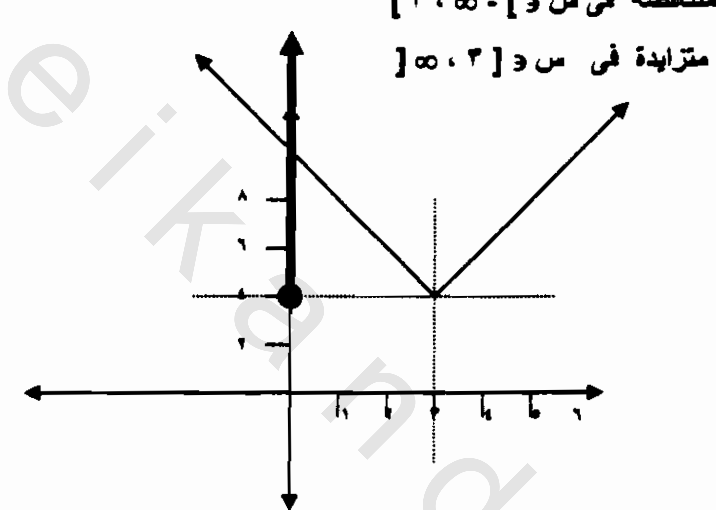
س	٣	٢
ص	٤	٦

المجال : س ∈ ح المدى : ص ∈ [٤ ، ∞ [

النوع : ليست زوجية وليست فردية

الأطراد متناقصة في س ∈] - ∞ ، ٣]

متزايدة في س ∈ [٣ ، ∞ [



١٦)

٢س– ٣ = ٠ ٢س = ٣ س = ١,٥

٢س ٣ - ٤س + ٢ س ≥ ١,٥

د (س) =

-٢ س + ٣ -٤ + ٢ س < ١,٥

د (س) = { ٢ س – ١ س ≥ ١,٥
-١ س + ٥ س < ١,٥ }

د ١ (س) = -٢ س – ١

س	١,٥	٢
ص	-٤	-٥

د (س) = -٦ س + ٥

س	١,٥	١
ص	-٤	-١

س ص ∈ ح

الأطراد متناقصة ∀ ∈ ح

النوع ليست زوجية وليست فردية

١٧)

ٍ ٢ س عندما س ≥ ٠
صفر عندما س < ٠

المجال = ح

المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : متزايدة عندما س ≥ ٠

وثابتة عندما س ∈] - ∞ ، ٠]

النزع : ليست زوجية وليست فردية

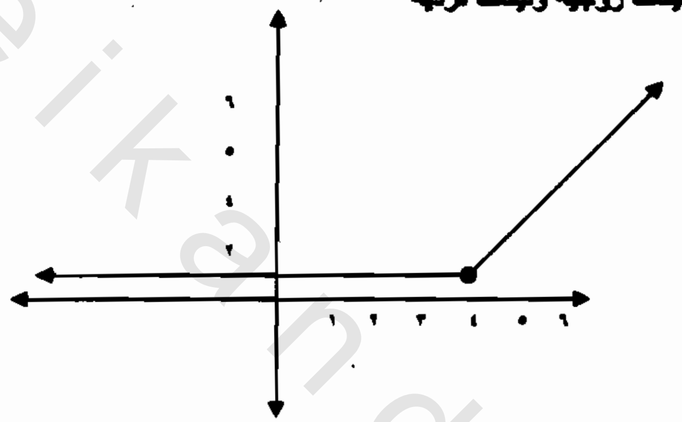
(١٨

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ١٥ & \text{عندما } س \geq ٤ \\ ١ & \text{عندما } س < ٤ \end{cases}$$

المجال = ح ، المدى = [١ ، ∞ [

تزايدية عندما س ≥ ٤ وثابتة عندما س < ٤

وهى ليست زوجية وليست فردية



(١٩

ويكون الشكل النهائى للدالة

$$د(س) = \begin{cases} ٤س - ٤ : س \geq \frac{١}{٣} \\ ٢س - ٢ : س < \frac{١}{٣} \end{cases}$$

د (س) = ٤ س - ٤   د (س) = -٢ س - ٢

$[\frac{١}{٣} ، ∞[$ $]-∞ ، \frac{١}{٣}[$

س	$\frac{١}{٣}$	١	٢	$\frac{١}{٣}$	٠	-١
د(س)	$٢\frac{-٢}{٣}$	٠	٤	$-\frac{٢}{٣}٢$	-٢	٠

المدى = { $\frac{-٢}{٣}$ ، ٢، ∞ [

د (س) ليست زوجية ولافردية

٢٠)

يكون الشكل النهائى للدالة

د (س) = { ٣ س + ٣ : س ≥ - $\frac{١}{٢}$
- س + ١ : س < - $\frac{١}{٢}$

د (س) = ٣ س + ٣   د (س) = - س + ١

[- $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [   ] - ∞ ، - $\frac{١}{٢}$ [

س	- $\frac{١}{٢}$	٠	١	$\frac{١}{٢}$	-١	-٢
د(س)	٢ $\frac{١}{٢}$	٣	٦	٢ $\frac{١}{٢}$	٢	٣

- المدى = [١ $\frac{١}{٢}$ ، ∞ [، د (س) ليست زوجية ورفردية

تزايدية فى [- $\frac{1}{2}$ ، ∞ [، تناقصية فى] -∞ ، - $\frac{1}{2}$]

(٢١

٣-(٢ - س) : س ≥ ٢ = { ١+س : س ≥ ٢

د(س) = ٣ - | ٢ - س | =

٣-(-٢+ س) : س > ٢ = { ٥- س : س> ٢

د(س) = ١ + س | د(س) = ٥ - س

س	٢	١	٠	②	٣	٤
ص	٣	٢	١	③	٢	١

المدى =] -∞ ، ٣]

(٢٢

د(س) = { ٦ − ٢س : س ≥ $\frac{٦}{٢}$ ، -(٦-٢س) : س > $\frac{٦}{٢}$ }

= { ٦ − ٢س : س ≥ ٣ ، -٦ + ٢س : س > ٣ }

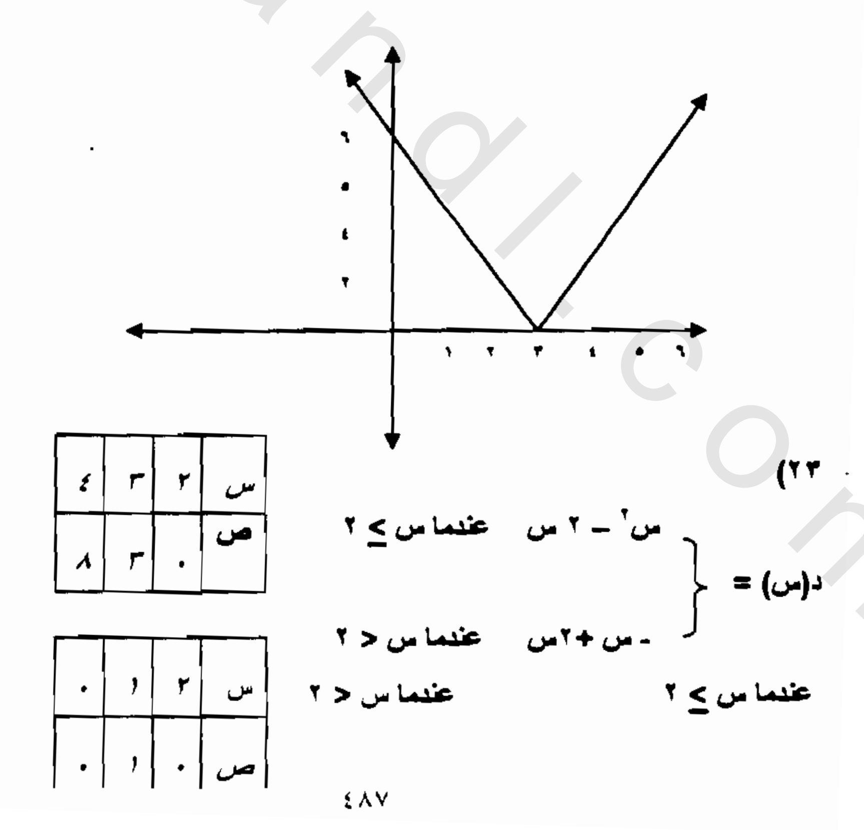
د(س) = ٦-٢س   د(س) = -٦+٢س

] -∞ ، ٣]   ] ٣ ،∞ [

س	٣	٢	١	٣	٤	٥
ص	٠	٢	٤	٠	+٢	+٤

المدى = [٠ ، ∞ [، د(س) ليست زوجية ولا فردية

د(س) تزايدية فى الفترة] ٣ ، ∞ [، تناقصية فى الفترة] -∞ ، ٣]



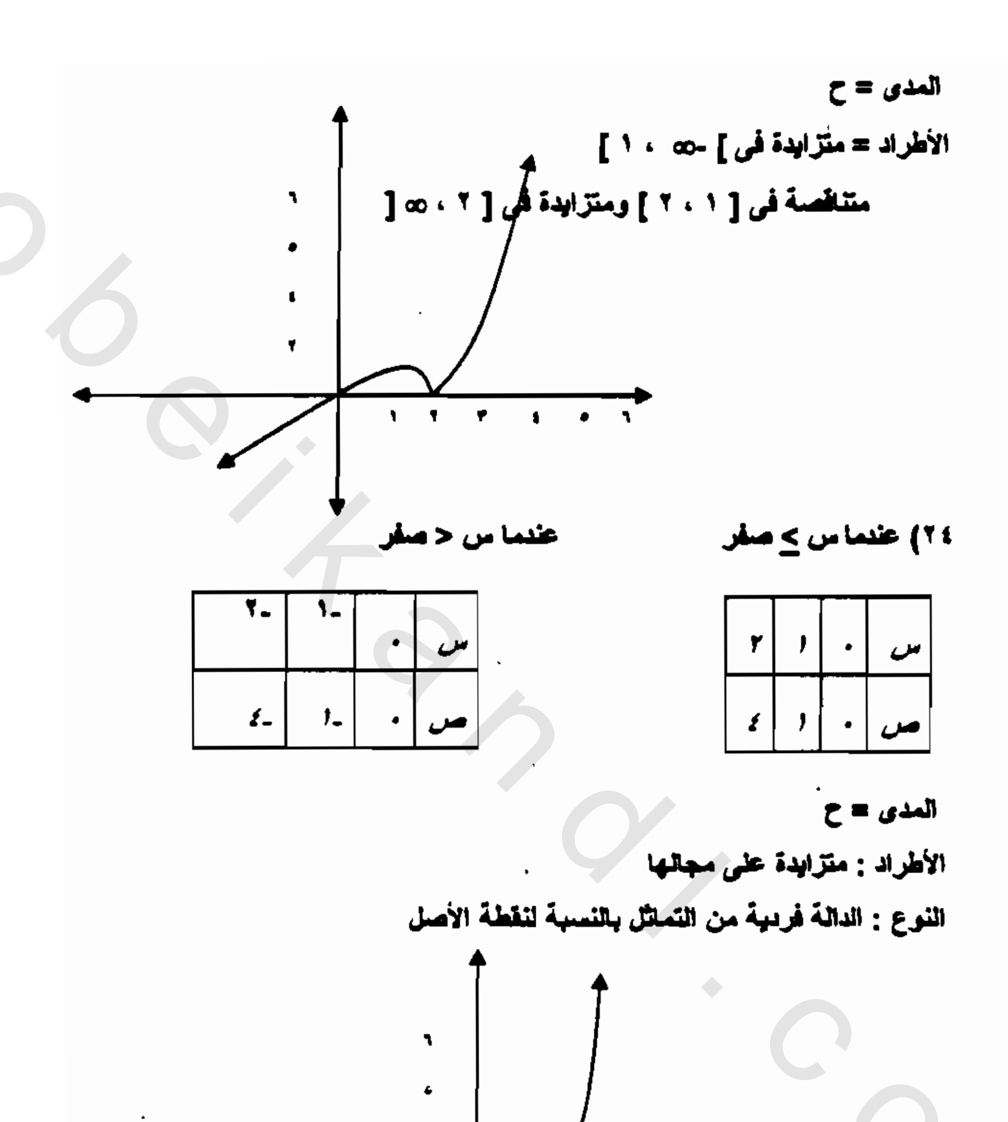
(٢٣

د(س) = { س^{٢} − ٢ س عندما س ≤ ٢ ، - س +٢س عندما س > ٢ }

عندما س ≤ ٢   عندما س > ٢

س	٢	٣	٤
ص	٠	٣	٨

س	٢	١	٠
ص	٠	١	٠



المدى = ح

الأطراد = متزايدة فى] -∞ ، ١]

متناقصة فى [١ ، ٢] ومتزايدة فى [٢ ، ∞ [

٢٤) عندما س ≤ صفر

س	٠	١	٢
ص	٠	١	٤

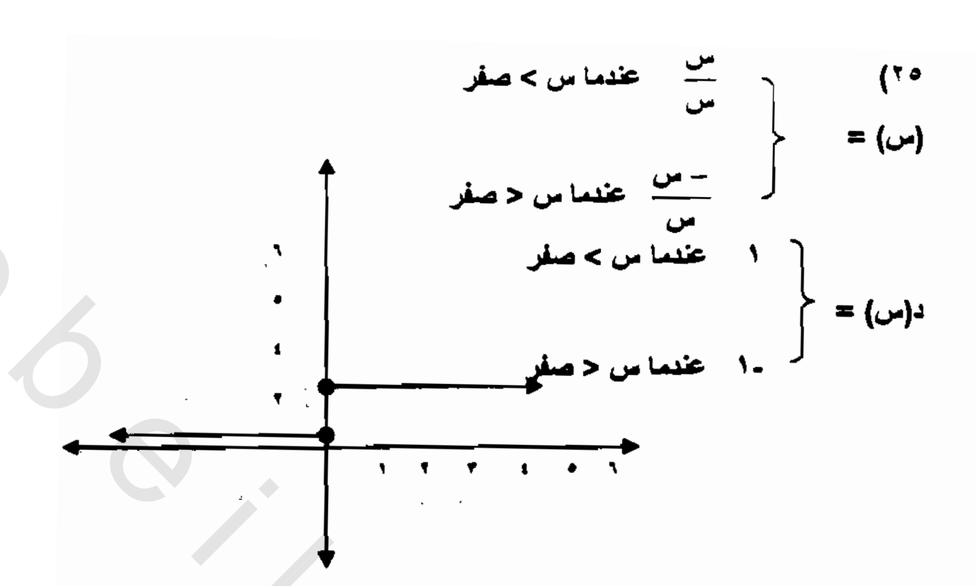
عندما س > صفر

س	٠	-١	-٢
ص	٠	-١	-٤

المدى = ح

الأطراد : متزايدة على مجالها

النوع : الدالة فردية من التماثل بالنسبة لنقطة الأصل


٢٥)
د(س) =
س/س عندما س > صفر
−س/س عندما س < صفر
د(س) =
١ عندما س > صفر
−١ عندما س < صفر
١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦
٢ ٤ ٥ ٦

أجابة تمرين (١٦)

(١)

مدى جميع الدوال = [٠ ، ∞ [

أ ــ ص = س^٢

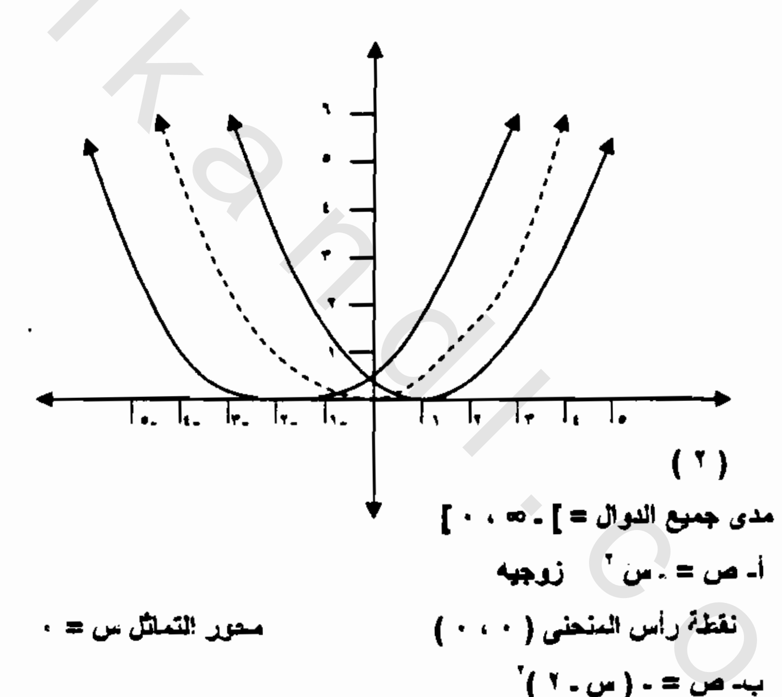
تزايد فى [٠ ، ∞ [وتناقص فى] ـ ∞ ، ٠ [

بـ ص = (س ـ ١)^٢

تزايد فى [١ ، ∞ [، وتناقص فى] ـ∞ ، ٠ [

جـ ـ ص = (س + ٢)^٢

تزايد فى [ـ٢ ، ∞ [، وتناقص فى] ـ∞ ، ـ٢ [



(٢)

مدى جميع الدوال =] ـ ∞ ، ٠]

أـ ص = ـ س^٢ زوجيه

نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠) محور التماثل س = ٠

بـ ص = ـ (س ـ ٢)^٢

نقطة رأس المنحنى (٢ ، ٠) محور التماثل المستقيم س = ٢

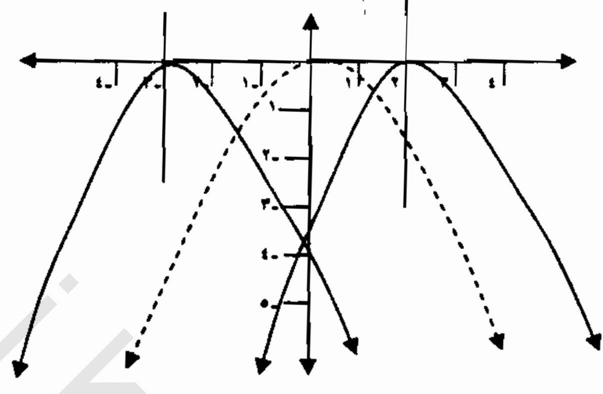
تزايد فى] ـ∞ ، ٢] تناقص فى [٢ ، ∞ [

ليست زوجيه ولا فرديه

جـ) ص = - (س + ٣)^{٢}

نقطة رأس المنحنى (-٣ ، ٠) تزايد فى] -∞ ، -٣]

تناقص فى [-٣ ، ∞ [ليست زوجيه ولا فرديه



(٣)

د (س) = س^{٢} + ٦ س + ٩

= (س = ٣)^{٢}

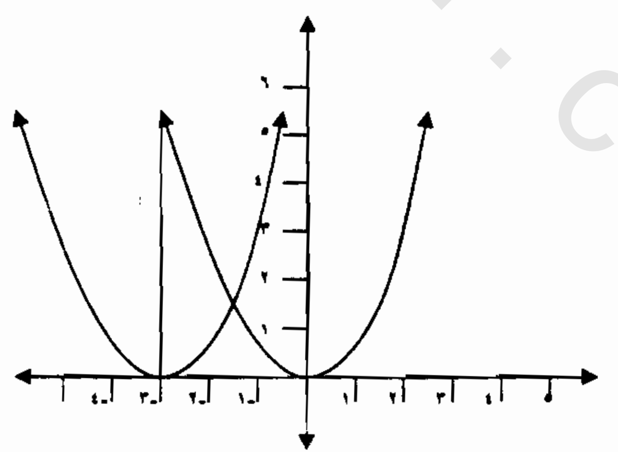
أ- نقطة رأس المنحنى (-٣ ، ٠)

بـ مدى الداله = [٠ ، ∞ [

جـ الداله تزايديه فى [-٣ ، ∞ [تناقصيه فى] -∞ ، -٣ [

وامكن الحور على منحنى الداله د (س) = س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س+ ٣)^{٢}

وذلك بعمل أزاحة لمنحنى الداله د (س) = س^{٢} أفقيه بمقدار ٣ فى الاتجاه السالب لمحور السينات



(٤) س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٢}{٤}$ = ٢   ∴ أ = ١

د (٢) = ٤ ـ ٨ + ٣ = ـ ١   ∴ ب = ـ ٤

∴ راس المنحنى (٢ ، ـ ١)

س	٤	٣	٢	١	٠
ص	٣	٠	ـ١	٠	٣

المدى = [ـ١ ، ∞]

معادلة محور التماثل س = ٢ (متماثل حول لمستقيم س = ٢)

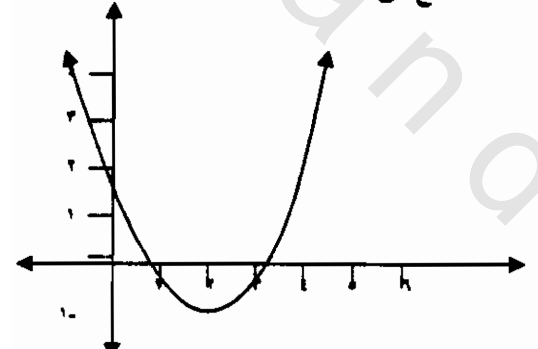
الأطراد : تناقصية فى] ـ ∞ ، ٢]

تزايدية فى [٢ ، ∞]

∴ ص = س ^{٢} ـ ٤ س + ٣

لأيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

لأيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠



٥)

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٣}{٢}$

د ($\frac{٣}{٢}$) = $\frac{٩}{٤}$ - $\frac{٩}{٢}$ = -$\frac{٩}{٢}$

د (ـ٣) = ٩ + ٩ = ١٨

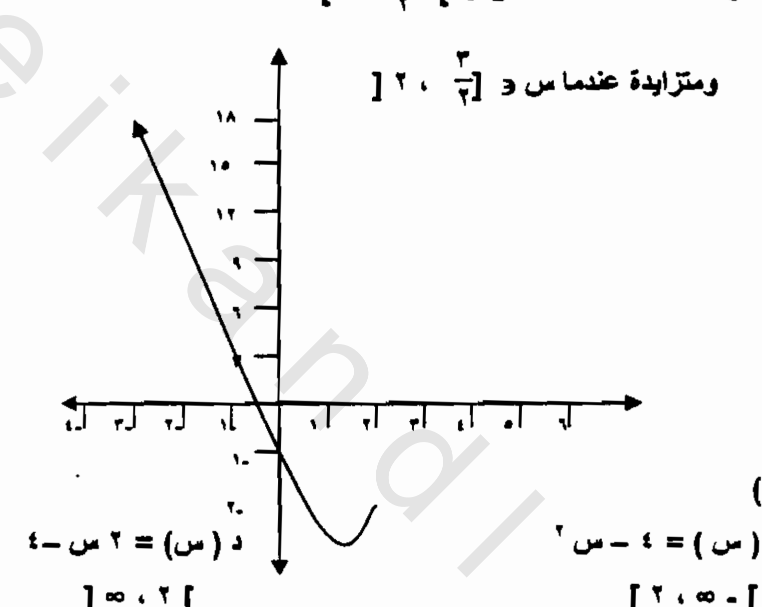
د (٢) = ٤ ـ ٦ = ـ٢

س	-٣	$\frac{٣}{٢}$	٢
ص	١٨	$\frac{٩}{٤}$	-٢

المدى = [-$\frac{٩}{٤}$ ، ١٨] ، المجال = [-٣ ، ٢]

الاطراد : متناقصة عندما س ∈] -$\frac{٣}{٢}$ ، ٣ [

ومتزايدة عندما س ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ٢]



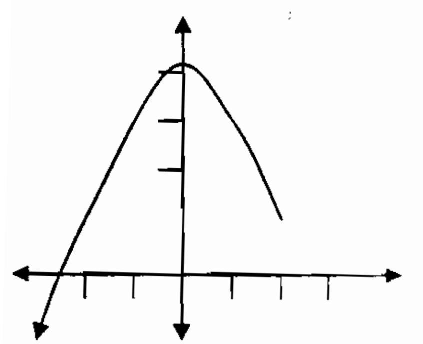
٦)

د (س) = ٤ – س^{٢} د (س) = ٢ س – ٤

] -∞ ، ٢]   ] ٢ ، ∞ [

س	٢	١	٠	-١	-٢	-٣	(٢)	٣	٤
د (س)	٠	٣	٤	٣	٠	-٥	(٠)	٢	٤

المدى =] -∞ ، ∞ [= ح



٧)

$$|س| = \begin{cases} س & س \geq ٠ \\ -س & س < ٠ \end{cases}$$

$$د(س) = س\,|س| = \begin{cases} س^٢ & س \geq ٠ \\ -س^٢ & س < ٠ \end{cases}$$

د (س) = س^٢ ، [٠ ، ∞ [

د (س) = - س^٢ ،] - ∞ ، ٠ [

س	٠	١	٢	٠	-١	-٢
د(س)	٠	١	٤	٠	-١	-٤

المدى = ح

٨)

د(س) = س |س-٢| - ١

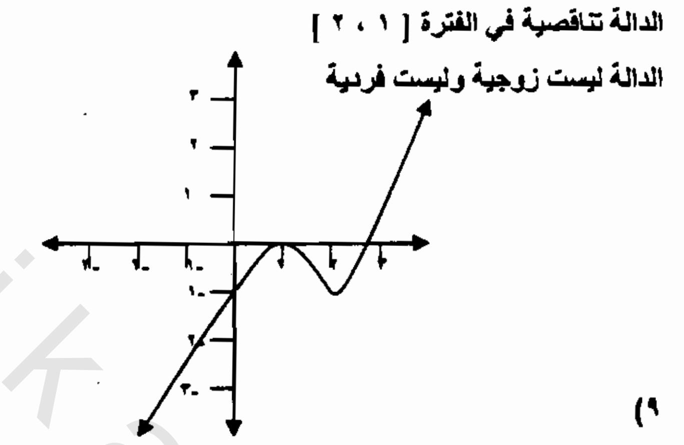
$$د(س) = \begin{cases} س(س-٢) - ١ & س \geq ٢ \\ س(-س+٢) - ١ & س < ٢ \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} (س-١)^٢ - ٢ & س \geq ٢ \\ -(-س-١)^٢ & س < ٢ \end{cases}$$

المدى = ح   الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، ١ [، في] ٢ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة [١ ، ٢]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



٩)

$د(س) = (س + ١)|س| + ٢$

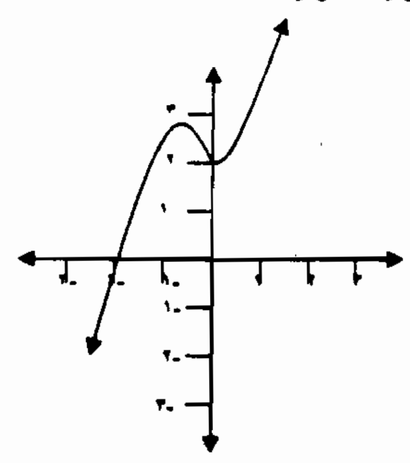
$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + س + ٢ & س \geq ٠ \\ -س^٢ - س + ٢ & س < ٠ \end{cases}$$

$$د(س) = \begin{cases} (س + ٠,٥)^٢ + \frac{٧}{٤} & س \geq ٠ \\ \frac{٩}{٤} - (-س - \frac{١}{٢})^٢ & س < ٠ \end{cases}$$

المدى = ح   الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، $-\frac{١}{٢}$ [، في] ٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة [$-\frac{١}{٢}$ ، ٠]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



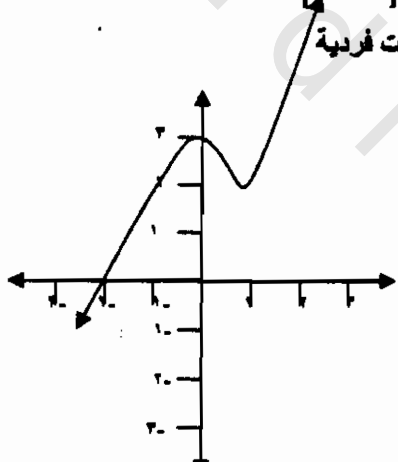
١٠)

$$د(س) = \begin{cases} (س - ١)^{٢} - ٢ & س \le ٠ \\ ٣ - س^{٢} & س > ٠ \end{cases}$$

المدى = ح الدالة تزايدية في الفترة] - ∞ ، ٠ [، في] ١ ، ∞ [

الدالة تناقصية في الفترة [٠ ، ١]

الدالة ليست زوجية وليست فردية



إجابة تمارين (١٧)

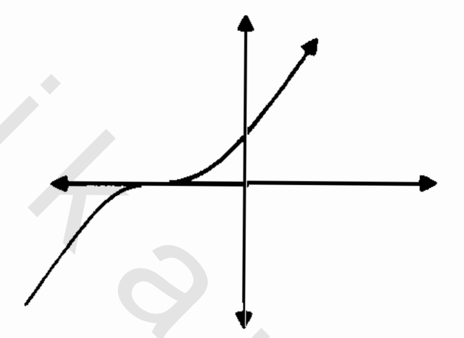
١)

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص	-٢٧	-٨	-١	٠	١	٨	٢٧

المدى : ح والدالة تزايديه فى ح

والمنحنى متماثل حول النقطة (-٢ ، ٠)

الداله ليست زوجية ولا فرديه

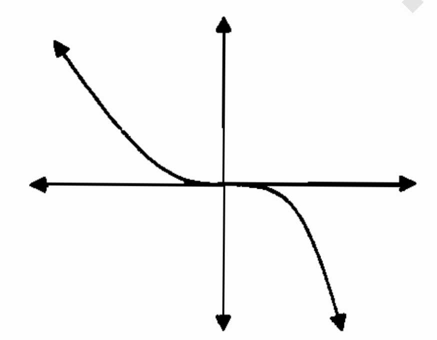


٢)

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
ص	-٣	١١	٤	٣	٢	-٥	-٢٥

المدى : ح والداله تناقصية فى ح

المنحنى متماثل حول (-١ ، ٢) **الداله ليست زوجية ولا فرديه**



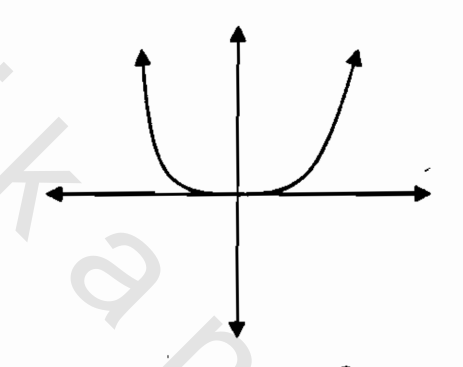
(٣)

د(س) = { س^٣ عندما س ≤ ٠ ، - س^٣ عندما س < ٠ }

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٨	١	٠	١	٨	٢٧

المدى [٠، ∞ [الداله تناقصية فى] - ∞ ، ٠] وتزايدية فى [٠ ، ∞ [

والداله متماثلة حول محور الصادات فهى زوجية



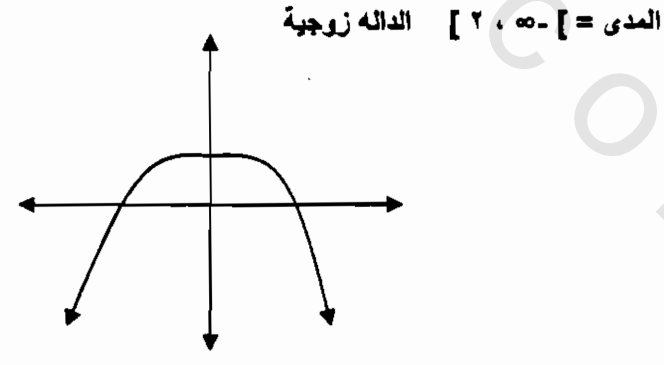
(٤)

د(س) = { ٢ - س^٣ عندما س≤ ٠ ، ٢+ س^٣ عندما س < ٠ }

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٢٥-	٦-	١	٢	١	٦-	٢٥-

تزايدية فى] -∞ ، ٠] تناقصية فى [٠ ، ∞ [

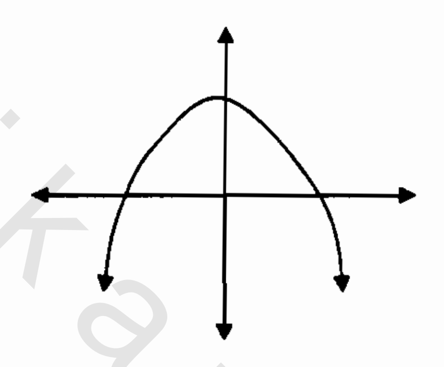
المدى =] -∞ ، ٢] الداله زوجية



٥) د(س) = ⎨ ٢- (س-١)^{٢} عندما س ≤ ١
٢ + (س-١)^{٢} عندما س >١

المدى] -∞ ، ٢] تزايدية فى] - ∞ ، ١ [تناقصية فى [١ ، ∞ [

والداله ليست زوجية وليست فردية

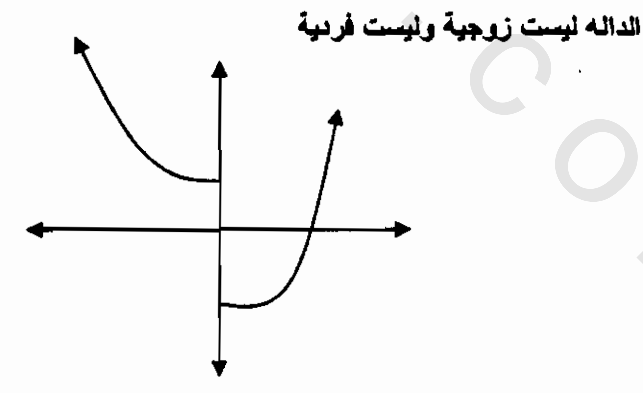


٦)

د(س) = ⎨ س^{٢} – ٣ عندما س ≤ ٠
- س^{٢} + ٣ عندما س > ٠

المدى =] ٣ ، ∞ [تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

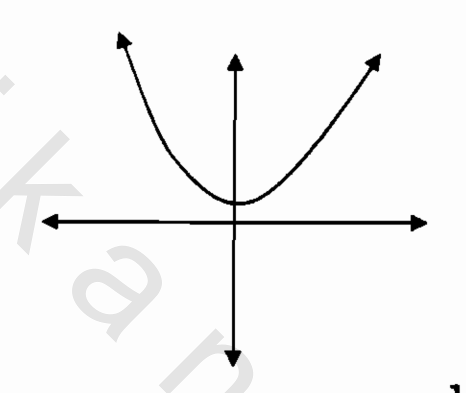
الداله ليست زوجية وليست فردية



٧) د(س) = $\begin{cases} ٢ + س^٣ & \text{عندما س ≤ ٠} \\ ٢ - س^٣ & \text{عندما س < ٠} \end{cases}$

المدى [٢ ، ∞ [تناقصية فى] - ∞ ، ٠ [تزايدية فى [٠ ، ∞ [

الداله ليست زوجية وليست فردية

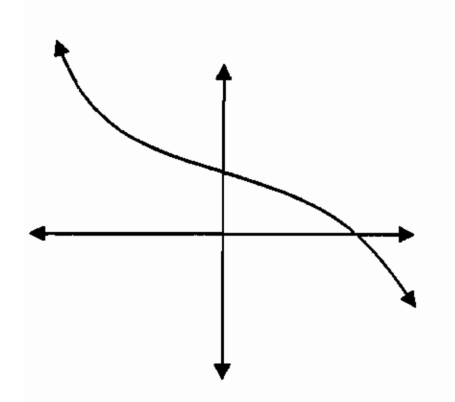


٨)] - ∞ ، ٠]

ص = ٤- $س^٣$

س	٠	١-	٢-
ص	٤	٥	١٢

ص = ٤ – ٣ س



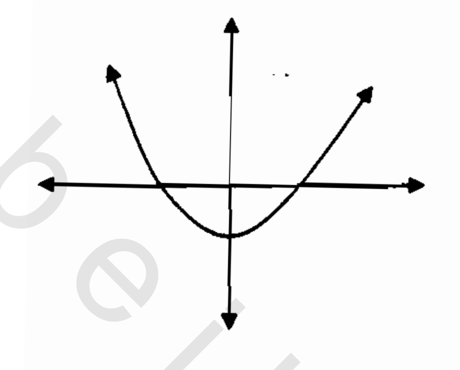
س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٠

المدى = ح

٩)

] - ∞ ، ١]

ص = $س^{2}$ − ١



س	١-	٠	١
ص	٠	١-	٠

] ٠ ، ∞]   ص = $(س − ١)^{3}$

س	١	٢	٣
ص	٠	١	٨

المدى = [-١ ، ∞ [

١٠)

د(س) = { − $س^{2}$ - ٤ عندما س ≤ ٠ ؛ $س^{2}$ − ٤ عندما س > ٠ }

ص = - $س^{2}$ − ٤

س	٣	٢	١	٠
ص	١-	١٢-	٥-	٤-

ص = $س^{2}$ − ٤

س	٠	١-	٢-	٣-
ص	٤-	٥-	١٢-	٣١-

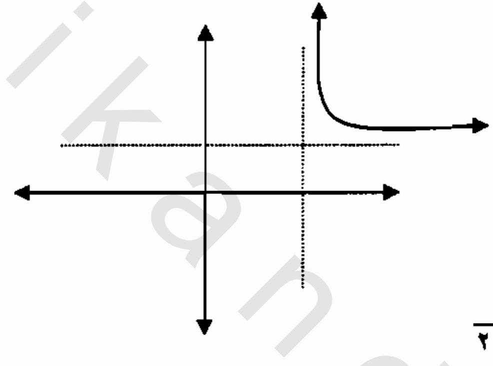
إجابة تمارين (١٨)

١) د(س)= ٢ + $\frac{١٠}{س-٣}$ المجال= ح - { ٣ }

س	٠	١	٢	٤	٥	٦
ص	$\frac{٤-}{٣}$	٣-	٨-	١٢	٧	$\frac{١٦}{٣}$

المدى = ح - { ٢ }

الأطراد: تناقصية فى] - ∞ ، ٣[،] ٣ ، ∞ [النوع: ليست فردية ولا زوجية

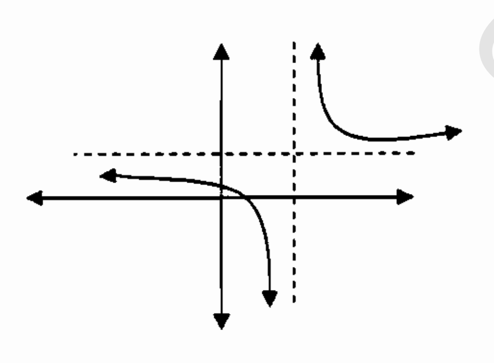


٢) د(س)= ٣ + $\frac{٧}{س-٢}$

س	٦	٥	٤	٣	٢،٥	١	٠	١-
ص	$\frac{٣}{٤}$ ٤	$\frac{١}{٣}$ ٥	$\frac{١}{٢}$ ٦	١٠	١٧	٤-	$\frac{١-}{٢}$	$\frac{٢}{٣}$

المدى = ح - { ٣ }

الداله تناقصية على مجالها لنوع: ليست فردية ولا زوجية



٣)

د(س)= { ١/(س-١) ، س > ١ ؛ -١/(س-١) ، س<١ }

ص= ١/(س-١) ص= -١/(س-١)

س	٣	٢	١ ١/٢	١ ١/٤	٣/٤	١/٢	٠	-١
ص	١/٢	١	٢	٢	٤	٢	١	١/٢

المدى = ح - { ١ }

الأطراد تزايدية فى] - ∞ ، ١[وتناقصية فى ،] ١ ، ∞ [

(٤)

د(س)= { ١/(س-٤) ، س> ٤ ؛ -١/(س-٤) ، س> ٤ }

المجال= ح - {+. ٤ } المدى= ح +

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٤[وتناقصية فى ،] ٤ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية

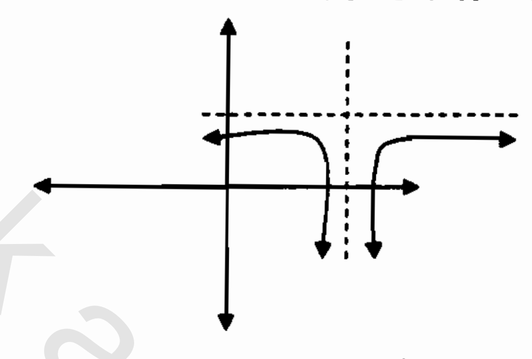
(٥)

$$د(س) = \begin{cases} ٢ - \dfrac{١}{س-٣} \\ ٢ + \dfrac{١}{س-٣} \end{cases}$$

المجال= {٣}   المدى=] - ∞ ، ٢[

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٣[وتناقصية فى ،] ٣ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية



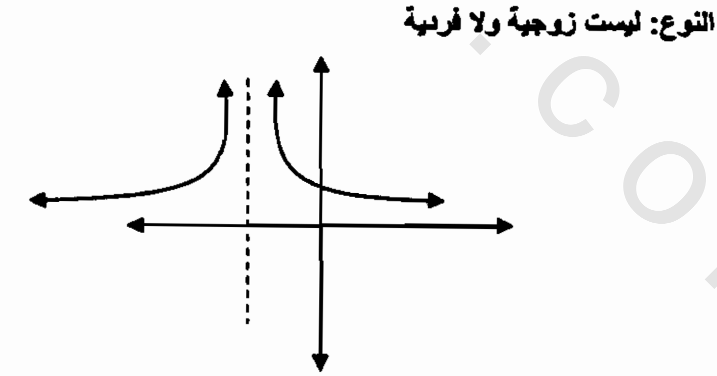
(٦)

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{١}{س+١} & س > -١ \\ \dfrac{-١}{س+١} & س < -١ \end{cases}$$

المدى= $ح^+$

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، -١[وتناقصية فى ،] -١ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية



(٧)

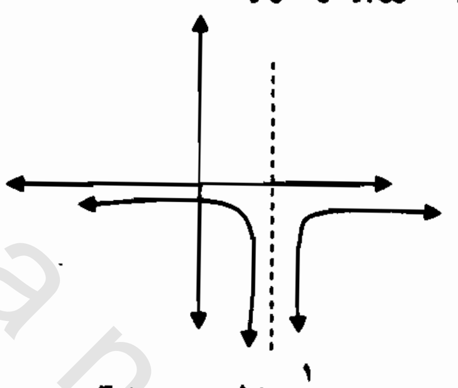
$$د(س) = \begin{cases} \frac{-١}{س-٢} \\ \frac{١}{س-٢} \end{cases}$$

المجال=ح - { ٢}

المدى= ح +

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، -٢[وتناقصية فى ،] -٢ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية



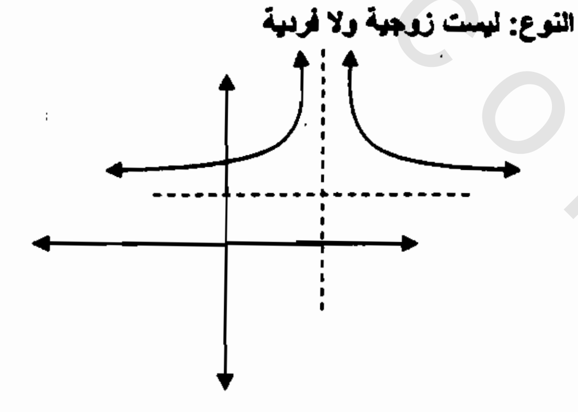
(٨)

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{س-٣} + ١ & س>٣ \\ -\frac{١}{س-٣} + ١ & س<٣ \end{cases}$$

المجال=ح - {٣} المدى=] ١ ، ∞ [

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٣[وتناقصية فى ،] ٣ ، ∞ [

النوع: ليست زوجية ولا فردية

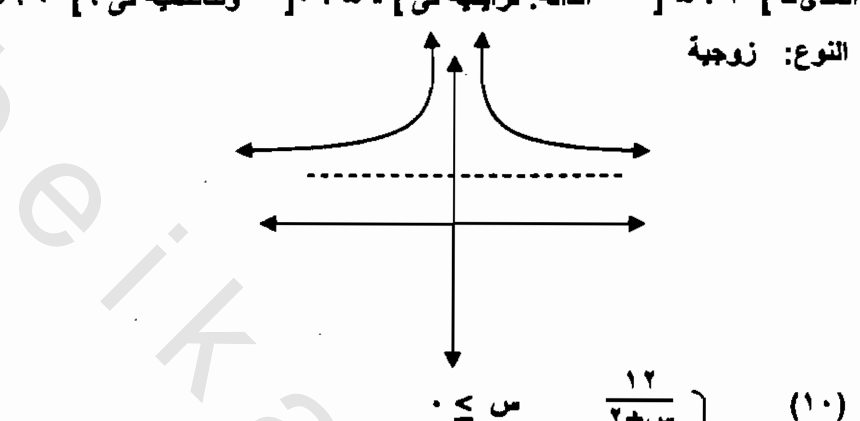


(٩)

د(س)= $\begin{cases} \frac{١}{س} + ١ & س > ٠ \\ \frac{١}{س} + ١ & س < ٠ \end{cases}$

المدى=] ١ ، ∞ [الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٠[وتناقصية فى ،] ٠ ، ∞ [

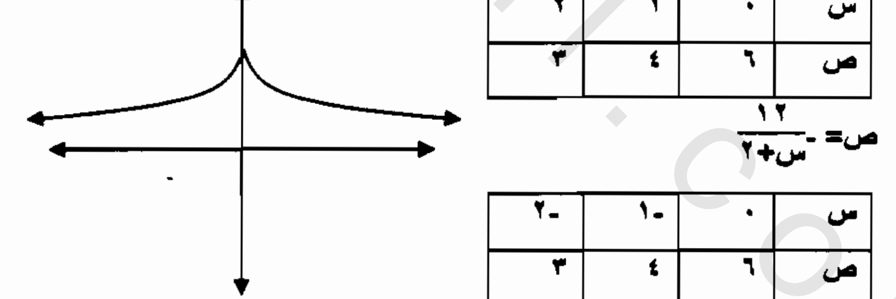
النوع: زوجية



(١٠)

د(س)= $\begin{cases} \frac{١٢}{س+٢} & س \geq ٠ \\ \frac{١٢}{س+٢} & س < ٠ \end{cases}$

س= $\frac{١٢}{س+٢}$



س	٠	١	٢
ص	٦	٤	٣

ص= - $\frac{١٢}{س+٢}$

س	٠	١-	٢-
ص	٦	٤	٣

المجال=ح المدى=] ٠ ، ٦]

الدالة: تزايدية فى] - ∞ ، ٠[وتناقصية فى ،] ٠ ، ∞ [

النوع: زوجية

إجابة تمرين (١٩)

(١) $٢(س^{٢} - ١) = ٢^{٣س}$ ∴ $٢س^{٢} - ٢ - ٣س = ٠$ ∴ $٢س^{٢} - ٣س - ٢ = ٠$

∴ $(٢س + ١)(س - ٢) = ٠$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$ أو ٢

(٢) ∴ $س^{٢} = ٢س + ٨$ ∴ $س^{٢} - ٢س - ٨ = ٠$ $(س - ٤)(س + ٢) = ٠$

∴ س = ٤ أو - ٢

(٣) ∴ س = ٣

(٤) ∴ س - ٥ = ٠ ∴ س = ٥

(٥) $(س^{٢} + ٢س)^{٥} = ٣^{٥}$ ∴ $س^{٢} + ٢س = ٣$ $س^{٢} + ٢س - ٣ = ٠$

∴ $(س+٣)(س-١) = ٠$ ∴ س = -٣ أو ١

(٦) $س^{س^{٢} - ٢٥} = س^{٠}$ $س^{٢} - ٢٥ = ٠$ ∴ $(س-٥)(س+٥) = ٠$ ∴ $س = \pm ٥$

(٧) $(\frac{٣}{٥})^{س} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$ ∴ س = ٣

(٨) $٦^{س-٤} = ٦^{-٤}$ ∴ س – ٤ = - ٣ ∴ س = ١

(٩) $\frac{١٠^{ص-٤}}{٥^{ص-٤}} = ٢^{٣}$ ∴ $(\frac{١٠}{٥})^{ص-٤} = ٢^{٣}$

∴ $٢^{ص-٤} = ٢^{٣}$ ∴ ص = ٧

(١٠) $٢^{٣س-١} = ٢^{\frac{٧}{٢}}$ ∴ $٣س - ١ = \frac{٧}{٢}$ ∴ $٣س = \frac{٩}{٢}$ ∴ $س = \frac{٣}{٢}$

إجابة تمرين (٢٠)

(١)

$$= \frac{(٢^{٣})^{ن-٤} \times (٢ \times ٣)^{٧-ن} \times (٣^{٢})^{ن-٢}}{(٢)^{٢ن-١٠} \times (٣)^{ن+٣}} = \frac{٢^{٣ن-١٢} \times ٢^{٧-ن} \times ٣^{٧-ن} \times ٣^{٢ن-٤}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}}$$

$$\frac{٢^{٢ن-٥} \times ٣^{ن+٣}}{٢^{٢ن-١٠} \times ٣^{ن+٣}} = ٢^{٢ن-٥-٢ن+١٠} \times ٣^{ن+٣-ن-٣} = ٢^{٥} \times ٣^{٠} = ٣٢$$

(٢) $\frac{٢^{٩س} \times ٢^{٦-١٠س} \times ٧^{٣-٥س}}{٢^{١-س} \times ٧^{٣-٥س}} = ٢^{٦-س-١+س} \times ٧^{صفر} = ٢^{٥} = ٣٢$

(٣) $\frac{5^{3\text{ن}} \times 3^{4\text{ن}+2} \times 9^{\text{ن}}}{5^{3\text{ن}} \times 3^{6\text{ن}}} = \frac{3^{4\text{ن}+2} \times 3^{2\text{ن}}}{3^{6\text{ن}}} = \frac{3^{4\text{ن}+2+2\text{ن}}}{3^{6\text{ن}}}$

$= 3^{6\text{ن}+2-6\text{ن}} = 3^{2} = 9$

(٤) $\frac{(3)^{3(\text{س}-\frac{1}{3})} \times (2^{4} \times 3)^{\text{س}+3}}{(2\times 3)^{3\text{س}-3} \times (2^{2}\times 3)^{2-\text{س}} \times (2^{3}\times 3^{2})^{\text{س}+3}}$

$= \frac{3^{3\text{س}-1} \times 2^{4\text{س}+12} \times 3^{\text{س}+3}}{2^{3\text{س}-3} \times 3^{3\text{س}-3} \times 2^{4-2\text{س}} \times 3^{2-\text{س}} \times 2^{3\text{س}+9} \times 3^{2\text{س}+6}}$

$= \frac{2^{4\text{س}+12} \times 3^{3\text{س}-1+\text{س}+3}}{2^{3\text{س}-3+4-2\text{س}+3\text{س}+9} \times 3^{3\text{س}-3+2-\text{س}+2\text{س}+6}} = \frac{2^{4\text{س}+12} \times 3^{3\text{س}-1+\text{س}+3}}{2^{3\text{س}-3+4-2\text{س}+3\text{س}+9} \times 3^{3\text{س}-3+2-\text{س}+2\text{س}+6}}$

$\frac{2^{4\text{س}+12} \times 3^{4\text{س}+2}}{2^{4\text{س}+10} \times 3^{4\text{س}+5}} = 2^{4\text{س}+12-4\text{س}-10} \times 3^{4\text{س}+2-4\text{س}-5}$

$= 2^{2} \times 3^{-3} = \frac{2^{2}}{3^{3}} = \frac{4}{27}$

(٥) $\frac{2^{2\text{ن}-12} \times 2^{7-\text{ن}} \times 3^{7-\text{ن}} \times 3^{2\text{ن}-4}}{2^{2\text{ن}-10} \times 3^{\text{ن}+3}} = \frac{2^{\text{ن}+1} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times (2\times 3)^{\text{م}} \times 2^{2\text{ن}-\text{م}}}{(2\times 3)^{\text{ن}} \times (2\times 5)^{\text{م}+2} \times (3\times 5)^{\text{ن}}}$

$= \frac{2^{\text{ن}+1} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times 2^{\text{م}} \times 3^{\text{م}} \times 3^{2\text{ن}-\text{م}}}{2^{\text{ن}} \times 3^{\text{ن}} \times 2^{\text{م}+2} \times 5^{\text{م}+2} \times 5^{\text{ن}}} = 2^{\text{ن}+1} \times 2^{\text{م}} \times 2^{-(\text{م}+2)} \times 2^{-\text{ن}} \times 5^{\text{ن}+\text{م}} \times 5^{-(\text{م}+2)}$

$\times 5^{-\text{ن}} \times 3^{\text{م}} \times 3^{2\text{ن}-\text{م}} \times 3^{-\text{ن}} \times 3^{-\text{ن}} = 2^{-1} \times 5^{-2} \times 3^{0}$

(٦) $\frac{(5^{3})^{\text{س}-4} \times (3\times 5)^{6-\text{س}} \times (3^{2})^{\text{س}-2}}{(5^{2})^{\text{س}-3} \times 3^{\text{س}+3}} = \frac{5^{3\text{س}-12} \times 3^{6-\text{س}} \times 3^{2\text{س}-2}}{5^{2\text{س}-6} \times 3^{\text{س}+3}}$

$= 5^{3\text{س}-12} \times 5^{6-\text{س}} \times 5^{-(2\text{س}-6)} \times 3^{6-\text{س}} \times 3^{2\text{س}-2} \times 3^{-(\text{س}+3)}$

$= 5^{3\text{س}-12+6-\text{س}-2\text{س}+6} \times 3^{6-\text{س}+2\text{س}-2-\text{س}-3} \qquad 5^{0} \times 3 = 1 \times 3 = 3$

(٧) $\frac{3^{3\text{س}} \times (3^{5})^{\text{س}+2}}{(3^{8})^{\text{س}}} = 3^{3\text{س}+5\text{س}+10-8\text{س}} = 3^{10}$

(٨) $\frac{2^{4} \times \text{أ}^{8} \times \text{ب}^{-16} \times 5^{-2} \times \text{أ}^{-2} \times \text{ب}^{14}}{2^{-4} \times \text{أ}^{6} \times \text{ب}^{-2}} = 2^{4+4} \times 5^{-2} \times \text{أ}^{8-2-6} \times \text{ب}^{-16+14+2}$

$= 2^{8} \times 5^{-2} \times \text{أ}^{0} \times \text{ب}^{0} = \frac{2^{8}}{5^{2}} = \frac{256}{25}$

(٩) $\frac{٢^{١-٢ن} \times (٣^{٢} \times ٢^{٤})^{ن} \times ٣^{-ن}}{٣^{ن-٤} \times (٢^{٢} \times ٣)^{ن-١}} = \frac{٢^{١-٢ن} \times ٣^{٢ن} \times ٢^{٤ن} \times ٣^{-ن}}{٣^{ن-٤} \times ٢^{٢ن-٢} \times ٣^{ن-١}}$

$= ٢^{١-٢ن+٤ن-٢ن+٢} \times ٣^{٢ن-ن-ن+٤+١} = ٢^{٣} \times ٣^{٥} = ٨ \times ٢٤٣ = ١٩٤٤$

(١٠) $\frac{ب^{\frac{٣}{٢}} \times أ^{٢ن} \times جـ^{٢ن-١} \times جـ^{\frac{١}{٢}ن}}{ب^{ن} \times جـ^{ن} \times ب^{\frac{٣}{٢}} \times ب^{\frac{٣}{٢}}} = ب^{\frac{٣}{٢}-ن-\frac{٣}{٢}} \times أ^{٢ن}$

$\times جـ^{\frac{١}{٢}ن-١+\frac{١}{٢}ن-ن+\frac{٣}{٢}} = ب^{-ن} \; أ^{٢ن} \; جـ^{\frac{١}{٢}} = \frac{أ^{٢ن} \; جـ^{\frac{١}{٢}}}{ب^{ن}}$

إجابة تمرين (٢١)

١- أ) $(أ^{-١})^{\frac{١٢}{٤}} = أ^{-٣} = \frac{١}{أ^{٣}}$

ب) $أ^{-٥ \times \frac{٤}{٥}} = أ^{-٤} = \frac{١}{أ^{٤}}$

جـ) $أ^{-٨ \times \frac{٣}{٨}} = أ^{-٣} = \frac{١}{أ^{٣}}$

د) $\frac{١}{١٠٠٠}$ $\quad \frac{٢}{٣} \quad$ $\frac{١}{١٠^{٣}}$ $\quad \frac{٣}{٢}$

(٢) $\frac{\sqrt{٥} \times \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٤]{٥} \times \sqrt[٦]{٥}}{\sqrt[١٢]{(٥)^{٣}}}$

$= \frac{(٥)^{\frac{١}{٢}} \times (٥)^{\frac{١}{٣}} \times (٥)^{\frac{١}{٤}} \times (٥)^{\frac{١}{٦}}}{(٥)^{\frac{٣}{١٢}}} = \frac{(٥)^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٣}+\frac{١}{٤}+\frac{١}{٦}}}{(٥)^{\frac{٣}{١٢}}}$

$= \frac{(٥)^{\frac{١٥}{١٢}}}{(٥)^{\frac{١٣}{٢}}} = (٥)^{\frac{١٥}{١٢} - \frac{١٣}{٢}} = (٥)^{\frac{١٢}{١٢}} = ٥$

(٣) $س^{-\frac{٣}{٤}} \times س^{-\frac{٨}{٣}} \times س^{-\frac{٨}{٣}} \times س^{٣} = \frac{-٩-٣٢-٣٢+٣٦}{١٢} = \frac{-٣٧}{١٢}$

(٤) $\frac{٣^{٣س-١} \times ٧^{\frac{س\sqrt{س+٣}}{س}}}{٧^{س-١} \times ٣^{٣س-٢} \times ٧^{٢}} = ٣^{٣س-١-٣س+٢} \times ٧^{س+٣-س+١-٢} = ٣^{٢} \times ٧ = ٦٣$

(٥) $\frac{(٥)^{\frac{٣}{٢}س} \times ٥}{٥^{س} \times ٥^{\frac{١}{٢}س}} = (٥)^{\frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٢} - س - \frac{١}{٢}س} = ١$

(٦) الطرف الأيمن $= (٣)^{\frac{٣}{٢}ن + \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢}ن - ١ - \frac{١}{٢}} \times \frac{١}{ن}$

$= (٣)^{٣ن \times \frac{١}{ن}} = ٣^{٣} = ٢٧$

٣

(٧) $\frac{(\text{س}\quad)^{٣} - (٢\quad)^{٣}}{\text{س}\quad + (٢\text{س})\quad + ٢} = \sqrt{٢}$

$\frac{(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - ٢^{\frac{١}{٣}})(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + (٢\text{س})^{\frac{١}{٣}} + ٢^{\frac{٢}{٣}})}{\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + (٢\text{س})^{\frac{١}{٣}} + ٢^{\frac{٢}{٣}}} = \sqrt[٣]{٢}$ $\text{س}^{\frac{١}{٣}} - \sqrt[٣]{٢} = \sqrt[٣]{٢}$

$\text{س}^{\frac{١}{٣}} = ٢\sqrt[٣]{٢}$ بتكعيب الطرفين ∴ $\text{س} = ٨ \times ٢ = ١٦$

(٨) $(٢\text{أ}^{\frac{١}{٢}} - ٣\text{أ}^{-\frac{١}{٢}})^{٢} = ٤\text{أ} - ١٢\text{أ}^{\frac{١}{٢}}\text{أ}^{-\frac{١}{٢}} + ٩\text{أ}^{-١}$

$= ٤\text{أ} - ١٢ + ٩\text{أ}^{-١}$ ، المقدار $= ١٦\text{أ}^{\frac{٤}{٢}} + ٥\text{أ}^{\frac{١}{٢}}\text{ب}^{-\frac{١}{٢}} - ٤\text{ب}^{-١}$

(٩) المقدار $= \frac{٥^{\text{س}+١} - ٥^{\text{س}+٣}}{٥^{\text{س}+٥} - ٥^{\text{س}+٤}} = \frac{٥^{\text{س}+٣}(٥^{-٢} - ١)}{٥^{\text{س}+٤}(٥^{-١} - ١)} = \frac{٥^{\text{س}+٣} \times ٤}{٥^{\text{س}+٤} \times ٣}$

$= ٥^{-١} = \frac{١}{٥}$

(١٠) $\frac{٣^{٢\text{س}+٢} + ٣^{٢\text{س}-١}}{٥\times٣^{٢\text{س}} - ٧\times٣^{٢\text{س}-١}} = \frac{٣^{٢\text{س}-١}(٣^{٢}+١)}{٣^{٢\text{س}-١}(٥\times٣ - ٧\times١)} = \frac{٢٧+١}{١٥-٧}$

$= \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢} =$ الطرف الأيسر

إجابة تمرين (٢٢)

(١) $٣\times٣^{\text{س}} + ٣\times٣^{-\text{س}} - ١٠ = ٠$ بضرب الطرفين $\times ٣^{\text{س}}$

∴ $٣\times٣^{\text{س}}\times٣^{\text{س}} + ٣\times٣^{-\text{س}}\times٣^{\text{س}} - ١٠\times٣^{\text{س}} = ٠$ $٣^{٢\text{س}}\times٣ + ٣\times١ - ١٠\times٣^{\text{س}} = ٠$

∴ $٣\times٣^{٢\text{س}} - ١٠\times٣^{\text{س}} + ٣ = ٠$ بوضع $٣^{\text{س}} = \text{ص}$ ∴ $٣^{٢\text{س}} = \text{ص}^{٢}$

∴ المعادلة هي $٣\text{ص}^{٢} - ١٠\text{ص} + ٣ = ٠$ ∴ $(٣\text{ص} - ١)(\text{ص} - ٣) = ٠$

∴ $\text{ص} = \frac{١}{٣}$ ∴ $٣^{\text{س}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\text{س} = ٥^{-١}$ ∴ $\text{س} = -١$ ، $\text{ص} = ٣$

∴ $٣^{\text{س}} = ٣$ ∴ $\text{س} = ١$

(٢) $٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}+١} = ١٠٨$ ∴ $٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}}\times٣ - ١٠٨ = ٠$

∴ $٣^{٢\text{س}} + ٣^{\text{س}}\times٣ = ١٠٨$ ∴ $(٣^{\text{س}} - ٩)(٣^{\text{س}} + ١٢) = ٠$

∴ $٣^{س}=٩$ أو $٣^{س}=-١٢$ مرفوض ∴ $٣^{س}=٣^{٢}$ ∴ س=٢

(٣) $٥^{٢س}-١٢٦×٥^{س}×٥^{-١}+٥=٠$ بضرب المعادلة ×٥

∴ $٥×٥^{٢س}-١٢٦×٥^{س}+٢٥=٠$ نضع $٥^{س}=ص$ ∴ $٥^{٢س}=ص^{٢}$

∴ $٥ص^{٢}-١٢٦ص+٢٥=٠$ $(٥ص-١)(ص-٢٥)=٠$ ∴ ٥ ص=١

∴ $ص=\frac{١}{٥}$ $٥^{س}=\frac{١}{٥}$ ∴ $٥^{س}=٥^{-١}$ ∴ س = -١

، ص=٢ ∴ $٥^{س}=٥^{٢}$ ∴ س = ٢

(٤) $٢^{ص}+٢^{٥}×٢^{-ص}-١٢=٠$ بالضرب×٢ص

∴ $٢^{٢ص}-١٢×٢^{ص}+٣٢=٠$ $(٢^{ص}-٤)(٢^{ص}-٨)=٠$ ∴ $٢^{ص}=٤$ ص=٢

، $٢^{ص}=٨$ ∴ ص=٣

(٥) $٢^{٣س+١}+(٢^{٣})^{س}$ = $٢^{٣س+١}+٢^{٣س-١}$

$=٢^{٣س}(٢^{١}+٢^{-١})=٢^{٣س}(٢+\frac{١}{٢})=٢^{٣س}×٢\frac{١}{٢}=٢^{٣س}×\frac{٥}{٢}=١٦٠$

$٢^{٣س}=١٦٠×\frac{٥}{٢}$ ∴ $٢^{٣س}=٣٢×٢=٦٤$ ∴ $٢^{٣س}=٢^{٦}$ ∴ س = ٢

(٦) $٧^{٣س}(٧^{-١}-١)=٧^{٣س}(\frac{١}{٧}-١)=٧^{٣س}×$ $=-٢٠٥٨$

$٧^{٣س}=-٢٠٥٨×\frac{-٦}{٧}$ ∴ $٧^{٣س}=٣٤٣×٧=٧^{٣}×٧$ ∴ $٧^{٣س}=\frac{٤}{٣}$

(٧) $٣^{٢س-١}×٥^{١-٢س}×٥^{٢س}×٣^{-\frac{٣}{٢}س+١}=٤٥$ ∴ $٣^{\frac{س}{٢}}×٥×٣^{-١+١}=٤٥$

∴ $٣^{\frac{س}{٢}}=٣^{٢}$ ∴ س=٤

(٨) $س^{٤}-١٦=٠$ $(س^{٢}-٤)(س^{٢}+٤)=٠$ ∴ س= ± ٢

(٩) $(٣^{س}-٣)(٣^{س}-٢٧)=٠$ ∴ $٣^{س}=٣$ ∴ س=١ أو $٣^{س}=٣^{٣}$ ∴ س=٣

(١٠) $٢^{س+١}+٢^{س+٢}+٢^{س+٣}=٢٨$ ∴ $٢^{س+١}(١+٢+٤)=٢٨$

∴ $٢^{س+١}=٢^{٢}$ ∴ س=١

(١١) ٢- س = ٠ ∴ س =٢

(١٢) $(٣^{س}-٩)(٣^{س}+٢)=٠$ ∴ $٣^{س}=٣^{٢}$ ∴ س=٢

(١٣) $٤^{س+١}+٤^{١-س}-١٧=٠$ بالضرب في $٤^{س}$

$٤×٤^{٢س}+٤-١٧×٤^{س}=٠$ ∴ $٤(٤^{س})^{٢}-١٧(٤^{س})+٤=٠$

$[٤(٤^{س})-١][٤^{س}-٤]=٠$

$\therefore ٤^{س}=\frac{١}{٤}$	$٤^{س}=٤^{١}$ ،
$\therefore ٤^{س}=٤^{-١}$	$\therefore س=١$
$س=-١$	

(١٤) $٣^{س-١}(٢٧+١)=٢٨$ $\therefore س-١=٠$ $\therefore س=١$

(١٥) برفع طرفي المعادلة للأس $\frac{٤}{٣}$ $\therefore (س-٤)^{\frac{٣}{٤}\times\frac{٤}{٣}}=٢^{٣\times\frac{٤}{٣}}$

$\therefore س-٣=١٦$ $\therefore س=١٩$

(١٦) $٧^{١+س}+٧^{١-س}=٥٠$ $\therefore ٧\times٧^{س}+٧\times٧^{-س}=٥٠\times٧^{س}$

$\therefore ٧\times٧^{٢س}-٥٠\times٧^{س}+٧=٠$ $(٧\times٧^{س}-١)(٧^{س}-٧)=٠$

$\therefore س=-١$ ، $س=١$

(١٧) $٢^{|س|}=٤^{|٢س-٣|}=٢^{٢|٢س-٣|}$ $\therefore |س|=٢|٢س-٣|$ بتربيع الطرفين

$\therefore س^{٢}=٤(٤س^{٢}-١٢س+٩)=٠$ $\therefore ٥س^{٢}-١٦س+١٢=٠$

$\therefore (٥س-٦)(س-٢)=٠$ $\therefore س=\frac{٦}{٥}$ أو $س=٢$

(١٨) $(٢^{س}-٢)(٢^{س}+١)=٠$ $٢^{س}=٢$ $س=١$ ، $٢^{س}=-١$ مرفوض

(١٩) $٢^{|\sqrt{س}-٣|}=٢^{٢}$ $\therefore |\sqrt{س}-٣|=٢$ بتربيع الطرفين

$س-٦\sqrt{س}+٩=٤$ $\therefore س-٦\sqrt{س}+٥=٠$ $(\sqrt{س}-٥)(\sqrt{س}-١)=٠$

$\therefore س=٢٥$ ، $س=١$

(٢٠) بالضرب في س $\therefore ٣-١١س^{\frac{١}{٢}}+٦س=٠$

$٦(س^{\frac{١}{٢}})^{٢}-١١(س^{\frac{١}{٢}})+٣=٠$ ، $(٢س^{\frac{١}{٢}}-٣)(٣س^{\frac{١}{٢}}-١)=٠$

$\therefore س=\frac{٩}{٤}$ أو $س=\frac{١}{٩}$

(٢١) $س^{\frac{٢}{٣}}-٢٨س^{\frac{١}{٣}}+٢٧=٠$ $\therefore (س^{\frac{١}{٣}}-١)(س^{\frac{١}{٣}}-٢٧)=٠$

$\therefore س^{\frac{١}{٣}}=١$ $س=١$ ، $س^{\frac{١}{٣}}=٢٧$ $س=١٩٦٨٣$

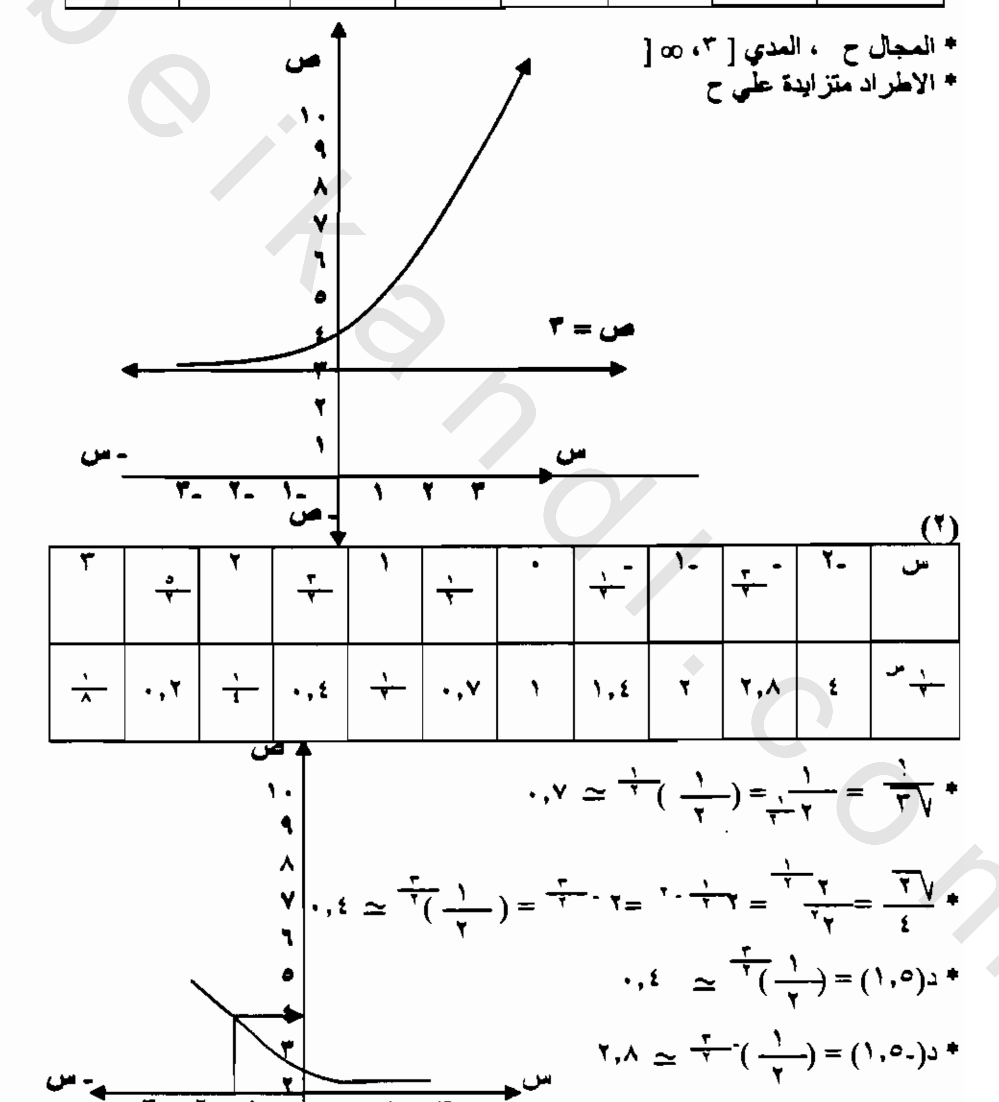
(٢٢) $٢^{٢س}-٥\times٢^{س}\times٢+١٦=٠$ $\therefore ٢^{٢س}-١٠\times٢^{س}+١٦=٠$

$(٢^{س}-٨)(٢^{س}-٢)=٠$ $\therefore س=٣$ ، $س=١$

إجابة تمرين (٢٣)

(١) واضح أن الشكل البياني لهذه الدالة مماثل للشكل البياني للدالة د(س)=٢س ولكن بإزاحة صادية قدرها ٣

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
٣+٢س	٣$\frac{١}{٨}$	٣$\frac{١}{٤}$	٣$\frac{١}{٢}$	٤	٥	٧	١١



* المجال ح ، المدي] ٣، ∞ [
* الاطراد متزايدة علي ح

(٢)

س	٢-	$-\frac{٣}{٢}$	١-	$-\frac{١}{٢}$	٠	$\frac{١}{٢}$	١	$\frac{٣}{٢}$	٢	$\frac{٥}{٢}$	٣
$(\frac{١}{٢})^{س}$	٤	٢,٨	٢	١,٤	١	٠,٧	$\frac{١}{٢}$	٠,٤	$\frac{١}{٤}$	٠,٢	$\frac{١}{٨}$

* $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{١}{٢^{\frac{١}{٢}}} = (\frac{١}{٢})^{\frac{١}{٢}} \simeq ٠,٧$
* $\frac{\sqrt{٢}}{٤} = \frac{٢^{\frac{١}{٢}}}{٢^{٢}} = ٢^{\frac{١}{٢}-٢} = ٢^{-\frac{٣}{٢}} = (\frac{١}{٢})^{\frac{٣}{٢}} \simeq ٠,٤$
* د(١,٥) $= (\frac{١}{٢})^{\frac{٣}{٢}} \simeq ٠,٤$
* د(-١,٥) $= (\frac{١}{٢})^{-\frac{٣}{٢}} \simeq ٢,٨$

(٣)

س	٣ -	٢ -	١ -	٠	١	٢	٣
د(س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧

أ) د(١,٥) = $٣^{١,٥}$ ≃ ٥,١

ب) $٣^{س}$ = ٨ = ٢س ≃ ١,٩

(٤)

س	٣ -	٢-	١ -	٠	١	٢	٣
د(س)	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

أ) د(- ٠,٤) ≃ ٥,١

ب) $(\frac{١}{٣})^{س}$ = ٨ ⟸ ٢س ≃ - ١,٨

(٥)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧

عند التعويض في الدالة قمنا بالآتي :

س=٠ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{٠-٢} = \frac{١}{٣^{٢}} = \frac{١}{٩}$

س=١ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{١-٢} = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

س=٢ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{٢-٢} = ٣^{٠} = ١$

س=٣ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{٣-٢} = ٣^{١} = ٣$

س=٤ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{٤-٢} = ٣^{٢} = ٩$

س=٥ $\therefore ٣^{س-٢} = ٣^{٥-٢} = ٣^{٣} = ٢٧$

أولا : من الرسم
د(١,٨) = ١ تقريباً

ثانيا : عندما س$^{س-١}$ = ١٥
من الرسم عندما د(س) = ١٥
$\therefore$ س = ٤,٦ تقريباً

(٦)

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	$\frac{٩}{٢٥}$	$\frac{٣}{٥}$	١	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٢٥}{٩}$	$\frac{١٢٥}{٢٧}$	$\frac{٦٢٥}{٨١}$
	٠,٤	٠,٦	١	١,٧	٢,٨	٤,٦	٧,٧

ملحوظة : **جميع الأعداد العشرية نوجدها عن طريق الآلة وهي أرقام مقربة لرقم عشري واحد**

أولاً: د(٢,٣) = ٢,٩ تقريباً

ثانياً: $(\frac{١}{٣})^{س} = ١٢$

أي أن د(س) = ١٢

$\therefore$ س = ١٢.

اجابة تمارين (٢٤)

١) ٢٧ $\sqrt{\text{س}}$ = $\text{س}^{\frac{٧}{٢}}$ $\quad$ $٣^{٣} \times ٣^{\frac{١}{٢}}$ = $\text{س}^{\frac{٧}{٢}}$

$٣^{\frac{٧}{٢}}$ = $\text{س}^{\frac{٧}{٢}}$ $\quad$ س = ٣

٢) طا $\frac{\text{ط}}{٣}$ = $٣^{\text{س}}$ $\quad$ طا ٦٠ = $٣^{\text{س}}$

$\sqrt{\text{س}}$ = $٣^{\text{س}}$ $\quad$ $٣^{\frac{١}{٢}}$ = $٣^{\text{س}}$

٣) ٠,٠٠١٦ = $٣ \sqrt{٥}$ $\quad$ $\frac{١٦}{١٠٠٠}$ = $٥^{\frac{١}{٢}\text{س}}$ $\quad$ - ٤ = $\frac{١}{٢}$ س $\quad$ س = -١٢

٤) $\frac{١}{٢٧}$ = $٣^{\text{س}}$ $\quad$ $٣^{-٣}$ = $٣^{\text{س}}$ $\quad$ س = -٣

٥) $\text{لو}_{٣}$ $\text{لو}_{٢}$ س = ١ $\quad$ $\text{لو}_{٣}$ ($\text{لو}_{٢}$ س) = ١

$\text{لو}_{٢}$ س = $٣^{١}$ $\quad$ س = $٢^{٣}$ = ٨

٦) |س+١| = $٢^{٤}$ $\quad$ |س+١| = ١٦

|س+١| = ±١٦ $\quad$ س+١ = ١٦ $\quad$ أو $\quad$ س-١ = -١٦

س = ١٥ $\quad$ س = -١٧

٧) س + ٣ = $(١٦)^{\frac{١}{٤}}$ $\quad$ س + ٣ = $(٢^{٤})^{\frac{١}{٤}}$

س + ٣ = ٢ $\quad$ س = -١

٨) $\text{لو}_{٣}(٩ \sqrt{٣})^{٢}$ = $\text{لو}_{٣}$ (٨١ × ٣) = $\text{لو}_{٣}$ ٢٤٣ = $\text{لو}_{٣}$ $٣^{٥}$

= ٥ $\text{لو}_{٣}$ ٣ = ٥ × ١ = ٥

٢) $\text{لو}_{٥}$ $\text{لو}_{٣}$ (٣ $\text{لو}_{٢}$ ٢) = $\text{لو}_{٥}$ $\text{لو}_{٣}$ ٣ = $\text{لو}_{٥}$ ١ = صفر

٣) $\frac{\text{لو } ٣^{٤}}{\text{لو } ٣^{٣}}$ = $\frac{٤\text{لو}٣}{٣\text{لو}٣}$ = $\frac{٤}{٣}$

٤) لو٢٥ + لو٢٨ + $\frac{٣\text{لو}٣ \times ٤\text{لو}٢}{٦\text{لو}٢}$ - لو $\frac{١٤}{٥}$

= لو ٢٥ + لو ٢٨ + ٢ لو ٢ – لو $\frac{١٤}{٥}$

= لو (٢٥ × ٢٨ × ٤ × $\frac{١٤}{٥}$) = لو ١٠٠٠ = ٣ د

٥) $\text{لو}_{٤}$ [١٠٠ × $\frac{١}{٤}$ × ٣٦ × $\frac{١}{٨}$ × $\frac{١}{٢٥}$] = $\text{لو}_{٤}$ ٢

بوضع $\text{لو}_{٤}$ ٢ = س $\quad$ $٤^{\text{س}}$ = ٢ $\quad$ $٢^{٢\text{س}}$ = $٢^{١}$ $\quad$ س = $\frac{١}{٢}$

٦) $(٣٤٣)^{\frac{١}{٥}} = (٣^{٥})^{\frac{١}{٥}} = ٣$ = لو٦٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو٩ – لو٣

= لو (٦٢٥ × $\frac{٨}{١٥}$ × ٩ × $\frac{١}{٣}$) = لو ١٠٠٠ = ٣

٧) لو ١٠ + لو$\frac{١٦}{٤٩}$ - لو $\left[\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}}$ + لو٤٩ – لو٦ – لو ٩

= لو [١٠ × $\frac{١٦}{٤٩}$ × $\frac{٢٧}{٨}$ × ٤٩ × $\frac{١}{٦}$ × $\frac{١}{٩}$] لو١٠ = ١

٨) لو$_{٢}$(١٤)^{٣} – لو$_{٢}$(٥)^{٤} + لو$_{٢}$ $\left(\frac{٢٥}{٧}\right)^{٢}$ – لو$_{٢}$ ٧

لو٢[٢٧٤٤ × $\frac{١}{٦٢٥}$ × $\frac{٦٢٥}{٤٩}$ × $\frac{١}{٧}$]^{٢} = لو$_{٢}$ ٨ = لو$_{٢}$ ٢^{٣}

= ٣ لو$_{٢}$٢ = ٣ × ١ = ٣

٩) الايمن = لو$_{٢}$ (٣٠ × $\frac{٢٥}{٢٧}$ × $\frac{٩}{١٢٥}$) = لو$_{٢}$ ٢ = ١

١٠) الأيمن = $\frac{\text{لو}(٥ \times \frac{١}{٨} \times ٤٠)}{\text{لو}(٢٥ \times \frac{١}{٧} \times ٢٨)}$ = $\frac{\text{لو}٢٥}{\text{لو}١٠٠}$ = $\frac{\text{٢لو٥}}{٢}$ = لو٥

الأيسر = ١ـلو٢=لو١٠ـلو٢=لو$\frac{١٠}{٢}$ = لو٥

الايسر = ١ – لو ٢ = لو١٠ – لو٢ = لو$\frac{١٠}{٢}$ = لو٥

١١) الايمن= $\frac{\text{لو}(٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{لو}(٣)^{٣} - \text{لو}(١٠)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}}$ = $\frac{\text{لو}(٥)^{\frac{٣}{٢}} + \text{لو}(٩)^{\frac{٣}{٢}} - \text{لو}(١٠)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}}$

= $\frac{\text{لو}\left(٥ \times ٩ \times \frac{١}{١٠}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}}$ = $\frac{\frac{٣}{٢}\,\text{لو}\frac{٩}{٢}}{\text{لو}\frac{٩}{٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$ = الايسر

١٢) الايمن = لو$(٥)^{٣}$ + لو$(١٤)^{٢}$ − لو ٤٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$

= لو (١٢٥ × ١٩٦ × $\frac{١}{٤٩}$ × $\frac{٢}{١٠}$) = لو١٠٠ = ٢

الايسر = لو$_{٥}$ ٢٥ = لو$_{٥}$ $(٥)^{٢}$ = ٢ لو$_{٥}$ ٥ = ٢

١٣) لو$_{٢}$ $\frac{٣}{٢٥}$ + لو$_{٢}$ $(٥)^{٥}$ + لو$_{٢}$ ٢٧ − لو$_{٢}$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ - لو$_{٢}$ ٢٤٣ = لو$_{٢}$ س

لو$_{٢}$($\frac{٣}{٢٥}$ × ٣١٢٥ × ٢٧ × $\frac{١٢}{١٢٥}$ × $\frac{١}{٢٤٣}$) = لو$_{٢}$ س

لو$_{٢}$ ٤ = لو$_{٢}$ س   س = ٤

١٤) لو $س^{٢}$ + لو $ص^{٢}$ − لو س − ص = ٢ لو ٦

لو ($س^{٢}$ × $ص^{٢}$ × $\frac{١}{س.ص^{٢}}$) = لو ٣٦

$س^{٢}$ $ص^{٢}$ = ٣٦   س ص = ٦

١٥) $(لو س)^{لوس}$ = لو (١٠٠ × س)   لو س × لو س = لو ١٠٠ + لو س

$(لو س)^{٢}$ = ٢ + لوس $(لوس)^{٢}$ − لو س − ٢ = ٠

(لو س − ٢) (لو س + ١) = ٠   اما لو س = ٢

س = $١٠^{٢}$ = ١٠٠

١٦) لو س = $\frac{لو٤٩ - (لو٧)^{٢}}{لو٧ - ٠,٠٧}$ = $\frac{٢لوس - لو٧ × لو٧}{لو٧ - لو١٠٠}$

$\frac{لو٧(٢ - لو٧)}{لو٧ - ٢}$ = $\frac{-لوس(لو٧ - ٢)}{لو٧}$

لوس = - لو٧   لو س = $١٠^{-١}$ س = $\frac{١}{٧}$

١٧) لو س = $\frac{(لو٥)^{٢} - ٣لو٥}{لو٥ - لو١٠٠٠}$ = $\frac{لو٥(لو٥ - ٣)}{لو٥ - ٣}$ = لو ٥

لو$_{٢}$ س = لو ٥   س = ٥

١٨) بوضع لو$_{٢}$ س = لو$_{٤}$ ٩ = ص

لو٢ س = ص | لو٤ ٩ = ص

س = ٢ | $٩^{٤}$ = ٤

٣ = ٢

مجموعة الحل { ٣ }

١٩)$(لو س)^{٢}$ + ٢ لو س + ١ = $(لو ٢)^{٢}$

$[(لو س) + ١]^{٢}$ = $(لو٢)^{٢}$

لو س + ١ = لو ٢

لو س = (لو ٢) − ١

= لو٢ − لو ١٠

= لو $\frac{٢}{١٠}$

لو س + ١ = ± لو ٢

لو س + ١ = - لو ٢

لو س = - لو٢ − ١

لوس = لو$٢^{-١}$ − لو ١٠

لو س = لو $\frac{١}{٢}$ - لو ١٠

س = $\frac{١}{٥}$ لو س = لو $\frac{١}{٢٠}$ س = $\frac{١}{٢٠}$

٢٠)$٣^{٢س}$ − ٢٧ × $٣^{س}$ + ٥٠ = ٠

($٣^{س}$ − ٢٥) ($٣^{س}$ − ٢) = ٠

إما $٣^{س}$ = ٢٥ س لو٣ = لو ٢٥ س = $\frac{لو٢٥}{لو٣}$ = ٢,٩

أو $٣^{س}$ = ٢ س لو ٣ = لو ٢ س = $\frac{لو٢}{لو٣}$ = ٠,٦٣

٢١) $٣^{٢س}$ − ١٤ × $٣^{س}$ + ٤٥ = ٠

($٣^{س}$ − ٩) ($٣^{س}$ − ٥) = ٠

إما $٣^{س}$ = $٣^{٢}$ س = ٢

أو $٣^{س}$ = ٥ س لو ٣ = لو ٥ س = $\frac{لو٥}{لو٣}$ ٠,٦٣

٢٢)لو $٣^{٧-٢س}$ = لو ١٨,١

٧ − ٢س لو ٣ = لو ١٨,١ ٧ − ٢ س = $\frac{لو١٨,١}{لو٣}$

٧ − ٢ س = ٢,٦٤ - ٢ س = ٢,٦٤ -٧

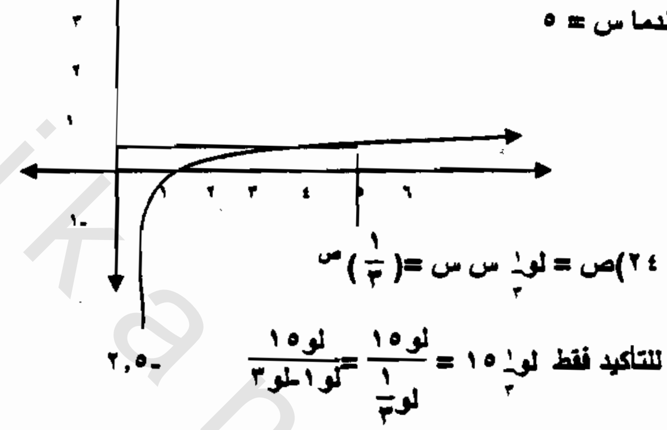
ـ ٢ س = ـ٤,٣٦   س = ٢,١٨

٢٣) ص = لو ٣ س عكس ص = ٣ ^س^

س	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩	٢٧
ص	٣-	٢-	٠	١	٢	٢	٣

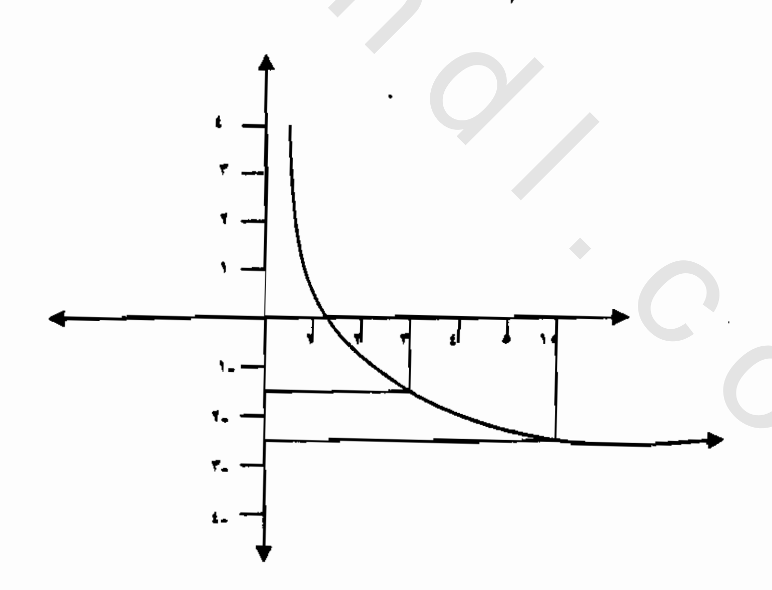
لو٣ ٥ = ١,٥

عندما س = ٥



٢٤) ص = لو$_{\frac{١}{٣}}$ س   س = $(\frac{١}{٣})^{ص}$

للتأكيد فقط لو$_{\frac{١}{٣}}$ ١٥ = $\frac{لو ١٥}{لو \frac{١}{٣}}$ = $\frac{لو ١٥}{لو١ - لو٣}$



اجابة تمرين (٢٥)

١) [أ] د = [(١ ، ١-) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٨) ، ...... ، (ر ، ٣ر - ٤ ، .....]

[ب] د = [(١ ، $\frac{١}{٤}$) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، ١) ، ..... ، (ر ، ٢$^{ر-٣}$) ، ...]

[جـ] د = [(١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٢ ، $\frac{٢}{٣}$) ، (٣ ، $\frac{٣}{٤}$)]

[هـ] د = [(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣$\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، ٢$\frac{٢}{٣}$)]

٢) [أ] ح$_{١}$ = ٢

ح$_{٢}$ = ١-

ح$_{٣}$ =

ح$_{٤}$ = ١-

ح$_{٥}$ = ٢-

٢) [ب] ح$_{١}$ = -

ح$_{٢}$ = ٠,٣٣

ح$_{٣}$ = ٠,٢٥

ح$_{٤}$ = ٠,٢

ح$_{٥}$ = ٠,١٦

٢) [جـ] ح$_{١}$ = ٨

ح$_{٢}$ = ٤

ح$_{٣}$ = ٢

ح$_{٤}$ = ١

ح$_{٥}$ = $\frac{١}{٢}$

٢) [هـ] ح$_{١}$ = ١-

ح$_{٢}$ = ٠,٥

ح$_{٣}$ = ٣٣-

ح$_{٤}$ = ٠,٢٥

ح$_{٥}$ = ٠,٢-

---

٣) [أ] ح$_{١}$ = ٢ ، ح$_{٢}$ = ١- ، ح$_{٣}$ = ٢ ، ح$_{٤}$ = ١- ، ح$_{٥}$ = ٢ ، ح$_{٦}$ = ١-

[ب] ح$_{١}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ح$_{٢}$ = ٣ ، ح$_{٣}$ = $\frac{٩}{٢}$ ، ح$_{٤}$ = ٧ ، ح$_{٥}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ح$_{٦}$ = ١١

[ج] $ح_{١} = ٢$ ، $ح_{٢} = ٣$ ، $ح_{٣} = \frac{٩}{٢}$ ، $ح_{٤} = ٨$ ، $ح_{٥} = \frac{٢٥}{٢}$ ، $ح_{٦} = ١٨$

[ء] $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = ٣$ ، $ح_{٣} = ٩$ ، $ح_{٤} = ٨١$ ، $ح_{٥} = ٦٥٦١$ ، $ح_{٦} = (٥٦١)$

٤) [أ] $ح_{١} = ١$ ، $ح_{٢} = -٢$ ، $ح_{٣} = \frac{١}{٢}(ح_{٢} + ح_{١}) = -\frac{٢٥}{٢}$

$ح_{٤} = -\frac{١}{٢}(ح_{٣} + ح_{٢}) = \frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٢} = -\frac{٥}{٤}$

$ح_{٥} = \frac{١}{٢}(ح_{٤} + ح_{٣}) = -\frac{٧}{٨}$ $ح_{٦} = \frac{١}{٢}(ح_{٥} + ح_{٤}) = -\frac{١٧}{١٦}$

[ب] $ح_{١} = ٥$ ، $ح_{٢} = ح_{١} - ٢ = ١$ ، $ح_{٣} = ح_{١} - ٢ = ١$ ، $ح_{٤} = ح_{٣} - ٢ = ١٠$
، $ح_{٥} = ح_{٤} - ٢ = -٣$ ، $ح_{٦} = ح_{٥} - ٢ = -٥$

[ج] $ح_{١} = ٢$ ، $ح_{٢} = -١$ ، $ح_{٣} = ح^{٢} - ح^{٢} = ٣$ ، $ح_{٤} = ح_{٣} - ح_{٢} = ٨$
، $ح_{٥} = ح_{٤} - ح = ٥٥$ $ح_{٦} = ح_{٥} - ح_{٤} = ٢٩٦١$

[ء] $ح_{١} = ٣$ ، $ح_{٢} = ٣$ ، $ح_{٣} = -٢$ ، $ح_{٤} = ح_{١} + ح_{٣} = ٧$
، $ح_{٥} = ح_{٢} + ح_{٤} = ١٦$ ، $ح_{٦} = ح_{٣} + ح_{٥} = ٢٠$

٥) [أ] $ح_{ر+١} - ح_{ر} = \frac{ر + ٣}{ر + ١} - \frac{ر + ٢}{ر} = \frac{ر^{٢} + ٣ر - ر - ر^{٢} - ٣ر - ٢}{ر(ر + ١)}$

$= \frac{٢}{ر(ر + ١)} < ٠$ $\therefore$ المتتابعة متناقصة.

[ب] $ح_{ر+١} - ح_{ر} = ٣^{ر-١} - ٣^{ر-٢} = ٣^{ر-٢}(٣-١) > ٠$ $\therefore$ المتتابعة متناقصة.

[جـ] $ح_{ر+١} - ح_{ر} = (٣\times٢^{ر+١} -٥) - (٣\times٢^{ر}) (٢-١) > ٠$
$= ٣ \times ٢^{ر} (٢ - ١) > ٠$ $\therefore$ المتتابعة متزايدة.

[ء] $ح_{ر+١} - ح_{ر} = (٢ \quad \frac{٣}{ر + ١}) - (٢+ \frac{٣}{ر}) = \frac{٣ر - ٣ر - ٣}{ر(ر + ١)}$

$= \frac{-٣}{ر(ر + ١)} < ٠$ $\therefore$ المتتابعة متناقصة.

[هـ] $ح_{ر+١} - ح_ر = \frac{١}{ر^{٢} + ٢ر + ٢} - \frac{١}{ر^{٢} + ١} = \frac{ر^{٢} + ١ - ر^{٢} - ٢ر - ٢}{(ر^{٢}+١)(ر^{٢}+٢ر+٢)}$

$= \frac{-٢ر - ١}{(ر^{٢} + ١)(ر^{٢} + ٢ر - ٢)} < ٠$ ∴ المتتابعة متناقصة.

[و] $ح_{ر+١} - ح_ر = (١١ - ٢ر - ٢) - (١١ - ٢ر) = -٢ < ٠$ ∴ المتتابعة متناقصة.

[ز] $ح_{ر+١} - ح_ر = ٧ - ٧ = ٠$ ∴ المتتابعة ثابتة.

٦) [أ] $ح_١ = -١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٣ = ١$ $ح_٤ = ح_٢ + ٣ = ٥$

، $ح_٥ = ح_٣ + ح_١ = ٤$ ، $ح_٦ = ح_٤ + ٣ = ٨$

لاحظ أن: $ح_{٢ن+١}$ يعطي الحدود الفردية الرتبة، $ح_{٢ن}$ يعطي الحدود الزوجية الرتبة.

[ب] $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$ ، $ح_٣ = -٢$ ، $ح_٤ = ح_٢ = ٤$ ، $ح_٥ = ح_٣ + ح_١ = -١$

، $ح_٦ = ح_٤ = ١٦$

٧) $ن^{٢} - ١٣ن = -٤٢$ ∴ $ن^{٢} - ١٣ن + ٤٢ = ٠$ ∴ $(ن - ٦)(ن - ٧) = ٠$

∴ ن = ٦ أو ن = ٧ ∴ $-٤٢ \in (ح_ن)$ وتكون إما $ح_٦$ أو $ح_٧$

$ن^{٢} - ١٣ن = -٣٠$ ∴ $ن^{٢} - ١٣ن + ٣٠ = ٠$ $(ن - ٣)(ن - ١٠) = ٠$

∴ ن = ٣ أو ١٠ ∴ $-٣٠ \in (ح_ن)$ وتكون إما $ح_٣$ أو $ح_{١٠}$

$ن^{٢} - ١٣ن = ١٢$ $ن^{٢} - ١٣ن - ١٢ = ٠$

$ن = \frac{١٣ \pm \sqrt{١٦٩ + ٤٨}}{٢} \notin ص^{+}$ ∴ $١٢ \notin (ح_ن)$

٨) $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = \frac{٢}{٣} = ١$ ، $ح_٣ = ٣$ $ح_٤ = \frac{١}{٢}(ح_٢ + ح_٣) = ٢$ ، $ح_٥ = ٥$

إجابة تمارين (٢٦)

١) [أ] $ح_ن = ٢ن - ١$ مقدار من الدرجة الأولى ومعامل ن = ٢

∴ المتتابعة حسابية أساسها ٢ بوضع ن= ١ ∴ $ح_١ = ٢ \times ١ - ١ = ١$

∴ المتتابعة هي (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ......)

[ب] $ح_ن = \frac{٦}{٥} - \frac{ن}{٥} - \frac{ن^{٢}}{٥}$ ليس مقدار من الدرجة الأولى في ن

∴ $(ح_ن)$ ليس متتابعة حسابية

[جـ] $ح_{ن}$ = ٣$ن^{-١}$ -٢ ليس مقدار من الدرجة الأولى في ن ∴ ($ح_{ن}$) ليس متتابعة حسابية.

[ء] $ح_{ن}$ = $\frac{٣}{٢}$ ن + ٢ مقدار من الدرجة

الأولى في ن ∴ ($ح_{ن}$) متتابعة حسابية أساسها $\frac{٣}{٢}$ بوضع ن = ١

∴ $ح_{١}$ = $\frac{٣}{٢}$ + ٢ = ٣$\frac{١}{٢}$ ∴ الحدود الخمسة الأولى هي: ٣$\frac{١}{٢}$ ، ٥ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٨

٢) [أ] ١١-٧ = ١٥-١١ = ١٩-١٥= ٤ ∴ المتتابعة الحسابية أساسها ٤

$ح_{ن}$ = ٧ +(ن-١) × ٤ = ٤ن + ٣ [ب] ٣٤-٣٧=٣١-٣٤=٢٨-٣١= -٣

∴ المتتابعة حسابية أساسها -٣ $ح_{ن}$ = ٣٧ +(ن -١) × -٣ = ٤٠ -٣ن

[جـ] ٠,٣٣ - ٠,٣ ≠ ٠,٣٣٣ - ٠,٣٣ ∴ المتتابعة ليست حسابية

[ء] س+ ٢أ - س= س + ٤أ -(س+٢أ) = ٢أ ∴ المتتابعة حسابية أساسها ٢أ

$ح_{ن}$ = س +(ن-١) × ٢أ= س-٢أ + ٢أن

٣) ٨٧ = -٩ +(ن-١) × ٤ ∴ ٤ن = ١٠٠ ∴ ن = ٢٥ ∴ $ح_{٢٥}$= ٨٧ ٣٣٣=-٩

+(ن-١)×٤ ٣٤٦ = ٤ن ∴ ن = ٨٦$\frac{١}{٢}$ ∴ لا يوجد حد قيمته ٣٣٣

٤) ء =(٣س + ٢ص) - (س - ص) = ٢س + ٣ص

٩س + ١١ص = (س - ص) + (ن-١) (٢س + ٣ص)

٨س + ١٢ص = (ن-١) (٢س + ٣ص) ∴ ٤(٢س+ ٣ص)= (ن-١)(٢س+ ٣ص)

∴ ن-١ = ٤ ∴ ن = ٥

٥) ٤١ +(ن-١) × -٤ > ٠ ∴ ٤٥ -٤ن > ٠ ∴ ٤ن > ٤٥ ∴ ن > $\frac{١}{٤}$

∴ ن = ١٢ أو ١٣ أو ١٤ أو..... ∴ أول حد سالب هو $ح_{١٢}$

٦) -٦,٧ + (ن-١) × ٠,٣ > ٠ ∴ ٠,٣ ن > ٧ ∴ ن > $\frac{٧٠}{٣}$ ∴ ن > ٢٣$\frac{١}{٢}$

∴ أول حد موجب هو $ح_{٢٤}$

٧) ٨ + (ن-١) × ٩ > ٤٠٠ ∴ ٩ن > ٤٠١ ∴ ن > $\frac{٤٠١}{٩}$

∴ ن > $\frac{٥}{٩}$ ∴ أول حد > ٤٠٠ هو $ح_{٤٥}$

٨) $ح_{٣ن+١}$ = ١٣ + (٣ن+١-١) × $\frac{١}{٢}$ = ١٣ + $\frac{٣}{٢}$ ن

$ح_{٦ن+٢}$ = ٤٦ + (٦ن+٢-١) × - $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٨٩}{٢}$ - ٩ن

∴ ١٣ + $\frac{٣}{٢}$ ن = $\frac{٨٩}{٢}$ - ٩ن ∴ $\frac{٢١}{٢}$ ن = $\frac{٦٣}{٢}$ ∴ ن = ٣

٩) ٢ب + ٢-(٥ + ب) = ١٧ - (٢ب+٢) ∴ ب - ٣ = ١٥ - ٢ب

٣ب = ١٨ ∴ ب = ٦ ∴ الأعداد الثلاثة الأخيرة هي ١١ ، ١٤ ، ١٧

∴ ء = ٣ ∴ أ = ٨

١٠) نفرض أن أساس المتتابعة هـ ∴ ب = أ هـ ، جـ = أ + ٢هـ

، ء = أ + ٣هـ ∴ أ(أ + ٣هـ) = $\frac{٦٣}{٢}$ ∴ $أ^{٢}$ + ٣أ هـ = $\frac{٦٣}{٢}$ ....(١)
٢

(أ + هـ) (أ + ٢هـ) = ٤٤ ∴ $أ^{٢}$ + ٣أ هـ + $هـ^{٢}$ = ٤٤ .....(٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ $هـ^{٢}$ = $\frac{٢٥}{٤}$ ∴ هـ = $\frac{٥}{٢}$ بالتعويض في (١)

∴ $أ^{٢}$ + $\frac{١٥أ}{٢}$ - $\frac{٦٣}{٢}$ = ٠ ∴ ٢$أ^{٢}$ + ١٥أ - ٦٣ = ٠ ∴ (أ - ٣) (٢أ + ٢١) = ٠

∴ أ = ٣ أو أ = -١٠ $\frac{١}{٢}$ ∴ الأعداد هي: ٣ ، ٥ $\frac{١}{٢}$ ، ٨ ، ١٠ $\frac{١}{٢}$

١١) ٦ + (ن - ١) ء = ٣٣ ∴ (ن - ١) ء = ٢٧ ....(١)   ٦ + (٢ن - ١) ء = ٦٣

∴ (٢ن - ١) ء = ٥٧ ....(٢) بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{ن - ١}{٢ن - ١} = \frac{٩}{١٩}$

∴ ن = ١٠ بالتعويض في (١) ٩ء = ٢٧ ∴ ء = ٣

$ح_{٢ن - ٣}$ = $ح_{١٧}$ = ٦ + ١٦ × ٣ = ٥٤

١٢) نفرض أن رتب س ، ب ، جـ ، ص هي على الترتيب ط ، ق ، ك ، ل

∴ ط + ل = ق + ك ....(١) س = أ + (ط - ١) ء ....(٢)

ص = أ + (ل - ١) ء ....(٣) بالجمع (٢) ، (٣)

∴ س+ص = ٢أ +(ط + ل - ٢)ء..(٤) ب = أ + (ق - ١) ء ....(٥)

جـ = أ + (ك - ١) ء ....(٦) ∴ ب+جـ=٢أ + (ق + ك - ٢) ء..(٧)

من (١) ، (٤) ، (٧) ينتج أن: س + ص = ب + جـ

١٣) أ (أ + ٤ء) = ٥٧ ∴ $أ^٢$ + ٤أ ء = ٥٧...........(١)

(أ + ء) (أ + ٦ء) - (أ + ٢ء) (أ + ٣ء) = ٢٤

٢أ ء = ٢٤ ∴ أ = $\frac{١٢}{ء}$......(٢) بالتعويض من (٢) في (١)

∴ $\frac{١٤٤}{ء^٢}$ + ٤٨ = ٥٧ ∴ $ء^٢$ = ١٦ ∴ ء = ٤ ∴ أ = ٣

١٤) أ + (م - ١) ء = ن ....(١) ، أ + (ن - ١) ء = م ....(٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ (م - ن)ء = ن - م

∴ ء = $\frac{ن - م}{-(ن - م)}$ = -١ بالتعويض في (١)

∴ أ + (م - ١) × -١ = ن ∴ أ = م + ن - ١

$ح_{م+ن}$ = م + ن - ١ + (م + ن - ١) × -١ = صفر

١٥) ٣ + (ن - ٢) ء = ١٧ ∴ (ن - ٢) ء = ١٤ ....(١)

٣ + (٢ن - ٦) ء = ٢٧ ∴ (ن - ٣) ء = ١٢ ....(٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ ء = ٢ بالتعويض في (١) ∴ ن = ٩

، المتتابعة هي: (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

إجابة تمارين (٢٧)

١) (أ^{٢} + ١) + (٢أ^{٢} + أ + ٣) = ٢(٢أ^{٢} + ١) ∴ أ^{٢} - أ - ٢ = ٠

∴ (أ - ٢) (أ + ١) ٠ ∴ أ = ٢ أو أ = -١

∴ المتتابعة هي (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...) أو (٢ ، ٣ ، ٤ ، ...)

٢) س + ص = ٢٤ ....(٢) ، ٥س + ٣ص = ٩٠ ....(٣)

بحل (١) ، (٢) ∴ س = ٩ ، ص = ١٥

٣) ٢ب = أ + ٢جـ ....(١) ، ٦جـ = ٢ب + ء ....(٢)

من (١) ٢جـ = ٢ب - أ بالتعويض في (٢) ∴ ٦ب - ٣أ = ٢ب + ء

∴ ٤ب = ٣أ + ء ∴ ٢ب وسط حسابي بين ٣أ ، ء ∴ (٣أ ، ٢ب ، ء) متتابعة حسابية.

٤) عدد حدود المتتابعة = ١٥ + ٢ = ١٧ حداً ٣٠ = ٧٨ + ١٦ء ∴ ء = -٣

∴ الأوساط هي: ٧٥ ، ٧٢ ، ... ، ٣٣

٥) عدد الحدود = ن + ٢ ∴ ن^{٢} = ١ + (ن + ٢ - ١) ء

∴ ء = (ن^{٢} - ١) / (ن + ١) = (ن - ١) (ن - ١) / (ن + ١) = ن - ١

∴ الأوساط هي ن ، ٢ن - ١ ، ٣ن - ٢ ، ن^{٢} - ن + ١

٦) بوضع ص = س + ء ، ع = س + ٢ء

الأيمن = (س + ء + ٢س + ٤ء) / ء - (س + ٢ + ٢س) / ء = ٢ / ء = ٤ = الأيسر

٧) الوسط الخامس هو ح$_{٦}$ = ١ + ٥ء الوسط ن - ٢ هو ح$_{ن}$ = ١ + (ن-٢) ء

∴ (١ + ٥ء) / (١ + (ن - ٢)ء) = ٤ / ٧ ∴ ء(٤ن - ٤٣) = ٣......(١)

عدد حدود المتتابعة = ن + ٢ ٣٧ = ١ + (ن + ١) ء ∴ (ن + ١) ء = ٣٦.....(٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ (ن + ١) / (٤ن - ٤٣) = ١٢ ∴ ن = ١١

٨) ٣١ = ١ + (ن + ١) ء ∴ (ن + ١) ء = ٣٠.........(١)

(١ + ٧ء) / (٣١ - ٢ء) = ٥ / ٩ ∴ ء = ٢.......(٢) بالتعويض من (٢) في (١)

ن= ١٤ ∴ الأوساط هي ٣ ، ٥ ، ٧ ،.....، ٢٩

٩) ٢ب = أ + جـ ∴ جـ = ٢ب + أ وهو المطلوب أولا

$\frac{٢}{ب} = \frac{١}{هـ} + \frac{١}{أ}$ ∴ $\frac{١}{هـ} = \frac{٢}{ب} - \frac{١}{أ}$ وهو المطلوب ثانيا

بقسمة (١) على (٢) $\frac{جـ}{هـ} = \frac{(٢ب - أ)\ (٢أ - ب)}{أ\ ب}$

∴ $\frac{جـ}{هـ} = \frac{٥أ\ ب - ٢(أ^{٢} - ب^{٢})}{أ\ ب}$ وهو المطلوب ثالثا

١٠) ٢ × $\frac{٢}{ب + جـ} = \frac{٢}{ب + جـ} + \frac{٢}{أ + ب}$ ∴ $\frac{٢}{جـ + أ} = \frac{أ + ٢ب + جـ}{(ب + جـ)\ (أ + ب)}$

∴ ٢(ب + جـ)(أ + ب) = (جـ + أ)(أ + ٢ب + جـ) ∴ $٢ب^{٢} = جـ^{٢} + أ^{٢}$

∴ $ب^{٢}$ وسط حسابي بين $جـ^{٢}$ ، $أ^{٢}$ $أ^{٢}$ ، $ب^{٢}$ ، $جـ^{٢}$ تكون متتابعة حسابية.

مجموع الحدود ٩ ، ١٠ ، ١١ = صفر

إجابة تمارين (٢٨)

١) $ح_{ن}$ = ٩ن – ٥ بوضع ن = ١ ∴ $ح_{١}$ = ٤ بوضع ن = ٢ ∴ $ح_{٢}$ = ١٣

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_{٣}$ = ٢٢ ∴ أ = ٤ ، ء = ٩ $جـ_{ن}$ = [٨ + (ن-١) ×٩]

= (٩ن - ١)

٢) ١٧٦ = [٧٢ + (ن-١) × -٤] ٨٨ = ن(١٩ - ن)

∴ $ن^{٢}$ -١٩ن + ٨٨ = ٠ ∴(ن -٨) (ن -١١) = ٠ ∴ ن= ٨ أو ن = ١١

مجموع الحدود ٩ ، ١٠ ، ١١ = صفر

٣) ٤٦٥ = [٢أ + ١٤ × ٢] ٣١ = أ + ١٤ ∴ أ = ١٧

١٧ = ٩ + (ن-١) × ٢ ∴ ن = ٥ ∴ الحد الذي نبدأ به هو $ح_{٥}$

٤) $جـ_{١ الفردية}$= [٢×٤ + ٩×٦]=٣١٠ $جـ_{١ الزوجية}$= [٢×٧ + ٩×٦] = ٣٤٠

٥) ١٠٠ = ٥[٢أ + ٩ء] ∴ ٢أ + ٩ء = ٢٠............(١)

٤٠٠ = ١٠[٢أ + ١٩ ء] ∴ ٢أ + ١٩ ء = ٤٠..........(٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ء = ٢ بالتعويض في (١) ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هي(١ ، ٣ ، ٥ ،.......)

٦) $\frac{ن}{٢}$ [١٠ + (ن-١) × ٤] > ٥٠٠ ∴ ن (٢ن + ٣) > ٥٠٠

∴ ٢ن^{٢} + ٣ن > ٥٠٠ ∴ ن^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ن > ٢٥٠

∴ ن^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ن + $\frac{٩}{١٦}$ > ٢٥٠ + $\frac{٩}{١٦}$ باكمال المربع ∴ (ن + $\frac{٣}{٤}$)^{٢} > $\frac{٤٠٠٩}{١٦}$

بأخذ الجذر التربيعي ∴ ن + $\frac{٣}{٤}$ > $\frac{٦٣,٣}{٤}$ ∴ ن > ١٥,٠٧٥

∴ أصغر عدد من الحدود هو ١٦ حداً.

٧) نفرض أن عدد الحدود = ٣س مجموع الثلث الأول = $\frac{س}{٢}$ [٨ + " س - ١ " × ٤)

= ٢س (١ + س) مجموعه حدود المتابعة = $\frac{٣س}{٢}$ [٨ + (٣س - ١) × ٤)

= ٦س (١ + ٣س) مجموع الثلث الأول: مجموعه المتتابعة كلها = ٢ : (٢ + ١٥)

= ٢ : ١٧ ∴ $\frac{٢س(١ + س)}{٦س(١ + ٣س)}$ = $\frac{٢}{١٧}$ ∴ س = ١١ ∴ عدد الحدود = ٣ × ١١ = ٣٣

مجموع باقي الحدود = ١٦س^{٢} + ٤س ∴ ١٦س^{٢} + ٤س - ٢س (١ - س) = ١٤٢٠
∴ ٢س^{٢} + س = ٧١٠ = ٠ ∴ (٧س + ٧١) (س - ١٠) = ٠ ∴ س = ١٠
∴ عدد الحدود = ١٠ × ٣ = ٣٠ صفراً س
٨) ح$_{ن+١}$ - ح$_{ن}$ = لو س ص^{ن} - لو س ص٢$^{ن-١}$ = لو ص = ثابت
∴ المتتابعة حسابية أساسها = لو ص بوضع ن = ١ ∴ ح$_{١}$ لو س

جـ$_{١٣}$ = $\frac{١٣}{٢}$ [٢بو س + ١٢لو ص] = ١٣ [لو س + لو ص^{٦}]

= ١٣لو س ص^{٦} = ١٣لو٩٠ ×٧٢٩ $\frac{١}{٧٢٩}$ = ١٣لو ١٠ = ١٣

٩) ٣٢٥٥ = ٧+١٤+٢١+....إلى ن حدا   ٣٢٥٥ = $\frac{ن}{٢}$ [١٤ + (ن - ١) × ٧]

٩٣٠ = ن (ن + ١)   ∴ ن^{٢} + ن - ٩٣٠ = ٠ ∴ (ن + ٣١) (ن - ٣٠) = ٠

∴ ن = ٣٠

١٠) نفرض أن الدراجتين تتلاقيان بعد ن ثانية - الأولى تقطع ٢١ ، ١٩ ، ١٧،...إلى ن حد

مجموع ما تقطعه = $\frac{ن}{٢}$ [٤٢ + (ن -١) × -٢] ....(١)

الثانية تقطع ٣٢ ، ٢٩ ، ٢٦ ،...إلى ن حد مجموع ما تقطعه

= $\frac{ن}{٢}$ [٦٤ + (ن - ١) × -٣].......(٢) بجمع (١) ، (٢)

ن (٢٢ - ن) + $\frac{ن}{٢}$ [٦٧ - ٣ن] = ٢٩٧ ∴ ٥ن^{٢} - ١١١ن + ٥٩٤ = ٠

∴ (٥ن - ٦٦) (ن - ٩) = ٠ ∴ ن = ٩ث من (١) جـ = ١١٧ متر

ومن (٢) جـ = ١٨٠متر

إجابة تمارين عامة (م ح)

(١) نفرض أن الأعداد هي أ-ء ، أ ، أ+ء

∴ أ - ء + أ + أ + ء = ٢٧ ∴ أ = ٩

∴ الأعداد هي ٩ - ء ، ٩ ، ٩ + ء

∴ (٩-ء)^{٢} + ٨١ + (٩+ء)^{٢} = ٢٥١

∴ ء^{٢} = ± ٢

∴ الأعداد هي ٧ ، ٩ ، ١١ أو ١١ ، ٩ ، ٧

(٢) نفرض أن الأعداد هي

أ-٣ء ، أ-ء ، أ+ء ، أ+٣ء

∴ ٤أ = ٢٠ ∴ أ = ٥

∴ الأعداد هي (٥-٣ء)(٥+٣ء) / (٥-ء)(٥+ء) = ٢/٣

∴ (٢٥ - ٩ء^{٢}) / (٢٥ - ء^{٢}) = ٢/٣

∴ ء^{٢} = ١ ∴ ء = ± ١

∴ الأعداد هي ٢، ٤، ٦، ٨ أو ٨ ، ٦ ، ٤، ٢

(٣) ٢/٣ [٢أ + ٢ء] = ١٥

∴ أ + ء = ٥ ——— (١)

٥/٢ [٢أ + ٤ء] = ٣٥

∴ أ + ٢ء = ٧ ——— (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ء = ٢ ∴ أ = ٣

∴ المتتابعة هي (٣ ، ٥ ، ٧ ، .....)

(ن + ١) / (ن - ١) = [(ن+١)/٢ [٦ + ٢ن]] / [(ن-١)/٢ [٦ + (ن - ٢) × ٢]]

= (ن + ٣) / (ن - ١)

(٤) (أ + ١٠ء) / (أ + ٥ء) = ٣/١

∴ ٢أ + ٥ء = صفر ——— (١)

[(٢أ + ٩ء)/٢] = ٤٠

∴ ٢أ + ٩ء = ٨ ——— (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ء = ٣ ، أ = -٥

∴ المتتابعة هي (-٥ ، -٢ ، ١ ، .....)

١٦٠ = ن/٢ [٢ × -٥ + (ن - ١) × ٢]

∴ ن^{٢} - ٦ن - ١٦٠ = ٠ ∴ ن = ١٦

(٥) ن/٢ [٢أ + (ن-١) × ٢] = ٣٢٠

∴ ن أ + ن^{٢} - ن = ٣٢٠ ——— (١)

٢ن/٢ [٢أ + (٢ن - ١) × ٢] = ١١٥٢

∴ ن أ + ٢ن^{٢} - ن = ٥٧٦ ——— (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ن^{٢} = ٢٥٦

∴ ن = ١٦ بالتعويض في (١)

∴ أ = ٥ المتتابعة هي (٥، ٧، ٩، .....)

(٦) ٢٥/٢ (٢ح$_{١٦}$ + ٢٤ء) = ٤٠/٩ × ١٥/٢ (٢أ + ١٤ء)

∴ ٢٥ (أ + ١٥ء + ٢٤ء) = ٤٠/٩ × ١٥ (أ + ٧ء)

∴ أ = ٥ء ——— (١)

٥٥٥٠ = ١٥/٢ (٢ح$_{٢٦}$ + ١٤ء)

٥٥٥٠ = ١٥ (أ + ٢٥ء + ٧ء)

∴ أ + ٣٢ء = ٣٧٠ ——— (٢)

بالتعويض من (١) في (٢) ∴ ء = ١٠

، أ = ٥٠ ∴ الأقساط الثلاثة الأولي هي

٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ جنيها

(٧) ح٤ = حـ٩ − حـ٨ = ٢٧/٤ (١٧−٩)

حـ١٧ = ٢٤/٤ (١٧ − ٨) = صفر

٣/٤ ن (١٧−ن) = ٣٩ ∴ ن = ٤ أ، ١٣

(٨) نفرض أن عدد الحدود = ن

حـن = ن/٢ [٢٤ + (ن − ١) × −٣]

= ن/٢ (٢٧ − ٣ن)

حـن = ن/٦ [٢٤ + (ن/٣ − ١) × −٣]

= ن/٦ (٢٧ − ن)

مجموع ١/٣ عدد الحدود / مجموع كل الحدود = −٢/(١١−٢) = −٢/٩

∴ [ن/٦ (٢٧ − ن)] / [ن/٢ (٢٧ − ٣ن)] = −٢/٩

∴ ن = ١٥

(٩) ح١ = لو ٢×٣ = لو ٢ + لو ٣

، ح٢ = لو ٢ × $٣^{٢}$ = لو ٢ + ٢ لو ٣ ح ن+

، ح٣ = لو ٢ × $٣^{٣}$ = لو ٢ + ٣ لو ٣ ح ن+١

∴ أ = لو ٢ + لو ٣ ، ء = لو ٣

حـن = ن/٢ [٢(لو ٢ + لو ٣) + (ن − ١) لو ٣]

= ن/٢ [لو ٤ + (ن + ١) لو ٣]

= ن/٢ لو (٤ × $٣^{ن+١}$)

= لو ($٢^{ن}$ × $٣^{ن(ن+١)/٢}$)

(١٠) (أولاً) أول عدد يقبل القسمة على ٣ حـ١٥

هو ٢٠١ وآخر رقم هو ٣٩٩

∴ الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ هي

٢٠١ ، ٢٠٤ ، ٢٠٧ ، ..... ، ٣٩٩

٣٩٩ = ٢٠١ + (ن−١) × ٣ ∴ ن = ٦٧

= ٦٧/٢ (٢٠١ + ٣٩٩) = ٢٠١٠٠

(ثانيا) مجموع جميع الأعداد المحصورة بين ٢٠٠، ...

أي مجموع الأعداد ٢٠١ ، ٢٠٢ ، ... ، ٣٩٩

٣٩٩ = ٢٠١ + (ن−١) × ١ ∴ ن = ١٩٩

حـ١٩٩ = ١٩٩/٢ (٢٠١ + ٣٩٩) = ٥٩٧٠٠

∴ مجموع الأعداد التي لا تقبل القسمة على ٣

= ٥٩٧٠٠ − ٢٠١٠٠ = ٣٩٦٠٠

(١١) حن = حـن − حـن−١

= ن/٢ [٢أ + (ن−١) ء]

− (ن−١)/٢ [٢أ + (ن − ٢٠) ء]

= أ + (ن − ١) ء = حن

= حـن+٢ − حـن+١ ——— (١)

= حـن+١ − حـن ——— (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ء = حن+٢ − حن+١

= حـن+٢ − ٢حـن+١ + حـن

(١٢) راتبة بعد ١٥ سنة أي ح١٥ = أ + ١٤ء

= ٤٨٠ + ١٤ × ١٨ = ٧٣٢ جنيها

= ١٥/٢ [٤٨٠ + ٧٣٢] = ٩٠٩٠ جنيه

(١٣) أ + (ن+١) ء = ٢٢ ——— (١)

أ + (ن−٣) ء = ١٠ ——— (٢)

أ + (٢ ن) ء = ٣٤ ----- (٣)

بطرح (٢) من (١) .. ء = ٣

بالتعويض في(١) ∴ أ + ٣ن = ١٩ (٤)

بالتعويض في (٣) ∴ أ + ٦ ن= ٣٤ (٥)

بطرح (٤) من (٥) ∴ ن = ٥ (١٨)

بالتعويض في (٤) ∴ أ = ٤

(١٤) الأيمن = [$\frac{ن}{٢}$(١+ن)]^٢

- [$\frac{ن-١}{٢}$(١+ن - ١)]^٢

= $\frac{ن^٢}{٤}$[١+٢ن + ن^٢ - ن^٢ + ٢ن-١] = ن^٣

(١٥) المجموع =(١+ ٣+ ٥+ ... إلي ن حدا)

- (٢ + ٤ + ٦ +.... إلي ن حدا)

= $\frac{ن}{٢}$[٢+ (ن-١) ×٢] -$\frac{ن}{٢}$[٤+(ن -١) ×٢]

= $\frac{ن}{٢}$ [٢+٢ن - ٢ - ٤- ٢ن + ٢]= - ن

(١٦) $\frac{٦}{٢}$(٢أ + ٥ء) = ١٥٩

∴ ٢أ + ٥ء = ٥٣ ---- (١)

حـ$_{١٣}$ = ١٥٩+ ٤٩ = ٢٠٨

$\frac{١٣}{٢}$ [٢أ + ١٢ء] = ٢٠٨

∴ أ+ ٦ء = ١٦ ---- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ أ = ٣٤ ، ء = - ٣

∴ المتابعة هي (٣٤ ، ٣١، ٢٨ ، .....)

$\frac{ن}{٢}$[٦٨ +(ن- ١) × -٣] > ٠

∴ ن > ٢٣$\frac{١}{٢}$ ∴ ن =٢٤

(١٧) نفرض أن الحد الأول في كل منهما أ

وأساس الأولي ء والثانية هـ

∴ أ +٤ ء = أ + ٨هـ ∴ ء = ٢هـ

ح$_٧$ في الأولي = أ + ٦ء = أ +١٢ هـ

= ح$_{١٣}$ في الثانية

ح$_٢$ - ح$_١$ = لو س ص - لو س

لو$\frac{س ص}{س}$ = لو ص

ح$_٣$ - ح$_٢$ = لوس ص^٢ - لوس ص= لوص

∴ المتابعة حسابية أساسها لوص

حـ = $\frac{٩}{٢}$[٢لو ١٦٠ + ٨ لو]

= $\frac{٩}{٢}$لو(١٦٠) × ^{٢} $\frac{١}{٨٢}$ = $\frac{٩}{٢}$لو١٠٠ = ٩

(١٩) أ + ١٤ء = ٦٤ -------- (١)

(أ+٨ء)^٢ = (أ + ٣ء) (أ+ ١٨ء) --- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ أ = ٨ ، ء = ٤

∴ المتابعة هي (٨ ، ١٢، ١٦ ، ....)

حـ$_{١٥}$ = $\frac{١٥}{٢}$[٢ × ٨ + ١٤×٤] = ٥٤٠

(٢٠) ١٣+ ء + ١٣+ (ن- ١) ء = - ١٤

∴ ن ء = - ٤٠ --- (١)

$\frac{ن}{٢}$[٢٦ + (ن- ١) ء] = - ٥٠ --- (٢)

بالتعويض من (١) في(٢) ∴ ن= ١٠، ء= -٤

(٢١) ح$_ن$ = ٣+ (ن- ١) × ٣ = ٣ن

ح$_{٣ن}$ = ٣+ (٣ن- ١) × ٣ = ٩ن

ح$_{٥ن}$ = ٣+ (٥ن- ١) × ٣ = ١٥ن

حـ$_ن$ = $\frac{ن}{٢}$[٣ن + (ن- ١)×٦ن] = ن^٣

(٢٢) عدد الحدود = ١٨ حداً

$\frac{٢٧}{٢} = -١٢ + (١٨-١)$ ء ∴ ء = $\frac{٣}{٢}$

المتتابعة هي (-١٢، -$١٠\frac{١}{٢}$، -٩، ...، $\frac{١}{٢}$

ح١٤ = -١٢ + ١٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $٧\frac{١}{٢}$

∴ ٦ ح١٤ = ٤٥

٤٥ = $\frac{ن}{٢}$[-٢٤ + (ن-١) × $\frac{٣}{٢}$]

∴ ن^٢ - ١٧ن - ٦٠ = ٠ ∴ ن = ٢٠

ح١٨ + ح١٩ + ح٢٠ = ٣أ + ٥٤ء

= -٣٦ + ٥٤ × $\frac{٣}{٢}$ = ٤٥ نفس المجموع

(٢٣) نفرض أن أساس المتتابعة ء

س = ب+ء ، ص = ب+٢ء ، ع = ب+٣ء

، جـ = ب+٤ء

٣س - ص + ع = ٣ب + ٣ء - ب - ٢ء + ب + ٣ء

= ٣ب + ٤ء ---- (١)

٢ب + جـ = ٢ب + ب + ٤ء

= ٣ب + ٤ء ---- (٢)

من (١)، (٢) ينتج المطلوب

(٢٤) ١٧٠٠٠ = $\frac{ن}{٢}$[٤٠٠ + (ن-١) × ١٠٠]

∴ ن^٢ + ٣ن - ٣٤٠ = ٠

(ن - ١٧)(ن + ٢٠) = ٠ ∴ ن = ١٧

(٢٥) الحدود الثلاثة الوسطى هي ح١٠، ح١١، ح١٢

∴ أ+٩ء + أ + أ + ١١ء = ١٢٩

∴ أ + ١٠ء = ٤٣ ---- (١)

∴ الحدود الثلاثة الأخيرة هي ح١٨، ح١٩، ح٢٠

∴ أ+١٨ء + أ + ١٩ء + أ + ٢٠ء = ٢٣٧

(١٣ ∴ أ + ١٩ء = ٧٩ ---- (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ء = ٤ ، أ = ٣

∴ الحدود الثلاثة الأولى هي ٣، ٧، ١١

(٢٦) نفرض أن الأعداد هي أ-ء، أ، أ+ء

∴ ٣أ = ٢٤ ∴ أ = ٨

∴ الأعداد هي ٨-ء، ٨، ٨+ء

٢ × $\frac{١}{٦} = \frac{١}{٨-ء} + \frac{١}{٨+ء}$ ∴ ء = ±٤

∴ الأعداد هي ٤، ٨، ١٢، أو ١٢، ٨، ٤

-١٢٠ = $\frac{ن}{٢}$[٢٤ + (ن-١) × -٤]

∴ ن = ١٢ حداً

(٢٧) ح٢٣ = ١ + ٢٢ × ٢ = ٤٥

، ح٦٣ = ١ + ٦٢ × ٢ = ١٢٥

∴ الوسط المتناسب = $\sqrt{٤٥ × ١٢٥}$ = ٧٥

٧٥ = ١ + (ن-١) × ٢ ∴ ن = ٣٨

جـ٢٠ = $\frac{٢٠}{٢}$[٢ + ١٩ × ٢] = ٤٠٠

∴ جـ٢٠ = ١٠٠

١٠٠ = $\frac{ن}{٢}$[٢ + (ن-١) × ٢] = ن^٢

∴ ن = ١٠

(٢٨) الحد الأوسط =

ح١١ = أ + ١٠ء = ١٣ ---- (١)

ح١٢ = أ + ١١ء

$\therefore \frac{10}{2}[2أ + 22ء + 9ء]$

$= 12 \times \frac{10}{2}[2أ + 9ء]$

$\therefore أ = -\frac{7ء}{2}$ ----- (2)

بالتعويض من (2) في (1) ∴ ء = 2 ، أ = -7

∴ المتتابعة هي (-7 ، -5 ، -3 ، ......)

(29) $640 = 400 + (ن-1) \times 20$

∴ ن = 13

$حـ = \frac{13}{2}[800 + 12 \times 20] = 6760$

مجموع المبالغ = 6760 + 3 × 640

= 8680 جنيه

$8680 = \frac{16}{2}[800 + 15ء]$

∴ ء = 19 جنيها

(30) أ + 2ء + أ + 3ء = 9

∴ 2أ + 5ء = 9 —— (1)

$-610 = \frac{20}{2}[2أ + 19ء]$

∴ 2أ + 19ء = -61 —— (2)

بطرح (1) من (2) ∴ 14ء = -70

∴ ء = -5 بالتعويض في (1) ∴ أ = 17

$-1665 = \frac{ن}{2}[34 + (ن-1) \times -5]$

$\therefore -3330 = 39ن - 5ن^2$

$\therefore 5ن^2 - 39ن - 3330 = 0$

∴ (5ن + 111)(ن - 30) = 0 ∴ ن = 30

(31) $حـ_ن = \frac{ن}{2}[2 + (ن-1) \times 2] = ن^2$

$حـ_{82} = (82)^2$ ، $حـ_{17} = (17)^2$

$\therefore (82)^2 - (17)^2 = حـ_{82} - حـ_{17}$

= مجموع الحدود الفردية ابتداء من $ح_{18}$ إلى $ح_{82}$

$ح_{18} = 1 + 17 \times 2 = 35$

$ح_{82} = 1 + 81 \times 2 = 163$

∴ الأعداد هي 35 ، 37 ، 39 ، .... ، 163

(32) $\frac{\frac{م}{2}[2 \times 1 + (م-1)ء]}{\frac{ن}{2}[2 \times 1 + (ن-1)ء]} = \frac{م^2}{ن^2}$

∴ 2ن + م ن ء - ن ء = 2م + م ن ء - م ء

∴ 2ن - ن ء - 2م + م ء = 0

∴ ن(2 - ء) - م(2 - ء) = 0

∴ (2 - ء)(ن - م) = 0

∴ ء = 2 أو ن = م مرفوض

$ح_ن = 1 + (ن-1) \times 2 = 2ن - 1$

(33) $\frac{أ + (س-1)ء}{أ + (ص-1)ء} = \frac{ص}{س}$

$أ(س-ص) + ء(س^2 - ص^2) - ء(س-ص) = 0$

بالقسمة على س − ص

أ + ء(س + ص − 1) = 0

$\therefore ح_{س+ص}$ = صفر

(34) نفرض أن أطوال أضلاع المثلث هي

أ − 4 ، أ ، أ + 4 $\therefore ح = \frac{3أ}{2}$

$24 = \sqrt{\frac{3أ}{2} \times (\frac{أ}{2} + 4) \times \frac{أ}{2} \times (\frac{أ}{2} - 4)}$

$\therefore 576 = \frac{3أ^2}{4}(\frac{أ^2}{4} - 16)$

$\therefore أ^4 - 64أ^2 - 192 \times 16 = 0$

$\therefore (أ^2 - 96)(أ^2 + 32) = 0$

$\therefore أ = 4\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{6} - 4$ ، $4\sqrt{6}$ ، $4\sqrt{6} + 4$

(35) $\therefore حـ_ن = ك ن^2$

$\therefore حـ_{ن-1} = ك(ن-1)^2$

$ح_ن = حـ_ن - حـ_{ن-1} = ك[ن^2 - (ن-1)^2]$

$\therefore ح_ن = ك(2ن - 1)$

∴ ح تتناسب مع 2ن - 1

ح١ = ك (٢×١ - ١) = ك

، ح٢ = ٣ك ، ح٣ = ٥ك

∴ المتتابعة حسابية ء = ٢ك ∴ ء = ٢أ

(٣٦) أ + (ن - ١) ء = ك

∴ أ = ك − ن ء + ء

حـ٢ن-١ = (٢ن - ١)/٢ [٢ك − ٢ن ء + ٢ء + (٢ن − ٢) ء]

= ك (٢ن - ١)

(٣٧) حن - حم = [أ + (ن - ١) ء] - [أ + (م - ١) ء]

= (ن - م) ء

ح٤ - ح١ = (٤ - ١) ء

∴ ء − أ = (٤ - ١)(حـ - ب)

∴ أ - ء = ٣ (ب − حـ)

(٣٨) ء = ١

∴ ١٩٨ = ن/٢ [٢أ + (ن - ١) × ١]

∴ ٣٩٦ = ٢أن + ن² − ن ---- (١)

ل = ٢أ ∴ أ + (ن - ١) ء = ٢أ

∴ أ = (ن − ١) × ١ ---- (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ ٣٩٦ = ٢ن² − ٢ن + ن² − ن

∴ ن² − ن − ١٣٢ = ٠

∴ (ن − ١٢)(ن + ١١) = ٠

∴ ن = ١٢ ∴ أ = ١١

(٣٩) نفرض عدد حدود المتتابعة = ٢ن

الحدود الفردية حدها الأول أ وأساسها ٢ء

وعدد حدودها ن

ن/٢ [٢أ + (ن - ١) × ٢ء] = ٩٠

∴ ن أ + ن² ء − ن ء = ٩٠ ---- (١)

الحدود الزوجية حدها الأول أ + ء ، أساسها ٢ء وعدد حدودها ن

ن/٢ [٢أ + ٢ء + (ن - ١) × ٢ء] = ١٠٥

∴ ن أ + ن² ء = ١٠٥ ---- (٢)

بطرح (١) من (٢) ∴ ن ء = ١٥ ---- (٣)

أ + (٢ن − ١) ء − أ = ٢٧

∴ (٢ن - ١) ء = ٢٧ ---- (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ ء = ٣ ، ن = ٥

∴ عدد الحدود = ١٠

(٤٠) بفرض أن قياس زوايا الشكل

أ ، أ + س ، أ + ٢س ، أ + ٣س

∴ ٤أ + ٦س = ٣٦٠°

∴ ٢أ + ٣س = ١٨٠° ---- (١)

جا أ + جا ء = √٣

٢ جا (أ + ء)/٢ جتا (أ - ء)/٢ = √٣

∴ ٢ جا (أ + أ + ٣س)/٢ جتا (أ - أ - ٣س)/٢ = √٣

∴ ٢ جا ٩٠° جتا ٣س/٢ = √٣

∴ جتا ٣س/٢ = √٣/٢ ∴ ق (٣س/٢) = ٣٠°

∴ ق (∠س) = ٢٠° بالتعويض في (١)

∴ ق (٢أ) + ٦٠° = ١٨٠°

∴ ق (أ) = ٦٠°

∴ قياس زوايا الشكل هي :

٦٠° ، ٨٠° ، ١٠٠° ، ١٢٠°

(٤١) ح ن-٢ = حـ ن-٢ – حـ ن-١ = ط – ق

ح ن+١ = حـ ن+١ – حـ ن = ق .. ك

.. ء = ح ن+٢ - ح ن+١ = ط- ق- (ق- ك)

= ط – ٢ ق + ك

ص وسط حسابي بين س ، ع

.. ٢ص = س+ع   ∴ س- ٢ص+ع = ٠

(٤٢) أ+ [(ن-١)^٢ - ١] ء = صفر

∴ أ = - ن^٢ ء – ٢ ن ء   —— (١)

حـ ن = (ن/٢) [-٢ ن^٢ ء-٤ن ء + (ن-١) ء]

= (ن/٢) (- ٢ن^٢ ء – ٣ ن ء – ء)

= - (ء ن/٢) (٢ن^٢ + ٣ ن + ١)

= - (ء ن/٢) (٢ن + ١) (ن+١)

الحدود التالية تبدأ بـ ح ن+١

ح ن+١ = - ن^٢ ء – ٢ن ء + (ن+١-١) ء

= - ن^٢ ء – ن ء

حـ ن+١ = ((ن+١)/٢) [- ٢ن^٢ ء-٢ن ء +(ن+١-١) ء]

= ((ن+١)/٢) (- ٢ن^٢ ء- ن ء)

= - (ء ن/٢) (ن+١) (٢ن+١)

(٤٣) المتتابعة هي

(٢أ+ ١ ، ٢ أ+ ٣ ، ٢ أ+ ٥ ، ......)

حـ ن = (ن/٢) [٢ (٢ أ+١) + (ن-١) ×٢]

= ٢ أ ن + ن^٢

٢أن + ن^٢ = ن^٣   ∴ أ = (ن^٢ - ن)/٢

(٤٤) نفرض أن رقم المنزل هو ن

∴ حـ ن-١ = حـ ٤٩-ن

∴ ((ن-١)/٢) [٢×١ + (ن-٢) ×١]

= ((٤٩-ن)/٢) [٢(ن+١) + (٤٩-ن-١) ×١]

∴ (ن-١) (ن) = (٤٩-ن) (ن+٥٠)

∴ ٢ن^٢ = ٤٩ × ٥٠

ن^٢ = ٤٩ × ٢٥   ∴ ن = ٣٥

(٤٥) نفرض أن نصف قطر الدائرة س

.. مساحة الحلقة الأولي

= ط (س + ١)^٢ – ط س^٢

= (٢ س + ١) ط

مساحة الحلقة الثانية = ط (س+٢)^٢ - ط (س+١)

= (٢ س + ٣) ط

مساحة الحلقة الثالثة = ط (س+٣)^٢ - ط (س+١)^٢

= (٢ س + ٥) ط

∴ مساحات الحلقات الدائرية تكون متتابعة

حسابية ح ١٠ = ٣ ح ٤

(٢س +١) ط + ١٤ × ٢ ط

= ٣[(٢س+ ١) ط + ٣× ٢ط]

∴ ٢ (٢س+ ١) ط = ١٠ط

∴ س = ٢

إجابة تمارين (٢٩)

(١) (أ) ر = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ المتتابعة هي

(٦، ٩، $\frac{٢٣}{٤}$ ، $\frac{٩١}{٤}$ ، $\frac{٢٤٣}{٨}$)

(ب) ر = $\frac{٩}{٦}$ × $\frac{٤}{٣}$ = $\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٢}{٤}$

∴ المتتابعة هي($\frac{١٠٢٤}{٧٢٩}$ ، $\frac{٢٥٦}{٢٤٣}$ ، $\frac{٦٤}{٨١}$ ، $\frac{١٦}{٧}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

(جـ) $ح_٤$ = أ $ر^٣$ ∴ ـ ٤٠ = ٥ $ر^٣$

$ر^٣$ = ـ ٨ ∴ ر = ـ٢

المتتابعة هي (٥، ـ١٠، ٢٠، ـ٤٠ ، ٨٠)

(٢) $ح_ن$ = أ $ر^{ن-١}$ ∴ $\frac{٧٢٩}{٦٢٥}$ = ٢٥ $(-\frac{٣}{٥})^{ن-١}$

$\frac{٧٢٩}{٢٥×٦٢٥}$ = $(-\frac{٣}{٥})^{ن-١}$ ، $(-\frac{٣}{٥})^٦$ = $(-\frac{٣}{٥})^{ن-١}$

∴ ن- ١ =٦ ∴ ن = ٧

(٣) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = $\frac{٦(٢)^ن}{٦(٢)^{ن-١}}$ = ٢ = مقدار ثابت

∴ المتتابعة هندسية $ح_٨$ = ٦(٢)$^{٨-١}$ = ٧٦٨

(٤) $ح_ن$ في الأولي = ٦(٣)$^{ن-١}$

$ح_ن$ في الثانية = ٣٢$(\frac{٣}{٢})^{ن-١}$

∴ ٦(٣) ن-١ = ٣×٣٢× $\frac{٣^{ن-١}}{٢^{ن-١}}$

∴ ٢$^{ن-١}$ = ٢^٤ ، ن-١ = ٤ ، ن = ٥

(٥) أ ر + أ $ر^٢$ = $\frac{٩}{٢}$ أ ر (١+ ر) = $\frac{٩}{٢}$ (١)

ا $ر^٢$- أ $ر^٤$ = $\frac{٩}{٨}$ ا $ر^٢$(١- $ر^٢$) = $\frac{٩}{٨}$ ـــ (٢)

بقسمة (٢) علي (١) $\frac{ر(١-ر)(١+ر)}{١+ر}$

= $\frac{٩}{٨}$ × $\frac{٩}{٢}$ ⟸ $ر^٢$ ـ٤ر+١ = ٠ ⟸ (ر-١)^٢ =٠

ر = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض في(١)

أ× $\frac{١}{٢}$ (١+ $\frac{١}{٢}$) = $\frac{٩}{٢}$ ⟸ أ = ٦

المتتابعة هي (٦، ٣، $\frac{٣}{٢}$ ، ......)

(٦) ١(٢)$^{ن-١}$ > ١٠٠٠ بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ (ن-١) لو ٢ > ١٠٠٠٠٠

∴ (ن-١) > $\frac{٤}{٠,٣٠١٠}$

∴ ن-١ > ١٣,٢ ⟸ ن > ١٤,٢

أي ن = ١٥ أ، ١٦ أ، ١٧ ....

∴ أول حد اكبر من ١٠٠٠٠ هو $ح_{١٥}$

(٧) نفرض أن الأعداد هي ا ، ا ر، ا$ر^٢$

∴ أ + ا ر+ أ $ر^٢$ =٩٣⟸أ(١+ ر+ $ر^٢$) =٩٣...(١)

أ$ر^٢$- (أ+ ا ر) =٥٧ ⟸(ر^٢- ر- ١) =٥٧ .(٢)

بقسمة (١) علي (٢)

∴ ٦ر٢ ــ ٢٥ر- ٢٥ =٠

∴ (٦ر+٥) (ر- ٥) = ٠

ر=٥ أ، ر = - $\frac{٥}{٦}$ وحيث أن الأعداد موجبة

∴ ر = ٥ بالتعويض في (١)

∴ أ = ٣ ∴ الأعداد هي (٣، ١٥، ٧٥)

(٨) نفرض أن الأعداد هي أ، ار ،ا$ر^٢$

∴ ا + ا ر+ ا $ر^٢$ = ١٣ ⟸أ(١+ ر+ $ر^٢$) =١٣...(١)

$ا^٢$+ $ا^٢ر^٢$+ $ا^٢ر^٤$ = ٩١ ⟸$ا^٢$(١+ $ر^٢$+ $ر^٤$)=٩١ .. (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢)

$\frac{١+ ر+ ر^٢}{١- ر+ ر^٢}$ = $\frac{١٣}{٧}$ ـــ (٣)

٣ر٢-١٠ر+٣= ⟸ ر = $\frac{١}{٣}$ أ، ٣

أولاً : إذا كانت ر = $\frac{١}{٣}$ بالتعويض في(٢)

∴ أ=٩ ∴ الأعداد ٩ ، ٣، ١

ثانياً: إذا كانت ر= ٣ بالتعويض في(١)

∴ أ=١ ∴ الأعداد هي ١ ، ٣، ٩

(٩) أ(٢)$^{ن-١}$ =٢ ــــ (١)

، $(٢)^{ن-٢} = ١٢٨$ ---- (٢)

بقسمة (٢) علي (١)

∴ $٢^{ن-١} = ٦٤ = ٢^{٦}$ ن = ٥

بالتعويض في (١) ∴ أ = $\frac{١}{٨}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ......)

(١٠) بوضع المتتابعة علي الصورة

(٢١٧٨ ، .... ، ٩ ، ٣ ، ٩ ، ٣ ، $٣\sqrt{٣}$)

ر = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٩} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

$ح_{٧} = أ ر^{٦} = ٢١٨٧ \left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right)^{٦}$

$= ٢١٨٧ \times \frac{٢٧}{٧٢٩} = ٨١$.

(١١) $أ س^{ر+١} = م$ ---- (١)

، $أ س^{ر-١٠} = ن$ ---- (٢)

بقسمة (٢) علي (١) $\frac{ن}{م} = س^{-١١}$

$م \left(\frac{ن}{م}\right)^{\frac{ر}{١١}} = أ س^{ر+١} (س^{-١١})^{\frac{ر}{١١}}$

$= أ س^{١} = ح$.

إجابة تمارين (٣٠)

(١) $(أ + ٦)^{٢} = (أ+١)(أ+١٦)$ ∴ أ=٤

(٢) $(٢أ + ٥ب)^{٢} = (أ+ب)(٤أ + ١٩ب)$

أ = ٢ب

∴ ٥أ - ٣ب = ٧ب ، ٥أ + ٤ب = ١٤ب

، ٥أ + ١٨ب = ٢٨ب

∴ ٧ب ، ١٤ب ، ٢٨ب في تتابع هندسي

∴ المقادير في تتابع هندسي

(٣) عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦

$\frac{١}{٩} = ٢٧ ر^{٥}$ ر = $\frac{١}{٣}$

∴ الأوساط هي ٩ ، ٣ ، ١ ، $\frac{١}{٣}$

(٤) نفرض أن الوسط الهندسي هو س

∴ العددان هما س - ٨ ، س + ٢٤

∴ $س^{٢} = (س - ٨)(س + ٢٤)$

∴ س = ١٢ ∴ العددان هما ٤ ، ٣٦

(٥) نفرض أن العددين هما أ ، ب

∴ $٣ \left(\frac{أ+ب}{٢}\right) = ٥\sqrt{أب}$

$٣أ + ٣ب = ١٠\sqrt{أب}$ بتربيع الطرفين

∴ $٩أ^{٢} + ٩ب^{٢} + ١٨أب = ١٠٠أب$

∴ $٩أ^{٢} - ٨٢أب + ٩ب^{٢} = ٠$

∴ (٩أ - ب)(أ - ٩ب)

∴ ٩أ = ب ، أ = ٩ب

(٦) نفرض أن العددين س ، ص

∴ س - ص = ٤٨ ∴ س = ٤٨ + ص ---- (١)

$\frac{س+ص}{٢} - \sqrt{س ص} = ١٨$

∴ $س + ص - ٣٦ = \sqrt{س ص}$ ---- (٢)

∴ $٤٨ + ص + ص - ٣٦ = ٢\sqrt{(٤٨ + ص) ص}$

∴ $ص + ٦ = \sqrt{٤٨ ص + ص^{٢}}$

∴ $ص^{٢} + ١٢ص + ٣٦ = ٤٨ص + ص^{٢}$

∴ ص = ١ ، س = ٤٩

(٧) الوسط الأول هو ح ، والوسط الثاني هو ح٢ ،....

ح٢ + ح٥ = -١٥٦

∴ أ ر + أ $ر^{٤}$ = -١٥٦ --- (١)

ح٣ + ح٤ = ٣٦

∴ أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ = ٣٦ --- (٢)

بقسمة (١) على (٢) (١ + $ر^{٣}$) / ر(١ + ر) = - ١٣/٣

∴ ٣ $ر^{٢}$ + ١٠ر + ٣ = ٠

(٣ ر + ١) (ر + ٣) = ٠

ر = - ١/٣ أ، ر = - ٣

إذا كانت ر = - ١/٣ فإن أ = ٤٨٦

والعدد الآخر = ح٦ = - ٢

إذا كانت ر = - ٣ فإن أ = - ٢

والعدد الآخر = ح٦ = ٤٨٦

(٨) ٢ ع = أ + ب ، $هـ^{٢}$ = أ ب

الأيمن = $أ^{٣}$ + $ب^{٣}$ = (أ + ب)($أ^{٢}$ + $ب^{٢}$ - أ ب)

= ٢ع [(أ + ب$)^{٢}$ − ٣ أ ب]

= ٢ع [٤$ع^{٢}$ − ٣ $هـ^{٢}$]

= ٨ $ع^{٣}$ - ٦ $هـ^{٢}$ع = الأيسر

(٩) الوسط الحسابي بين أ/ب ، ب/أ

= ١/٢ (أ/ب + ب/أ)

والوسط الهندسي بينهما = √(أ/ب × ب/أ) = ١

∴ ١/٢ (أ/ب + ب/أ) > ١ ∴ أ/ب + ب/أ > ٢

الوسط الحسابي بين ١ ، أ ب = ١/٢ (١ + أ ب)

الوسط الهندسي بينهما = √(١ × أ ب) = √أ ب

∴ ١/٢ (١ + أ ب) > √أ ب

∴ ١ + أ ب > ٢ √أ ب

(١٠) (أ + جـ)/٢ > ب ∴ أ + جـ > ٢ب − (١)

، (ب + ء)/٢ > جـ ∴ ب + ء > ٢ جـ --(٢)

من (١) ، (٢)

∴ (أ + جـ) (ب + ء) > ٤ ب جـ

من (١) ٢أ + ٢ جـ > ٤ ب -- (٣)

بجمع (٢) ، (٣)

∴ ٢أ + ٢جـ + ب + ء > ٤ ب + ٢جـ

∴ ٢أ + ء > ٣ ب

(١١) ٣ ب − أ > ٣أ × ٢ب بتربيع الطرفين

∴ ٩ $ب^{٢}$ + $أ^{٢}$ − ٦أب > ٦ أ ب

∴ $أ^{٢}$ + ٩ $ب^{٢}$ > ١٢ أ ب

(١٢) ٢ص = س + ع ، (ص - س$)^{٢}$ = س(ع - س)

∴ ((س + ع)/٢ − س$)^{٢}$ = س (ع − س)

∴ $ع^{٢}$ − ٢س ع + $س^{٢}$ = ٤ س ع − ٤ $س^{٢}$

٥ $س^{٢}$ − ٦ س ع + $ع^{٢}$ = صفر

∴ (٥ س - ع) (س - ع) = ٠

∴ أما س = ع مرفوض أ، ع = ٥ س

∴ ٢ص = س + ٥ س = ٦ س

∴ ص = ٣ س ∴ ٣ع = ٥ ص = ١٥ع

إجابة تمارين (٣١)

(١) ر = أ/س ∴ حـ = $س^{ن-١}$ [١ - (أ/س$)^{ن}$] / (١ - أ/س)

بضرب كل من البسط والمقام في س

∴ حـ = $س^{ن}$ [١ - $أ^{ن}$/$س^{ن}$] / (س − أ) = ($س^{ن}$ - $أ^{ن}$) / (س - أ)

(٢) ر = -٤ ∴ حـ = (١ − (- ٤$)^{ن}$) / (١ - (-٤))

حـ = (١ - $١٦^{ن}$) / ٥ ∴ ٥ حـ = ١ − $١٦^{ن}$

$\therefore ١٦^{-} = ١ - ٥\,\text{حـ}$

(٣) $\frac{٢١١}{٩} = \frac{أ - \frac{٣٢}{٢٤٣} \times \frac{٢}{٣}}{١ - \frac{٢}{٣}}$

$\therefore \frac{٢١١}{٩} = ٣أ - \frac{٣٢}{٩}$

$\therefore \frac{٢٤٣}{٩} = ٣أ \qquad \therefore أ = ٩$

∴ المتتابعة هي (٩، ٦، ٤، .....)

(٤) $ح_١ = \frac{٣}{٤}(٢)^٢ = ٣ \,،\, ح_٢ = \frac{٣}{٤}(٢)^٣ = ٦$

$،\, ح_٣ = \frac{٣}{٤}(٢)^٤ = ١٢$

المتتابعة هي (٣، ٦، ١٢، ......) هندسية

$\text{حـ}_٥ = \frac{٣(٢^٥ - ١)}{٢ - ١} = ٩٣$

$١٥٣٣ = \frac{٣(٢^ن - ١)}{٢ - ١} \quad \therefore ٢^ن = ٥١٢$

$\therefore ن = ٩$

(٥) $\text{حـ} = \frac{١[٣^ن - ١]}{٣ - ١} > ١٠٠٠٠$

$\therefore ٣^ن > ٢٠٠٠١ \quad \therefore ن \,\text{لو}\, ٣ > \text{لو}\, ٢٠٠٠١$

$\therefore ن > \frac{٤{,}٣٠١٠}{٠{,}٤٧٧١} \quad \therefore ن > ٩$

∴ أصغر عدد من الحدود = ١٠ حدود

(٦) $\text{حـ} = \frac{١٠٠[١ - (\frac{١}{٢})^ن]}{١ - \frac{١}{٢}} < ١٩٨$

$١٠٠ [١ - (\frac{١}{٢})^ن] < ٩٩$

$\therefore (\frac{١}{٢})^ن > \frac{١}{١٠٠} \,،\, \because (\frac{١}{٢})^٦ = \frac{١}{٦٤}$

$،\, (\frac{١}{٢})^٧ = \frac{١}{١٢٨}$. اكبر عدد من الحدود = ٦ حدود

(٧) $\frac{أ(ر^{١٢} - ١)}{ر - ١} = ٢٧٣ \, \frac{أ(ر^٤ - ١)}{ر - ١}$

$\therefore (ر^٤ - ١)(ر^٨ + ر^٤ + ١) = ٢٧٣ (ر^٤ - ١)$

$\therefore ر^٨ + ر^٤ - ٢٧٢ =$ صفر

$\therefore (ر^٤ + ١٧)(ر^٤ - ١٦) = ٠$

$\therefore ر = ٢$

$أ(٢)^٤ = ٢٠٠ \qquad \therefore أ = \frac{١٢١}{٢}$

(٨) $\text{حـ}_١ = ٤(٣ - ١) = ٨$

$\text{حـ}_٢ = ٤(٩ - ١) = ٣٢$

$\therefore ح_٢ = \text{حـ}_٢ - \text{حـ}_١ = ٣٢ - ٨ = ٢٤$

$\text{حـ}_٣ = ٤(٢٧ - ١) = ١٠٤$

$\therefore ح_٣ = \text{حـ}_٣ - \text{حـ}_٢ = ١٠٤ - ٣٢ = ٧٢$

المتتابعة هي (٨، ٢٤، ٧٢، ٢١٦، .....)

$ح_٧ = ٨(٣)^٦ = ٥٨٣٢$

(٩) $ح_١ = ٢(\frac{١}{٣})^٠ = ٢$

$ح_٢ = ٢(\frac{١}{٣})^{-١} = ٦$

$ح_٣ = ٢(\frac{١}{٣})^{-٢} = ١٨$

$١٧٧١٢٠٠ = \frac{أ(٣^٨ - ١)}{٣ - ١}$

$\therefore أ = ٥٤ \qquad \therefore ٥٤ = ٢(٣^{ن-١})$

$\therefore ٣^{ن-١} = ٣^٣ \qquad \therefore ن = ٤$

(١٠) $٦٣٠٥ = \frac{١٢٨[(\frac{٣}{٢})^ن - ١]}{\frac{٣}{٢} - ١}$

$\frac{٦٣٠٥}{٢٥٦} = (\frac{٣}{٢})^ن - ١ \quad \therefore (\frac{٣}{٢})^ن = \frac{٦٥٦١}{٢٥٦}$

$(\frac{٣}{٢})^ن = (\frac{٣}{٢})^٨ \qquad \therefore ن = ٨$

إجابة تمارين (٣٢)

(١) (أ) $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٥ \times ٣^{-ن}}{٥ \times ٣^{-ن+١}} = \frac{١}{٣}$ ثابت

المتتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$

$\because |ر| < ١$ ∴ يمكن جمعها إلي ∞

(ب) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{2 \times 3^{ن+1}}{2 \times 3^{ن}} = 3$ = ثابت

المتتابعة هندسية أساسها ٣

∵ $|ر| > 1$ ∴ لا يمكن جمعها إلي ∞

(جـ) $\frac{ح_{ن+1}}{ح_ن} = \frac{16 - 4^{ن}}{20 - 4^{ن}}$ تعتمد علي ن

∴ المتتابعة ليست هندسية ولا يمكن جمعها إلي ∞

(ء) المتتابعة هندسية أساسها $\frac{3}{2}$ أي > 1

∴ لا يمكن جمعها إلي ∞

(٢) $0.\overline{74} = \frac{0.74}{1 - 0.01} = \frac{74}{99}$

$0.\overline{126} = \frac{0.126}{1 - 0.001} = \frac{14}{111}$

$0.2\overline{09} = 0.2 + \frac{0.009}{1 - 0.01} = \frac{23}{110}$

(٣) $0.\overline{037} = \frac{0.037}{1 - 0.001} = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$

$\sqrt[3]{0.\overline{037}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$

(٤) $\frac{أ}{1 - ر} = 18$ —— (١)

، $\frac{أ^2}{1 - ر^2} = 162$ —— (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢)

$\frac{(1 - ر)(1 + ر)}{(1 - ر)^2} = \frac{324}{162}$

∴ $ر = \frac{1}{3}$ بالتعويض في (١) ∴ أ = ١٢

∴ المتتابعة هي (١٢ ، ٤ ، $\frac{4}{3}$ ......)

(٥) $س = \frac{أ}{1 - ر}$ (١) ، $ص = \frac{أ^2}{1 - ر^2}$

$س^2 - ص = \frac{أ^2}{(1 - ر)^2} - \frac{أ^2}{(1 - ر)(1 + ر)}$

$= \frac{2 أ^2}{(1 - ر)^2 (1 + ر)}$

، $س^2 + ص = \frac{2 أ^2}{(1 - ر)^2 (1 + ر)}$

∴ $\frac{س^2 - ص}{س^2 + ص} = ر$

(٦) $(م - 1)^2 = (2م + 1)(م - 3)$

∴ $م^2 - 3م - 4 = 0$ ∴ $(م - 4)(م + 1) = 0$

∴ م = ٤ أو م = -١

إذا كانت م = ٤

∴ المتتابعة هي (٩ ، ٣ ، ١ ، ....)

$ر = \frac{1}{3}$ $|ر| < 1$

$ح_\infty = \frac{9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

إذا كانت م = -١

∴ المتتابعة هي = (-١ ، -٢ ، -٤ ، .....)

ر = ٢ $|ر| > 1$ ∴ لا يمكن جمعها إلي ∞

(٧) $أ ر^2 = 24$ ، $أ ر^5 = 3$ ∴ $ر^3 = \frac{1}{8}$

∴ $ر = \frac{1}{2}$ ∴ أ = ٩٦

$ح_\infty = \frac{96}{1 - \frac{1}{2}} = 192$

$ح_ن = \frac{96 [1 - (\frac{1}{2})^ن]}{1 - \frac{1}{2}} = 192 [1 - (\frac{1}{2})^ن]$

$ح_\infty - ح_ن = 192 - 192 + 192 (\frac{1}{2})^ن$

∴ $192 (\frac{1}{2})^ن < 0.01$

ن لو $\frac{1}{2} <$ لو $\frac{0.01}{192}$

∴ -ن لو ٢ < لو ٠,٠١ - لو ١٩٢

$- ن \times 0.3010 < -2 - 2.2833$

∴ ن > ١٤ + كسر ∴ ن = ١٥

(٨) $أ = 7 \times \frac{أ ر}{1 - ر}$ ← $ر = \frac{1}{8}$

$\frac{أ}{1 - \frac{1}{8}} = 4$ ← $أ = \frac{7}{2}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{7}{2}$ ، $\frac{7}{16}$ ، $\frac{7}{128}$ ، .....)

(٩) $أ ر + أ ر^٢ = ٦$ ∴ $أ ر(١+ر) = ٦$ --- (١)

$أ × أ ر^٣ = ٨$ ∴ $أ^٢ ر^٣ = ٨$ --- (٢)

بتربيع (١) والقسمة علي (٢)

$$\frac{١ + ٢ر + ر}{ر} = \frac{٩}{٢}$$

$٢ ر^٢ - ٥ ر + ٢ = ٠$ ∴ $(٢ر-١)(ر-٢) = ٠$

$ر = \frac{١}{٢}$ أ، $ر = ٢$ ∴ للمسألة حلان

$ر = \frac{١}{٢}$ بالتعويض في (١) ∴ $أ = ٨$

$$ح_{\infty} = \frac{٨}{١ - \frac{١}{٢}} = ١٦$$

$ر = ٢$ بالتعويض في (١) ∴ $أ = ١$

(١٠) $أ ر - ر = \frac{٣}{٢}$ ∴ $ر(أ-١) = \frac{٣}{٢}$ (١)

$أ = \frac{٢ أ ر^٢}{١ - ر}$ ∴ $٢ر^٢ + ر - ١ = ٠$

$(٢ر-١)(ر+١) = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٢}$ أ، $ر = -١$ مرفوض

بالتعويض في (١) $\frac{١}{٢}(أ-١) = \frac{٣}{٢}$

∴ $أ = ٤$ ∴ المتتابعة هي (٤ ، ٢ ، ١ ، ....)

إجابة تمارين علامة (م هـ)

(١) $(س-١)^٢ = (س-٢)(٣س-٥)$

∴ $س = ٣$ أ، $س = \frac{٣}{٢}$

$$ر = \frac{س-١}{س-٢} = \frac{٣-١}{٣-٢} = ٢$$

$$أ، ر = \frac{\frac{٣}{٢} - ١}{\frac{٣}{٢} - ٢} = -١$$

(٢) $ح_١ = ٣×٢^{-٢} = \frac{٣}{٤}$ ، $ح_٢ = ٣×٢^{-١} = \frac{٣}{٢}$

، $ح_٣ = ٣ × ٢^٠ = ٣$

المتتابعة $(\frac{٣}{٤} ، \frac{٣}{٢} ، ٣ ، .....)$ هندسية

$$٧٦٧\frac{١}{٤} = \frac{\frac{٣}{٤}(٢^ن - ١)}{٢ - ١}$$

$٢^ن = \frac{٣٠٦٩}{٤} × \frac{٤}{٣} + ١ = ١٠٢٤$

∴ $٢^ن = ٢^{١٠}$ ∴ $ن = ١٠$

(٣) $ح_١ = ٢ × ٣^٠ = ٢$ ، $ح_٢ = ٢ (٣)^١ = ٦$

، $ح_٣ = ٢(٣)^٢ = ١٨$

∴ المتتابعة الهندسية أساسها = ٣

∴ $\frac{٢(٣^ن - ١)}{٣ - ١} > ٣٠٠$

∴ $٣^ن > ٣٠١$ ∴ لو ٣ > لو ٣٠١

∴ $ن > \frac{٢,٤١٦}{٠,٤٧٧١}$ ∴ $ن > ٥,١٩٥$

∴ $ن = ٦$

(٤) الشرط $|س| < ١$

$ح_ن = ١ × س^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = س^ن$

$$ح_{\infty} = \frac{س^ن}{١ - س}$$

∴ $\frac{ح_ن}{ح_{\infty} \text{ التالية}} = س^{ن-١} × \frac{١-س}{س^ن} = \frac{١-س}{س} = \frac{١}{٢}$

∴ $س = \frac{٢}{٣}$

$ح_{\infty}$ الأولي $= ١ × \frac{١ - (\frac{٢}{٣})^٥}{١ - \frac{٢}{٣}} = \frac{٢١١}{٨١}$

(٥) $أ ر + أ ر^٣ = ١٠$

∴ $أ ر (١ + ر^٢) = ١٠$ --- (١)

$أ × أ ر^٢ = ٣ أ ر^٢$ ∴ $أ ر^٢ = ٣$ --- (٢)

بقسمة (١) علي (٢) ∴ $٣ر^٢ - ١٠ر + ٣ = ٠$

∴ $(٣ر-١)(ر-٣) = ٠$

∴ $ر = \frac{١}{٣}$، $ر = ٣$ مرفوض

بالتعويض في (٢) ∴ $أ = ٢٧$

$ح_٥ = \frac{٢٧[١ - (\frac{١}{٣})^٥]}{\frac{٢}{٣}} = \frac{١٢١}{٣}$

$ح_\infty = \frac{٢٧}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٨١}{٢}$

(٦) $أ = ٢ \times \frac{أ ر}{١ - ر}$ ∴ $ر = \frac{١}{٣}$

$\frac{أ^٢}{١ - ر^٢} = \frac{٢٧}{٢٦}$ ∴ $\frac{أ^٢}{١ - \frac{١}{٩}} = \frac{٢٧}{٢٦}$

∴ أ = ١ ∴ المتتابعة هي ($١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩}$)

(٧) $ح_{٢٠}$ للأول = $\frac{٢٥٠ [(١,٠٥)^{٢٠} - ١]}{١,٠٥ - ١}$

$= \frac{٢٥٠ [٢,٦٥٥ - ١]}{١,٠٥} = ٨٢٧٥$ جنيها

$ح_{٢٠}$ للثاني = $\frac{٢٠}{٢} [٢ \times ٥٠٠ + ١٩ \times ١٥]$

= ٧٨٥٠ جنيه ∴ الفرق = ٤٢٥ جنيها

(٨) مرتب الأول في السنة العشرين =

٣٠٠ + ١٩ × ٢٤ = ٧٥٦ جنيها

مرتب الثاني في السنة العشرين = $٣٠٠ (١,٠٤)^{١٩}$

= ٣٠٠ (٢,١٠٤) = ٦٣١,٢ جنيها

٦٣١,٢ = ٣٠٠ - ١٩ ء

∴ ء = ١٧.٤٣ جنيها

(٩) المسافة المقطوعة لأعلى بعد الصدمة الأولى

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})$

المسافة المقطوعة لأعلى بعد الصدمة الثانية

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})^٢$

المسافة المقطوعة لأعلى بعد الصدمة الثالثة

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})^٣$

المسافة المقطوعة لأعلى بعد الصدمة الرابعة

$= ٥ \times (\frac{٣}{٥})^٤$

$= \frac{٨١}{١٢٥}$ مترا

مجموع المسافات التي قطعتها من لحظة سكونها حتى تكاد تسكن =

$٥ + ٢ [٥ \times \frac{٣}{٥} + ٥ \times (\frac{٣}{٥})^٢ + ٥ (\frac{٣}{٥})^٣ + ...]$

$= ٥ + ٢ \times \frac{٥ \times \frac{٣}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥}} = ٢٠$ مترا

(١٠) المتتابعة الحسابية (-١، ٤، ٩، ...)

المتتابعة الهندسية ($١ ، \sqrt{٢} ، ٢$ ، ...)

$ح_{١٢}$ للحسابية = $\frac{١٢}{٢} [٢ \times -١ + ١١ \times ٥] = ٣١٨$

$ح_{١٢}$ للهندسية = $\frac{١ [(\sqrt{٢})^{١٢} - ١]}{\sqrt{٢} - ١}$

$= ٦٣ (\sqrt{٢} + ١)$

(١١) $أ (١ + ر + ر^٢) = \frac{٧}{٤} ر^٢$

∴ $٣ ر^٢ - ٤ ر - ٤ = ٠$

∴ $(ر - ٢)(٣ ر + ٢) = ٠$

∴ ر = ٢ والآخر مرفوض

، $أ ر^٤ = ٢٤$ ∴ $أ = \frac{٣}{٢}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{٣}{٢} ، ٣ ، ٦$ ، ....)

، $ح_٦ = \frac{\frac{٣}{٢} [٢^٦ - ١]}{٢ - ١} = ٩٤ \frac{١}{٢}$

(١٢) $أ ر^{س-١} ، أ ر^{ص-١} ، أ ر^{ع-١}$ متتابعة هندسية

$(أ ر^{ص-١})^٢ = أ ر^{س-١} \times أ ر^{ع-١}$

∴ $ر^{٢ص-٢} = ر^{س+ع-٢}$

∴ ٢ص = س + ع ∴ س، ص، ع متتابعة حسابية

(١٣) $ب = أ ر ، حـ = أ ر^٢$

∴ $ء = \frac{أ + أ ر}{٢} = \frac{أ (١ + ر)}{٢}$

، $هـ = \frac{أ ر + أ ر^٢}{٢} = \frac{أ ر (١ + ر)}{٢}$

الطرف الأيمن = $\frac{٢ أ}{أ (١ + ر)} + \frac{٢ أ ر}{أ ر (١ + ر)}$

= $\frac{٢ (١+ر)}{١+ر}$ = ٢ = الطرف الأيسر

(١٤) ب = أ ر، جـ = أ ر^{٢} ، ء = أ ر^{٣}

لوب – لوأ = لوأ س – لو أ = لو $\frac{أ ر}{أ}$ = لو ر

لو جـ - لوب = لو أ ر^{٢} – لو أ ر = لو ر

لو ء – لو جـ = لو أ ر^{٣} – لو أ ر^{٢} = لو ر

∴ لوأ ، لوب ، لوجـ ، لوء تكون متتابعة حسابية

∵ ء = أ ر^{٣} ∴ لوء = لو أ + ٢ لور

∴ لو $\frac{١٣٧٥}{١١}$ = ٣ لور   لو١٢٥ = ٣ لور

∴ ٣ لو٥ = ٣ لور   ∴ ر = ٥

∴ ب = ١١×٥ = ١١ ، جـ = ١١ ، ء = ٢٧٥

(١٥) ٤٨ = $\frac{١٢}{٢}$ [٢ أ + ١١ء]

∴ ٢أ + ١١ء = ٨ ——— (١)

(أ+ء)^{٢} = أ (أ+ ٤ء) ∴ ء = ٢أ ——— (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ ٢٤ أ = ٨ ∴ أ = $\frac{١}{٣}$ ، ء = $\frac{٢}{٣}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٣}$ ، ١ ، $\frac{٥}{٣}$ ....)

(١٦) أ (١+ر+ر^{٢}) = ٧٠ ---- (١)

١٠أر = ٤أ + ٤أر^{٢} ∴ ٢ر^{٢} - ٥ر + ٢ = ٠

∴ (٢ر - ١)(ر - ٢) = ٠ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$ أو ر = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض في(١) ∴ أ = ٤٠

عندما ر = ٢ بالتعويض في(١) ∴ أ = ١٠

∴ الأعداد هي ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠

(١٧) $\frac{١١}{٢}$ [٢أ + ١٠ء] = (أ + ٥ء)^{٢}

∴ أ + ٥ء = ١١ --- (١)

(أ + ٦ء)^{٢} = (أ + ٣ء)(أ + ١٠ء)

∴ أ = ٦ء بالتعويض في (١) ∴ ء = ١

∴ أ = ٦ ∴ المتتابعة هي (٦ ، ٧ ، ٨ ، ...)

(١٨) ٣ب = $\frac{٢أ + ٤حـ}{٢}$ = أ + ٢حـ

(٣ب - ٢أ)^{٢} = ٢أ (٤حـ - ٢أ)

(٢حـ - أ)^{٢} – ٤أ (٢حـ - أ) = صفر

∴ (٢حـ - أ)(٢حـ - أ – ٤أ) = صفر

∴ ٢حـ - أ = ٠ أو ٢حـ - ٥أ = ٠

∴ $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{١}{٢}$ أو $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{٥}{٢}$

(١٩) أ-ء + أ + أ+ء = ٢١ ∴ أ = ٧

١١-ء ، ١٢ ، ١٥ +ء متتابعة هندسية

∴ ١٤٤ = (١١-ء)(١٥ + ء)

∴ ء^{٢} + ٤ء - ٢١ = ٠ ∴ (ء+٧)(ء-٣) = ٠

∴ ء = -٧ أو ء = ٣

∴ الأعداد هي ١٤ ، ٧ ، أو ٤، ٧، ١٠

(٢٠) ٢لوص = لوس + لوع

∴ لوص^{٢} = لوس ع ∴ ص^{٢} = س ع

∴ ص وسط هندسي بين س ، ع

(٢١) الوسط الحسابي بين أ،هـ ب = $\frac{أ + هـ ب}{٢}$

والوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{أ \times هـ ب}$

∴ $\frac{أ + هـ ب}{٢}$ > $\sqrt{أ هـ ب}$

∴ أ + هـ ب > ٢ $\sqrt{أ هـ ب}$ --- (١)

الوسط الحسابي بين أ ، $\frac{ب}{هـ}$ = $\frac{أ + \frac{ب}{هـ}}{٢}$

والوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{أ \times \frac{ب}{هـ}}$ (٢)

بضرب (١) × (٢)

∴ (أ + هـ ب) (أ + $\frac{ب}{هـ}$) > ٤ أ ب

(٢٢) ٣ ب وسط حسابي بين ٦أ ، ٢حـ

ووسطهما الهندسي = $\sqrt{٦أ \times ٢حـ}$

∴ ٣ ب^{٢} > $\sqrt{١٢أحـ}$

∴ ٣ب^{٢} > ٤أحـ — (١) بالمثل ٢حـ^{٢} > ٣ بء

بجمع (١) ، (٢) ينتج المطلوب

(٢٣) ب > $\frac{٤أ + ٣حـ}{٢}$ ٣حـ > $\frac{ب + ٤ء}{٢}$

∴ ٢ب × ٦حـ > (٤أ+٣حـ) (ب+٤ء)

(٢٤) $\frac{أ + حـ}{٢}$ > ب ∴ أ+جـ > ٢ب

$\frac{ب + ء}{٢}$ > حـ ∴ ب+ء > ٢حـ

بالجمع ∴ أ+حـ+ب+ء > ٢ب + ٢حـ

∴ أ + ء > ب + حـ

(٢٥) نفرض أن أساس الأولى = ر

∴ أساس الثانية = ر+١

(ر+١)^{٢} = ١٦ × ١ × ر

∴ ر + ١ = ± ٤ ر ∴ ر = $\frac{١}{٣}$ أو - $\frac{١}{٥}$

∴ يوجد حلان

عندما ر = $\frac{١}{٣}$ ∴ أساس الثانية = $\frac{٤}{٣}$

فلا يمكن جمعها إلى ∞

عندما ر = - $\frac{١}{٥}$. أساس الثانية = $\frac{٤}{٥}$ حـ

∴ يمكن جمع المتتابعتين إلى ∞

حـ$_{∞}$ للأولى = $\frac{١}{١ + \frac{١}{٥}}$ = $\frac{٥}{٦}$

حـ$_{∞}$ للثانية = $\frac{١}{١ - \frac{٤}{٥}}$ = ٥

∴ $\frac{حـ_{∞}\ للأولى}{حـ_{∞}\ للثانية}$ = $\frac{٥}{٦}$ × $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١}{٦}$

(٢٦) المتتابعة الحسابية هي (٢، ٢+ء، ٢+٢ء، ...)

المتتابعة الهندسية هي (٢، ٢ر، ٢ر^{٢}، ...)

∴ ٢ر = ٢ + ٢ء ∴ ء = ر-١ — (١)

٢ر^{٢} = ٢ + ٧ء — (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ ٢ر^{٢} - ٧ر + ٥ = ٠

∴ (٢ر-٥)(ر-١) = ٠ ∴ ر = $\frac{٥}{٢}$ والآخر مرفوض

∴ ء = $\frac{٣}{٢}$

∴ المتتابعة الحسابية هي (٢ ، ٣ $\frac{١}{٢}$ ، ٥ ، ...)

، المتتابعة الهندسية هي (٢ ، ٥ ، ١٢$\frac{١}{٢}$ ، ...)

(٢٧) ٨ + ٨ ر + ٨ ر^{٢} = ١٤

∴ ٤ر^{٢} + ٤ر - ٣ = ٠

∴ (٢ر+٣) (٢ر-١) = ٠

∴ ر = - $\frac{٣}{٢}$ أو $\frac{١}{٢}$

المتتابعة الأولى هي (٨، -١٢، ١٨، ...)

المتتابعة الثانية هي (٨ ، ٤ ، ٢ ، .....)

حـ للأولى = $\frac{٨[١-(-\frac{٣}{٢})^{٧}]}{١-(-\frac{٣}{٢})}$ = $\frac{٤٦٣}{٨}$

للثانية = $\frac{٨[١-(\frac{١}{٢})^{٧}]}{١-(\frac{١}{٢})}$ = $\frac{١٢٧}{٨}$

(٢٨) $\frac{أ}{١ - ر} = \frac{٣أ}{١ - (ر - \frac{١}{٢})}$

∴ $\frac{١}{١ - ر} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢} - ر}$

∴ $ر = \frac{٥}{٦}$

∴ أساس المتتابعة الثانية = $\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٢}$

$أ^٣ (\frac{١}{٢})^٢ - أ (\frac{٥}{٦})^٢ = \frac{١}{١٨}$ ∴ أ = ١

∴ المتتابعة الأولى هي$(١، \frac{٥}{٦}، \frac{٢٥}{٣٦}، ....)$

، المتتابعة الثانية هي$(٣، \frac{٣}{٢}، \frac{٣}{٤}، ....)$

(٢٩) $\frac{أ(١ + ر + ر^٢)}{\frac{أ}{١ - ر}} = \frac{٢٦}{٢٧}$

∴ $(١ - ر)(١ + ر + ر^٢) = \frac{٢٦}{٢٧}$

∴ $١ - ر^٣ = \frac{٢٦}{٢٧}$ ∴ $ر = \frac{١}{٣}$

$أ ر^٣ = ٩$ ∴ $أ (\frac{١}{٣})^٣ = ٩$

∴ أ = ٢٤٣

المتتابعة هي (٢٤٣، ٨١، ٢٧، ....)

$جـ = \frac{٢٤٣}{١ - \frac{١}{٣}} = \frac{٧٢٩}{٢}$

$جـ_ن = \frac{٢٤٣[١ - (\frac{١}{٣})^ن]}{١ - (\frac{١}{٣})}$

$= \frac{٧٢٩}{٢}[١ - (\frac{١}{٣})^ن]$

$جـ_∞ - جـ_ن = \frac{٧٢٩}{٢}(\frac{١}{٣})^ن = \frac{١}{٢ × ٣^{ن - ٦}}$

∴ $\frac{١}{٢ × ٣^{ن - ٦}} > \frac{١}{١٠٠٠}$

∴ $٣^{ن - ٦} > ٥٠٠$

∴ (ن - ٦) لو ٣ > لو ٥٠٠

∴ $ن - ٦ > \frac{٢,٦٩٩٠}{٠,٤٧٧١}$

∴ ن - ٦ > ٥,٦٥٧ ∴ ن > ١١,٦٥٧

∴ ن = ١٢ أو أكثر

(٣٠) $\frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢٧}{٢}$ ——— (١)

$أ = ٢(أ ر + أ ر^٢ + ... ∞)$

∴ $أ = ٢ × \frac{أ ر}{١ - ر}$. ر = $\frac{١}{٣}$ (٢)

بالتعويض في (١) ∴ أ = ٩

∴ المتتابعة هي (٩، ٣، ١، ....)

$جـ_٥ = \frac{٩[١ - (\frac{١}{٣})^٥]}{١ - (\frac{١}{٣})} = \frac{٢٧}{٢}[١ - (\frac{١}{٣})^٥]$

(٣١) حاصل ضرب حدود المتتابعة

$= أ × أ ر × أ ر^٢ × ..... × أ ر^{ن - ١}$

$= أ^ن × ر^{١ + ٢ + ٣ + ... + (ن - ١)}$

$= أ^ن ر^{\frac{ن - ١}{٢}(١ + ن - ١)} = أ^ن ر^{\frac{ن}{٢}(ن - ١)}$

(٣٢) $س = \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١}$

، ص = $أ^ن ر^{\frac{ن}{٢}(ن - ١)}$ من المسألة السابقة

$ع = \frac{\frac{١}{أ}[١ - (\frac{١}{ر})^ن]}{١ - (\frac{١}{ر})} = \frac{ر^ن - ١}{أ ر^{ن - ١}(ر - ١)}$

∴ $(\frac{س}{ع})^ن = (أ^٢ ر^{ن - ١})^ن =$

$أ^{٢ن} ر^{ن(ن - ١)} = ص^٢$

(٣٣) $س \frac{١}{٥} = ص \frac{١}{٥}$ ∴ س = ص $\frac{٣}{٥}$

$ع \frac{١}{٧} = ص \frac{١}{٥}$ ∴ ع = ص $\frac{٧}{٥}$

$س ع = ص \frac{٣}{٥} × ص \frac{٧}{٥} = ص^٢$

∴ ص وسط هندسي بين س ، ع

(٣٤) حاصل الضرب = ٠ × $\frac{س}{ر} × \frac{س}{ر}$ × س × س

× س ر × س $ر^٢$ × .... = $س^ن$

$٢٤٣ = ٣^ن$ ∴ $٣^٥ = ٣^ن$

∴ ن = ٥ ∴ $أ ر^٢ = ٣$ ، $أ ر^٣ = ٩$

بالقسمة ∴ ر = ٣ ∴ أ = $\frac{١}{٣}$

حـ$_٥$ = $\frac{\frac{١}{٣}[٣^٥ - ١]}{٣ - ١}$ = $\frac{١٢١}{٣}$

(٣٥) س ر + س $ر^٢$ = ١٨

∴ س ر (١ + ر) = ١٨ —— (١)

س + ء + ص − ء = ٢٧

∴ س + ص = ٢٧ ∴ س + س $ر^٣$ = ٢٧

∴ س (١ + $ر^٣$) = ٢٧ —— (٢)

بقسمة (٢) إلي (١)

$\frac{(١+ر)(١ - ر + ر^٢)}{ر(١+ر)}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ ٢$ر^٢$ − ٥ر + ٢ = ٠

ومنها (٢ر-١)(ر-٢) = ٠

ر = ١/٢ ، ر = ٢

عندما ر = $\frac{١}{٢}$ ∴ س × $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ = ١٨

∴ س = ٢٤ ∴ ص = ٣

عندما ر = ٢ ∴ س × ٢ × ٣ = ١٨

∴ س = ٣ ، ص = ٢٤

(٣٦) حـ$_\infty$ = $\frac{١}{١ - \frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٢}$

حـ$_ن$ = $\frac{١ - (\frac{٣}{٥})^ن}{١ - \frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٢}$ [١ − $(\frac{٣}{٥})^ن$]

$\frac{٥}{٢}$ − $\frac{٥}{٢}$ [١ − $(\frac{٣}{٥})^ن$] < ٠,٠٠٠١

$(\frac{٣}{٥})^ن$ < $\frac{٤}{١٠٠٠٠٠}$

∴ ن [لو٣ − لو٥] < لو٤ − لو ١٠٠٠٠٠

ن [٠,٤٧٧١ − ٠,٦٩٩٠] < ٠,٦٠٢١ − ٥

−ن × ٠,٢٢١٩ < −٤,٣٩٧٩

∴ ن > ١٩,٨

∴ أصغر عدد من الحدود = ٢٠ حدا

(٣٧) ص > $\sqrt{س ع}$ ∴ $ص^٢$ > س ع —— (١)

$أ^٢$ = س ص ، $ب^٢$ = ص ع

∴ $أ^٢ ب^٢$ = س ع $ص^٢$

∴ س ع = $\frac{أ^٢ ب^٢}{ص^٢}$

بالتعويض في (١) ∴ $ص^٢$ > $\frac{أ^٢ ب^٢}{ص^٢}$

∴ $ص^٤$ > $أ^٢ ب^٢$ ∴ $ص^٢$ > أ ب

(٣٨) الوسط الحسابي بين س ، $\frac{١}{س}$ = $\frac{س + \frac{١}{س}}{٢}$

والوسط الهندسي بينهما = $\sqrt{س \times \frac{١}{س}}$ < ٢

∴ $\frac{س + \frac{١}{س}}{٢}$ > ١ ∴ س + $\frac{١}{س}$ > ٢

<u>حل آخر:</u> ∴ س > ١

∴ س − ١ > ٠ بالتربيع

∴ $س^٢$ − ٢ س + ١ > ٠

∴ $س^٢$ + ١ > ٢ س بالقسمة علي س

∴ س + $\frac{١}{س}$ > ٢

(٣٩) حـ = ٤٠٠٠ + ٤٠٠٠(٠,٨٧) + ٤٠٠٠$(٠,٨٧)^٢$ + ... إلي ١٠ حدود

= $\frac{٤٠٠٠[١ - (٠,٨٧)^{١٠}]}{١ - ٠,٨٧}$

= $\frac{٤٠٠٠[١ - ٠,٢٤٨٣]}{٠,١٣}$

= ٢٣١٢٩,٢٣ كجم

الحد الأقصى للإنتاج = $\frac{٤٠٠٠}{١ - ٠,٨٧}$

= ٣٠٧٦٩,٢٣ كجم

(٤٠) $\frac{ع}{هـ} = \frac{أ + ب}{٢\sqrt{أ ب}} = \frac{أ ب + ب^٢}{٢\sqrt{أ ب \times ب^٢}}$

$= \frac{أ ب + أ حـ}{٢\sqrt{أ ب \times أ حـ}} = \frac{ب + حـ}{٢\sqrt{ب حـ}}$

$= \frac{و}{ى}$

(٤١) نفرض أن العددين الأوسطين

هما ب ، ٢٠ ـ ب

∴ الأعداد هي أ، ب، ٢٠ ـ ب ، ٢٢ ـ أ =

$٢ب = أ + ٢٠ - ب$

∴ $أ = ٣ب - ٢٠$ ---- (١)

$(٢٠ - ب)^٢ = ب(٢٢ - أ)$

$٤٠٠ - ٤٠ب + ب^٢ = ب[٢٢ - ٣ب + ٢٠]$

∴ $٢ب^٢ - ٤١ب + ٢٠٠ = ٠$

$(٢ب - ٢٥)(ب - ٨) = ٠$

∴ $ب = ١٢\frac{١}{٢}$ أو $ب = ٨$

∴ $أ = ١٧\frac{١}{٢}$ أو $أ = ٤$

∴ الأعداد هي $١٧\frac{١}{٢}$ ، $١٢\frac{١}{٢}$ ، $٧\frac{١}{٢}$ ، $٤\frac{١}{٢}$

أو الأعداد هي ٤ ، ٨ ، ١٢ ، ١٨

(٤٢) $\frac{١[١ - أ^{ن+١}]}{١ - أ} = (١ + أ)(١ + أ^٢)(١ + أ^٤)(١ + أ^٨)$

∴ $١ - أ^{ن+١} = (١ - أ)(١ + أ)(١ + أ^٢)(١ + أ^٤)(١ + أ^٨)$

∴ $١ - أ^{ن+١} = (١ - أ^٢)(١ + أ^٢)(١ + أ^٤)(١ + أ^٨)$

$= (١ - أ^٤)(١ + أ^٤)(١ + أ^٨)$

$= (١ - أ^٨)(١ + أ^٨) = ١ - أ^{١٦}$

∴ $أ^{س+١} = ١٦$ ∴ $س + ١ = ١٦$

∴ $س = ١٥$

(٤٣) مجموع الحدود الفردية الرتبة

$= \frac{أ[١ - (ر^٢)^ن]}{١ - ر}$ ---- (١)

مجموع الحدود الزوجية الرتبة

$\frac{أر[١ - (ر^٢)^ن]}{١ - ر}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) ∴ $ر = ٢$

$ح_ن = أر^{ن-١}$ ، $ح_{ن+٢} = أر^{ن+١}$

$أر^{ن-١} + أر^{ن+١} = ٤٠$

∴ $أر^{ن-١}(١ + ر^٢) = ٤٠$

∴ $أ \times ٢^{ن-١} \times ٥ = ٤٠$

∴ $أ \times ٢^{ن-١} = ٨$ ---- (٣)

$\frac{أ(ر^{٤ن} - ١)}{ر - ١} \quad \frac{أ(ر^{٢ن} - ١)}{ر - ١}$

$= ٣٢ \left[\frac{أ(ر^{٣ن} - ١)}{ر - ١} \quad \frac{أ(ر^ن - ١)}{ر - ١} \right.$

∴ $ر^{٢ن}(ر^{٢ن} - ١) = ٣٢ ر^ن [ر^{٢ن} - ١]$

∴ $ر^ن = ٣٢$ ∴ $٢^ن = ٢^٥$

ن = ٥ ومن (٣) ∴ $أ = \frac{١}{٢}$

∴ المتتابعة هي ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ....)

(٤٤) نفرض أن أساس الأولى ر والثانية $\frac{١}{ر}$

والحد الأول للأولى ٩ أ وللثانية أ

∴ $٥٢ = \frac{٩أ(ر^٦ - ١)}{ر - ١}$ ---- (١)

∴ $١٤٠٤ = \frac{أ(\frac{١}{ر^٦} - ١)}{\frac{١}{ر} - ١}$

∴ $١٤٠٤ = \frac{أ(ر^٦ - ١)}{ر^٥(ر - ١)}$ ---- (٢)

بقسمة (٢) على (١)

$\therefore \frac{١٤٠٤}{٢٥} = \frac{أ(ر^{٦}-١)}{ر^{٥}(ر-١)} \times \frac{ر-١}{٩أ(ر^{٦}-١)}$

$\therefore ٢٧ = \frac{١}{٩ر^{٥}} \qquad \therefore ر^{٥} = (\frac{١}{٣})^{٥}$

$\therefore ر = \frac{١}{٣}$ أساس الأولي

$\therefore$ أساس الثانية = ٣

بالتعويض في (١) $\therefore أ = \frac{٢٧}{٧}$

$\therefore$ المتتابعة الأولي ($\frac{٢٤٣}{٧}$ ، $\frac{٨١}{٧}$ ، $\frac{٢٧}{٧}$ ، ...)

، المتتابعة الثانية ($\frac{٢٧}{٧}$ ، $\frac{٨١}{٧}$ ، $\frac{٢٤٣}{٧}$ ، ....)

$ح_{٧} = أر^{٦} = \frac{٢٤٣}{٧}(\frac{١}{٣})^{٦} = \frac{١}{٢١}$

$حـ_{\infty} = \frac{\frac{١}{٢١}}{١-\frac{١}{٣}} = \frac{١}{١٤}$

الفهرس

الموضوع — الصفحة

اولا : التفاضل وحساب المثلثات

(١)التفاضل

الاشتقاق

(٢)حساب المثلثات

ثانيا : الجبـــــــــر

(١)الدوال الحقيقية

(٢)الاسس واللوغاريتمات

(٣)المتتابعات